

Математика

Часть 2

УГТУ-УПИ

2007 г.

Лекция 3

Комплексные числа

1. Основные понятия.

2. Операции над комплексными числами.

1. Основные понятия.

Комплексные числа - это числа вида $z = x + iy$,

где x и y – действительные числа, а i - мнимая единица,

определяемая так: $i^2 = -1$ ($i = \sqrt{-1}$).

x — реальная часть Z , y — мнимая часть Z .

Обозначения: $x = \operatorname{Re} z$

$$y = \operatorname{Im} z$$

Для комплексных чисел используют также обозначение:

$$z = (x, y).$$

Числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называются *равными*, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Комплексным нулем называется число $z = (0, 0)$.

Число $z = (x, 0)$ называется *действительным* и обозначается $(x, 0) = x$.

Число $z = (0, y)$ называется *мнимым*, $(0, y) = iy$.

Число $z = (0, 1)$ - мнимая единица :

$$i = (0, 1)$$

$z = x + iy$ — это алгебраическая форма записи комплексного числа.

2. Операции над комплексными числами .

Рассмотрим комплексные числа в алгебраической форме:

$$z_1 = x_1 + iy_1; \quad z_2 = x_2 + iy_2;$$

I. Сложение.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

II. Умножение.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = \\ &= (x_1x_2 + i^2y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1); \end{aligned}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Число $z^* = (x, -y)$ называется *сопряженным* к числу $z = (x, y)$.

Вычислим

$$1) z + z^* = (x + iy) + (x - iy) = 2x;$$

$$z + z^* = 2x$$

$$2) z \cdot z^* = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2;$$

$$z \cdot z^* = x^2 + y^2$$

III. Вычитание (обратное сложению).

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

IV. Деление (обратное умножению).

$$z = \frac{z_1}{z_2}$$

Чтобы выполнить деление, надо домножить числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*}$$

В результате получим:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Пользуясь алгебраической формой комплексного числа, можно производить операции сложения, умножения и вычитания по обычным правилам для многочленов.

При делении комплексных чисел надо числитель и знаменатель домножить на сопряженное знаменателю число.

Пример. $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 1 + 2i$;

Выполнить действия I-IV.

Решение.

$$1) z_1 + z_2 = 2 + 3i + 1 + 2i = 3 + i5;$$

$$2) z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i) \cdot (1 + 2i) = -4 + i7;$$

$$3) z_1 - z_2 = 2 + 3i - 1 - 2i = 1 + i;$$

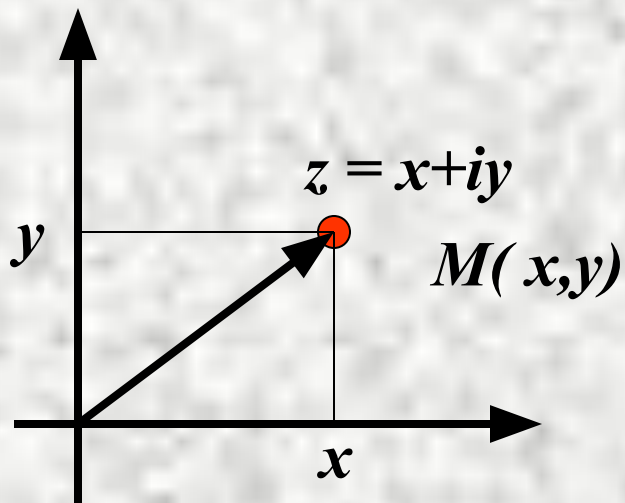
$$4) \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(2 + 3i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} =$$

$$= \frac{2 - 4i + 3i - 6i^2}{1 + 4} = \frac{8 - i}{5} = \frac{8}{5} - i \frac{1}{5}$$

Изображение комплексных чисел на плоскости.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа будем называть *комплексной*, ось абсцисс – *действительной осью*, ось ординат – *мнимой осью*.

Комплексное число $z = (x, y)$ однозначно определяется двумя числами x и y , следовательно, его можно изобразить точкой на плоскости с координатами x и y .

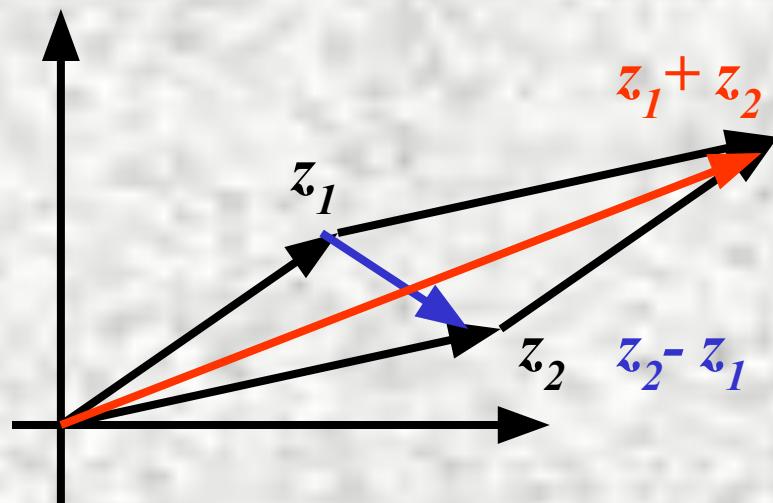


Существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех комплексных чисел $z = (x, y)$ и множеством точек $M(x, y)$ комплексной плоскости, а также между множеством радиус-векторов с координатами (x, y) .

