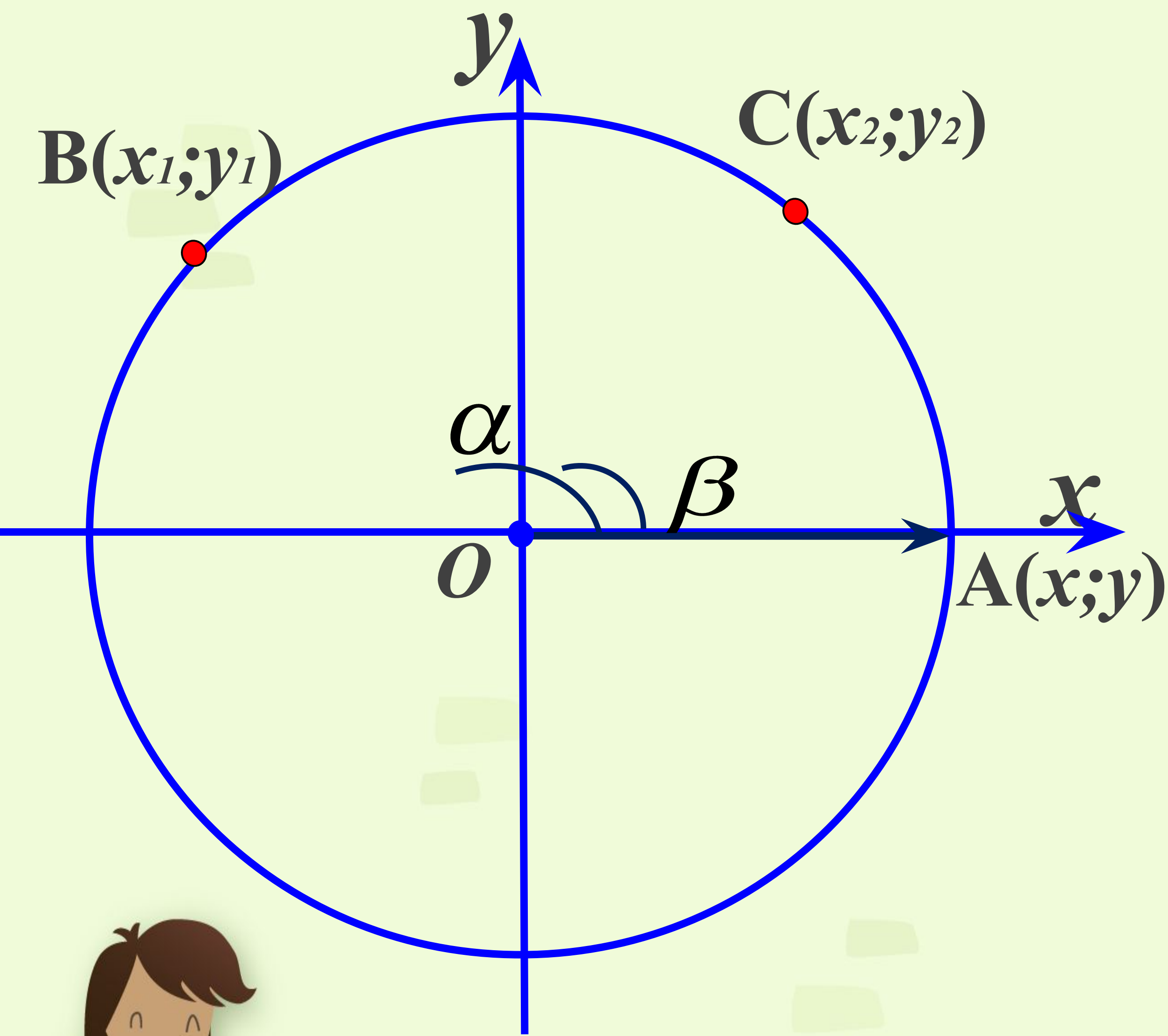
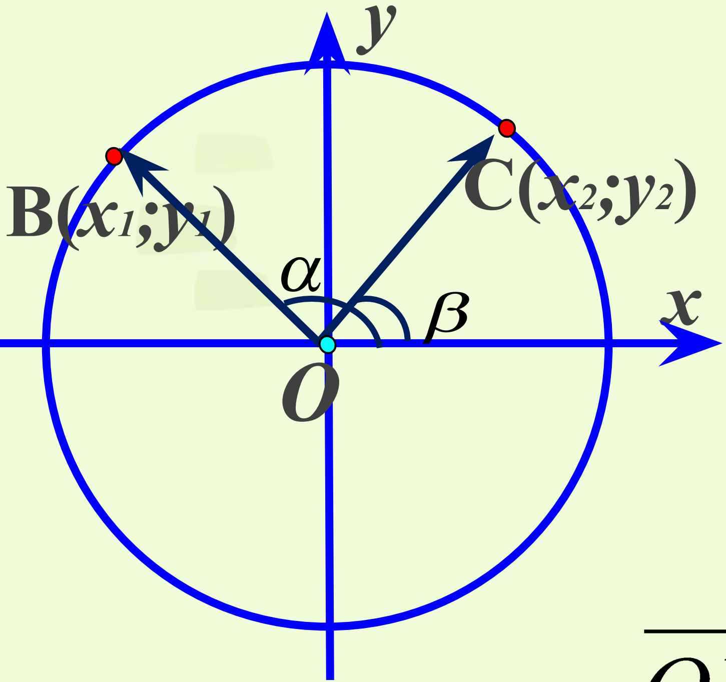
Формулы косинуса суммы и разности двух аргументов



