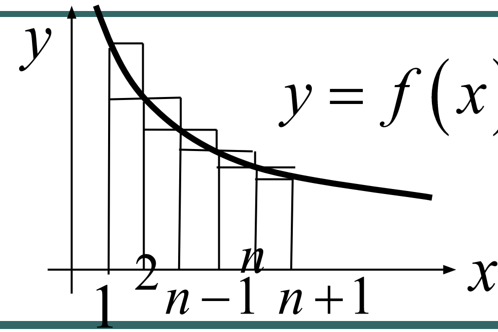
Лекция 2-16.
13.1.3.4. Интегральный признак Коши.

- **Теорема.** Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (u_n > 0)$, члены которого являются значениями непрерывной функции $f(x)$ при целых значениях аргумента x: $u_1 = f(1),\dots,u_n = f(n),\dots$ и пусть $f(x)$ монотонно убывает в интервале $[1,\infty)$. Тогда ряд сходится, если сходится несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

и расходится, если интеграл расходится.

Доказательство.



- Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную линией $y = f(x)$ с основанием от 1 до n.

Площадь ее равна $I_n = \int_1^n f(x)\,dx.$

Рассмотрим две ступенчатые фигуры:

$$f(2)+f(3)+\ldots+f(n)=S_n-u_1;\ f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1)=S_n-u_n.$$

Сравним площади $S_n-u_1<I_n<S_n-u_n. \Rightarrow S_n<I_n+u_1;\ S_n>I_n+u_n.$

Рассмотрим два варианта.

1) Интеграл сходится, т.е. $I=\lim\limits_{n\to\infty} I_n$. Тогда $I_n<I \Rightarrow S_n<u_1+I.$
   На основании леммы ряд сходится.

2) Интеграл расходится, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=\infty.$ Тогда из $S_n>u_n+I_n$
   ряд расходится.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}.$

- Применим интегральный признак Коши.

$$I=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^{\infty}=\frac{1}{1-p}\lim_{x\to\infty}\left(x^{-p+1}-1\right).$$

- 1) $p>1\quad I=\frac{1}{p-1};$ 2) $p<1\quad I=\infty;$

- 3) $p=1,\quad I=\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{x\to\infty}\ln x=\infty.$

Оценка ошибки при приближенных вычислениях суммы ряда.

$$S - S_n = r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots, \quad \forall n. \qquad r_n = \int_n^{\infty} f(x)\,dx.$$

Примеры: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p > 1. \quad r_n < \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_n^{\infty} = \frac{1}{(p-1)n^{p-1}}.$

Для заданного ε можно оценить n из условия

$$r_n < \frac{1}{(p-1)n^{p-1}} \le \varepsilon.$$

Для $p = 2, \ \varepsilon = 0,001, \ r_n < \frac{1}{n} \le 0,001, \ n = 1000.$

Данный ряд <u>медленно (плохо)</u> сходится.

- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}, \quad p = 3, \quad \varepsilon = 0,001. \qquad r_n < \frac{1}{2n^2} \le 0,001, \ n = 24.$
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \quad p = 4, \quad \varepsilon = 0,001. \qquad r_n < \frac{1}{3n^3} \le 0,001, \ n = 7.$

13.1.4. Знакопеременные ряды.

- Пример знакопеременного ряда $1+2-3-4-5+6+7-...$
- Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, если сходится

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. В этом случае ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется абсолютно сходящимся.

Сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называют условно сходящимся, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Свойства абсолютно сходящихся рядов.

- 1) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно, то возможна перестановка бесконечного множества его членов. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится условно, то при перестановке бесконечного множества его членов можно получить расходящийся ряд или изменится сумма ряда.

- 2) Абсолютно сходящиеся ряды можно почленно складывать, вычитать и умножать.

  Например $\left(a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots\right)\left(b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots\right)=$

  $=a_1b_1+\left(a_2b_1+a_1b_2\right)+\ldots+\left(a_nb_1+a_{n-1}b_2+\ldots+a_1b_n\right)+\ldots$.

  Сумма полученного ряда равна произведению сумм исходных рядов.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\alpha}{2^n}$ сходится абсолютно, т.к. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{2^n}\right|: \quad \left|\frac{\sin n\alpha}{2^n}\right|<\frac{1}{2^n}$$ сходится.

13.1.5. Знакочередующиеся ряды.

$$\pm\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n,\quad u_n \ge 0.$$

- **Теорема Лейбница.** Если в знакочередующемся ряде $u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0,$ то ряд сходится. Причем $S < u_1,\ |r_n| < u_{n+1}.$
- Доказательство. Возьмем для определенности $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n.$

Рассмотрим последовательность сумм

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Она возрастающая.

$$S_{2m+1} = u_1 - \left[(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \ldots + (u_{2m} - u_{2m+1})\right].$$

Выражение в квадратных скобках возрастающая последовательность. Следовательно последовательность S_{2m+1} убывающая.

- Тогда $S_2 < S_4 < S_6 < \ldots;\ S_1 > S_3 > S_5 > \ldots.\quad \forall m,k\ \ S_{2m} < S_{2k+1}$

т.к. если $m < k,$ то $S_{2m} < S_{2k} = S_{2k+1} - u_{2k+1} < S_{2k+1};$

если $m > k\ \left(m = k\right),$ то $S_{2m} = S_{2m+1} - u_{2m+1} < S_{2m+1} < S_{2k+1}.$

Последовательность с четными индексами возрастает и ограничена сверху. Значит существует $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S,$

т. к. $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1};\quad \lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0,$ то

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} = S.$$

Если бы перед рядом стоял минус, то картина зеркально отразится относительно точки $x = 0.$

Остаток ряда $r_n = \pm\left(u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots\right)$ удовлетворяет условиям признака Лейбница. Поэтому его сумма

$$\left|r_n\right| < u_{n+1}.$$

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}.$

- Ряд сходится по признаку Лейбница, т. к.

$u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots$ $\quad$ $\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

Но ряд сходится плохо, т. к.

$$|r_n| < \frac{1}{n}.$$

13.2. Функциональные ряды. 13.2.1. Общие определения.

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$

- Такие ряды называют функциональными. Предполагается, что $u_n(x)$ определены и непрерывны. Для одних значений x ряд может сходится, для других – расходиться. При значении $x=x_0$ получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$. Если он сходится, то точка $x=x_0$ называется точкой сходимости функционального ряда. Совокупность всех точек сходимости называется областью сходимости функционального ряда. Область сходимости – интервал оси Ox.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$. Ряд сходится в области $x \in (-1,1)$.

При $|x| \geq 1$ ряд расходится.

- Сумма ряда $S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ есть функция независимой переменной x. В примере

$$S(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Эта функция есть сумма только при $x \in (-1,1)$.

- Частичная сумма n первых членов ряда обозначается $S_n(x)$; остаток ряда - $r_n(x)$. Если ряд сходится при каком-либо x, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x), \quad \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$$

- При конечном числе функций интеграл или производная от суммы равна сумме интегралов или производных. Для ряда этого может и не иметь место.