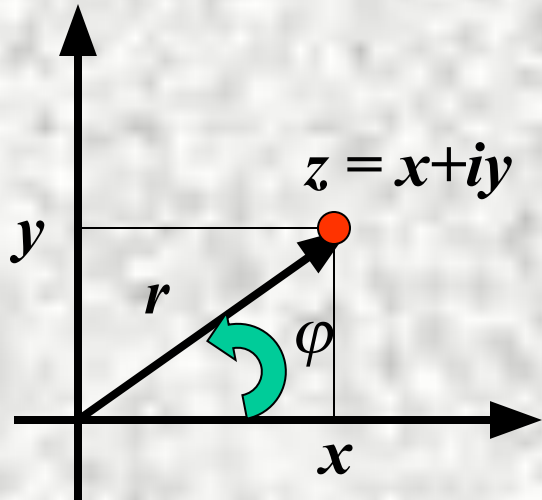
Операции сложения и вычитания можно выполнять *в векторной форме*.

Замечание.

Множество комплексных чисел не поддается упорядочению.



Тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа.



$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad r \geq 0$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$

Таким образом,

$$z = r \cos \varphi + ir \sin \varphi$$

или

$$(T) \quad z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \text{—}$$

тригонометрическая форма записи комплексного числа

Число r называется *модулем*, а число φ *аргументом* комплексного числа z .

Обозначения.

$$|z| = r$$

$$\arg z = \varphi$$

Формула Эйлера

Запишем формулы Маклорена для функций $\cos \varphi$, $\sin \varphi$.

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots$$

+

$$i \sin \varphi = i \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots \right)$$

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$$

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i\frac{\varphi^5}{5!} - \dots$$

С учётом: $i^2 = -1; i^3 = i \cdot i^2 = -i; i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1;$
 $i^5 = i \cdot i^4 = i; \dots$



$$\cos \varphi + i \sin \varphi = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \dots$$

Запишем формулу Маклорена для функции e^x ,
где $x = i\varphi$:

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \dots$$

Из равенства правых частей следует:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad \text{— формула Эйлера.}$$

По формуле Эйлера из (Т) следует

$$(II) \quad z = r e^{i\varphi} \quad \text{— показательная форма записи } z.$$

Обозначения.

$$|z| = r$$
$$\arg z = \varphi$$

Следствия.

Комбинируя

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

$$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = \cos \varphi - i \sin \varphi,$$

получим

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Пример. $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

Записать это число в трёх формах, дать геометрическую интерпретацию.

Решение.

(А)

$$z = \sqrt{2} - i\sqrt{2};$$

$$x = \sqrt{2}; y = -\sqrt{2};$$

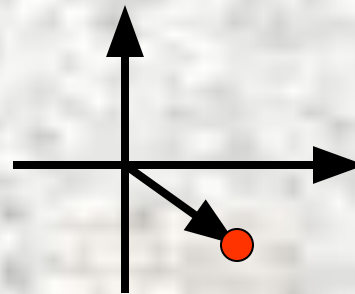
$$|z| = \sqrt{2 + 2} = 2; \operatorname{tg} \varphi = -1; \varphi = -\frac{\pi}{4};$$

(Т)

$$z = 2\left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

(П)

$$z = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$$



Операции над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах.

Рассмотрим

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1); z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2);$$

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}; z_2 = r_2 e^{i\varphi_2};$$

Умножение:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Деление:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Возведение в целую степень:

$$z = r e^{i\varphi}$$

$$z^n = r^n e^{in\varphi}$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Так как $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

$$e^{in\varphi} = (e^{i\varphi})^n = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n$$

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

формула Муавра.

Извлечение корня

(обратное возведению в степень):

$$z = r e^{i\varphi} = r e^{i(\varphi + 2\pi k)}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$$

Здесь k может принимать все возможные целые значения, но **различных** (неодинаковых) корней будет только n и они будут соответствовать числам $k=0,1,2,3,\dots,(n-1)$:

$$z_0 = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi}{n}}; (k = 0)$$

$$z_1 = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)}; (k = 1)$$

$$z_2 = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot 2\right)}; (k = 2)$$

u m.d.

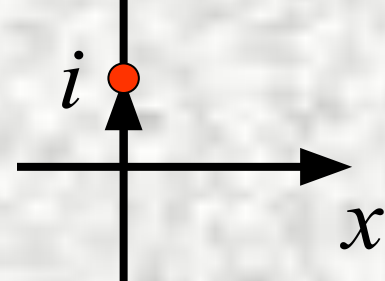
Замечание.

Числа z_0, z_1, \dots, z_{n-1} имеют *одинаковый модуль* $\sqrt[n]{r}$

 ИМ СООТВЕТСТВУЮТ *точки на окружности*
радиуса $\sqrt[n]{r}$.

Пример. $\sqrt[4]{i} = ?$

Решение.

Обозначим $z = \sqrt[4]{i}$;  $i = e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)}$

$$z = \sqrt[4]{e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)}}, k = 0, 1, 2, 3.$$

Различных значений - *четыре*:

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}/4} = e^{i\frac{\pi}{8}}; \quad z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right)};$$

$$z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right)}; \quad z_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \cdot 3\right)};$$