Повернём радиус OA, равный 1, на угол α и на угол β



$$\overrightarrow{OB}\{x_1;\, y_1\}$$

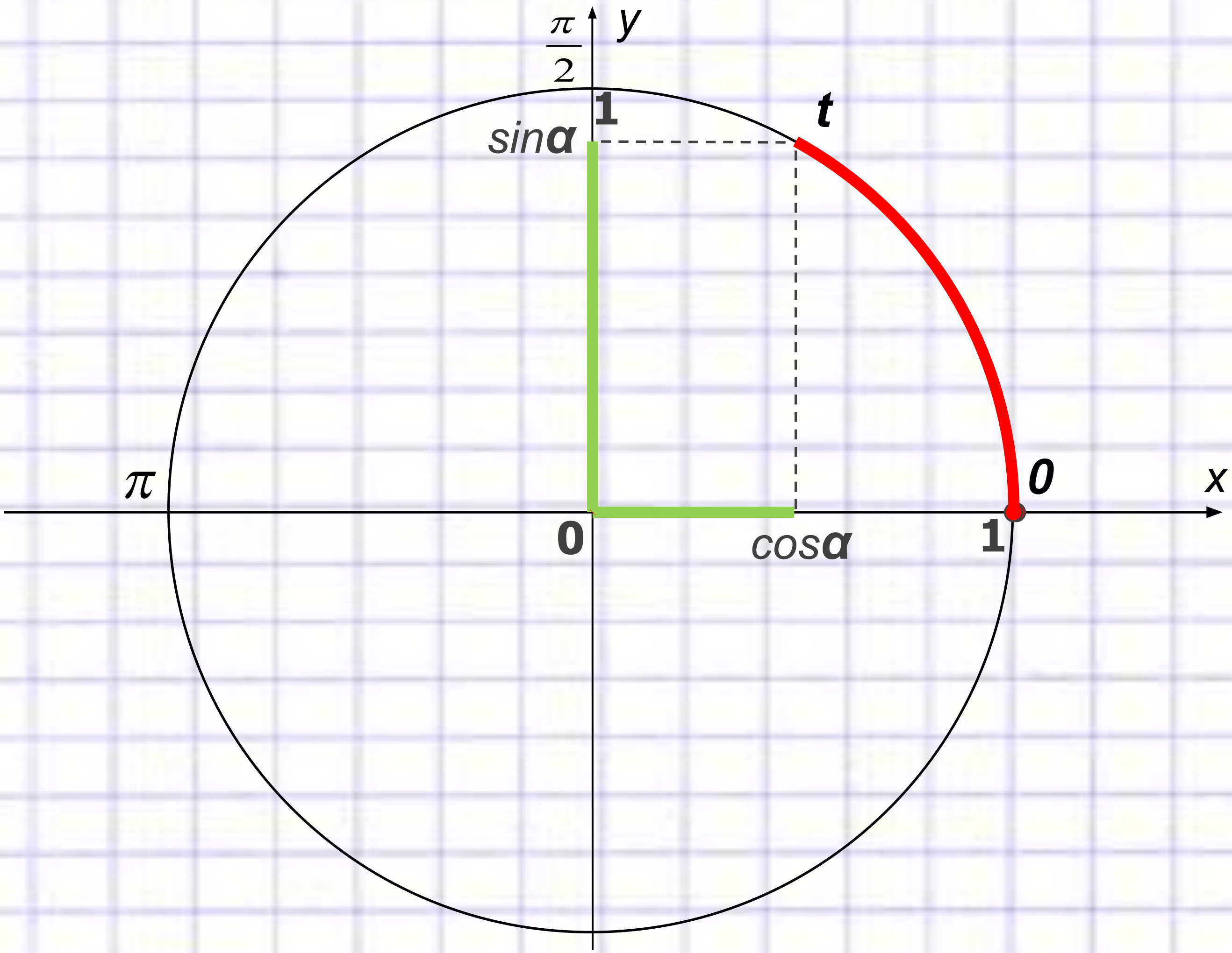
$$\overrightarrow{OC}\{x_2;\, y_2\}$$

Найдём скалярное произведение векторов ОВ и ОС.

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=x_1x_2+y_1y_2$$

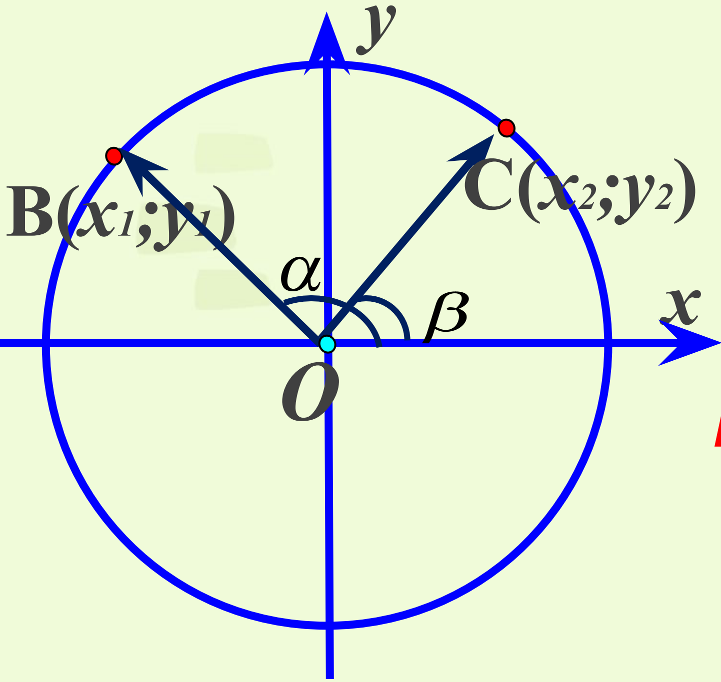
$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\left|\overrightarrow{OB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OC}\right|\cos\angle BOC=\cos\angle BOC$$

Вспомним, с чего все начиналось:



sin ***t*** - ордината точки поворота

cos ***t*** - абсцисса точки поворота



$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=x_1x_2+y_1y_2 \quad \textbf{(1)}$$

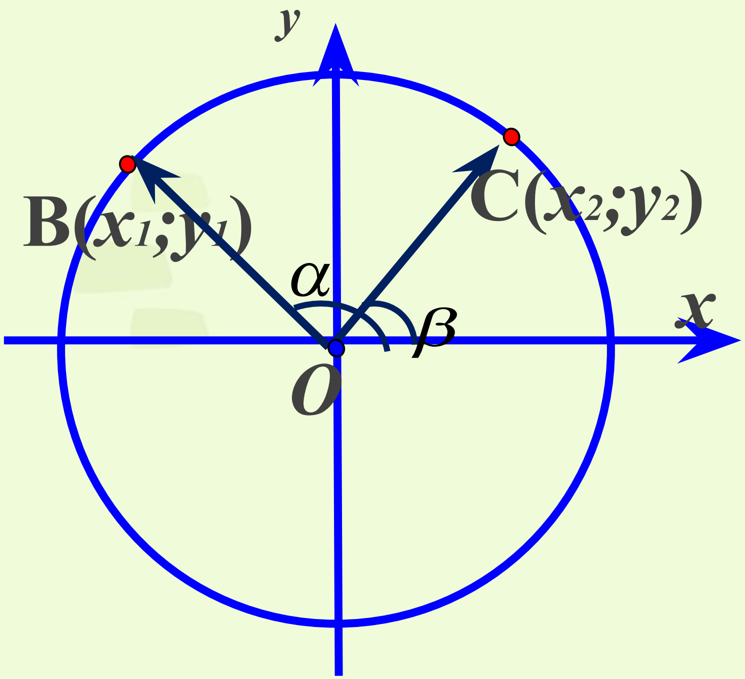
Из определения синуса и косинуса:

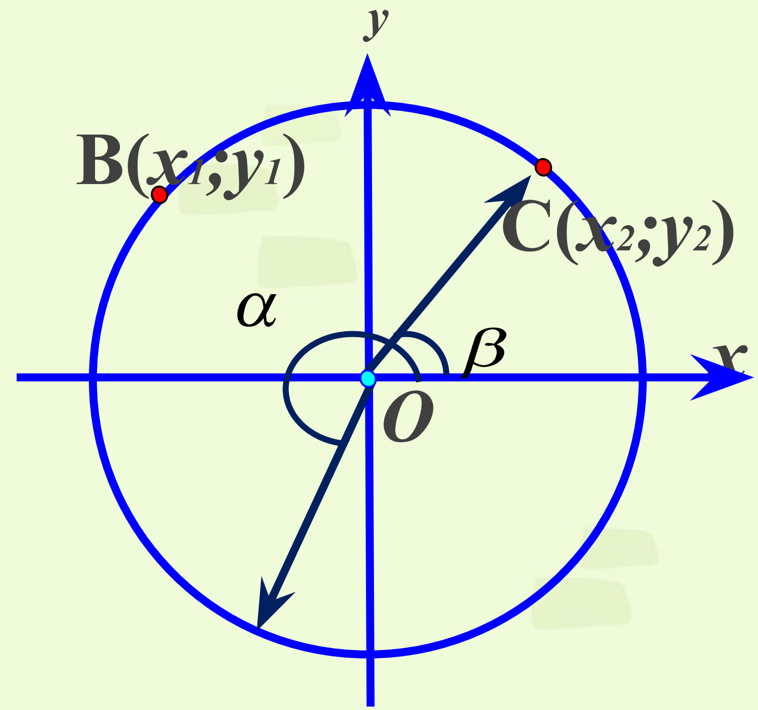
$$x_1=\cos\alpha \qquad x_2=R\cos\beta$$

$$y_1=\sin\alpha \qquad y_2=R\sin\beta$$

Подставим данные значения в правую часть равенства (1):

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$





$$\angle BOC = \alpha - \beta$$

$$\angle BOC = 2\pi - (\alpha - \beta)$$

В любом случае:

$$\cos\angle BOC = \alpha - \beta$$

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\cos(\alpha-\beta)$$

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

Левые части равенств равны, значит правые тоже равны.

Получаем формулу <u>косинуса разности двух аргументов</u>:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

Формула <u>косинуса суммы двух аргументов</u>:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

1. Вычислить: $\cos 75^0$

Воспользуемся тем, что $75^0 = 45^0 + 30^0$;

$$\cos 75^0 = \cos(45^0 + 30^0) =$$

$$\cos 45^0 \cdot \cos 30^0 - \sin 45^0 \cdot \sin 30^0 =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

2. Вычислить: $\cos 15^0$

Воспользуемся тем, что $15^0 = 45^0 - 30^0$;

$$\cos 15^0 = \cos(45^0 - 30^0) =$$

$$\cos 45^0 \cdot \cos 30^0 + \sin 45^0 \cdot \sin 30^0 =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

3. Вычислить:

1) $\cos 37^0 \cos 8^0 - \sin 37^0 \sin 8^0$;

2) $\cos 107^0 \cos 17^0 + \sin 107^0 \sin 17^0$

Ответ: 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) 0

Формулы синуса суммы и разности двух аргументов

Докажите следствие: $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha}$

$$\boxed{\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y}$$

$\cos\frac{\pi}{2}=0$

$\sin\frac{\pi}{2}=1$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=0\cdot\cos\alpha+1\cdot\sin\alpha=\sin\alpha$$

Синус суммы

$$\sin(\alpha+\beta)=?$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=$$

$$=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)$$

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$$

x

y

cos(x−y)=cosx·cosy +sinx·siny

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\beta$$

$\sin\alpha$

$\cos\alpha$

$$=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

sin(α+β)=sin α ·cosβ +cos α ·sinβ

Синус разности

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+(-\beta))=$$

$$\sin\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin(-\beta)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

Формулы сложения

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$

Тангенс суммы и разности двух углов

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$$

Котангенс суммы и разности двух углов

$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta}$$

$$ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta+1}{ctg\alpha-ctg\beta}$$

$$\frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}$$

$$\frac{1 - tg\alpha\, tg\beta}{tg\alpha + tg\beta}$$

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

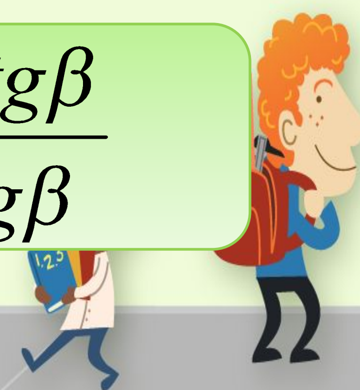
$$\cos(\alpha + \beta)$$

$$\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\, tg\beta}$$

$$\frac{1 + tg\alpha\, tg\beta}{tg\alpha - tg\beta}$$



$$\frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}$$

$$\frac{1 - tg\alpha\, tg\beta}{tg\alpha + tg\beta}$$

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

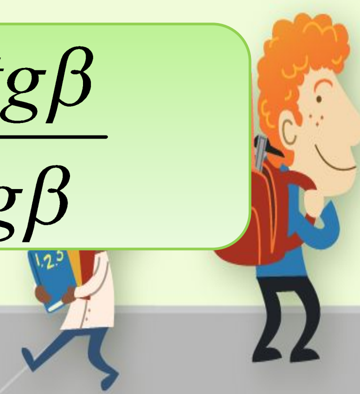
$$\sin(\alpha + \beta)$$

$$\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\, tg\beta}$$

$$\frac{1 + tg\alpha\, tg\beta}{tg\alpha - tg\beta}$$



$$\frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}$$

$$\frac{1 - tg\alpha\, tg\beta}{tg\alpha + tg\beta}$$

$$\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

$$\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

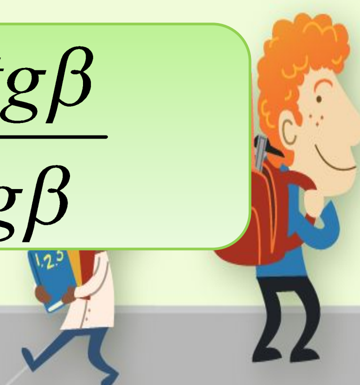
$$\cos(\alpha - \beta)$$

$$\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

$$\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$\frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\, tg\beta}$$

$$\frac{1 + tg\alpha\, tg\beta}{tg\alpha - tg\beta}$$



$$\frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}$$

$$\frac{1 - tg\alpha\, tg\beta}{tg\alpha + tg\beta}$$

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

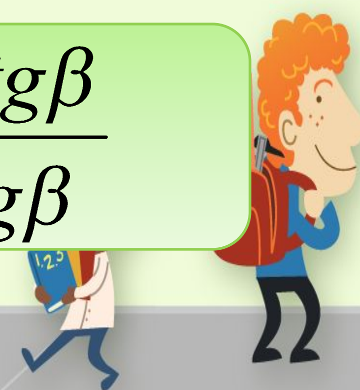
$$tg(\alpha + \beta)$$

$$\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\, tg\beta}$$

$$\frac{1 + tg\alpha\, tg\beta}{tg\alpha - tg\beta}$$



$$\frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}$$

$$\frac{1 - tg\alpha\, tg\beta}{tg\alpha + tg\beta}$$

$$\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

$$ctg(\alpha + \beta)$$

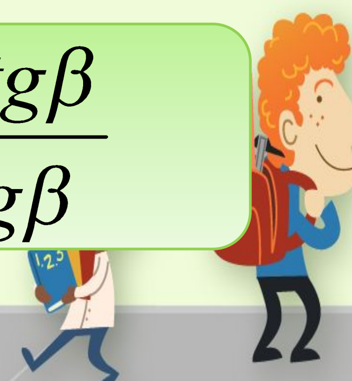
$$\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

$$\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

$$\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$\frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\, tg\beta}$$

$$\frac{1 + tg\alpha\, tg\beta}{tg\alpha - tg\beta}$$



Не бойтесь формул!

Учитесь владеть этим инструментом Человеческого гения!
В формулах заключено величие и могущество Человеческого разума!

Андрей Андреевич Марков, *выдающийся русский математик, представитель петербургской математической школы, специалист по теории чисел, теории вероятностей и математическому анализу*.