

§3. Многочлены и рациональные функции

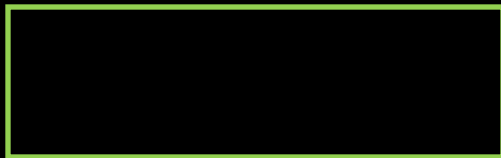
п.1. Многочлены.

Рассмотрим уравнения:



— линейное уравнение

— многочлен 1-й степени



— квадратное уравнение

— многочлен 2-й степени

— кубическое уравнение

— многочлен 3-й степени

Пример 1.

Формулы Кардано для решение кубических уравнений.

Метод Феррари для решение уравнений 4-й степени.

Общее уравнение степени не ниже 5 не разрешимо в радикалах.

Выражение вида

где a_0, a_1, \dots, a_n называются
многочленом n -й степени.

Обозначается:

Число α называется **корнем** многочлена
если

Теорема 1 (о делении с остатком).

Пусть

— некоторые многочлены;

Тогда существуют многочлены Q и R такие, что

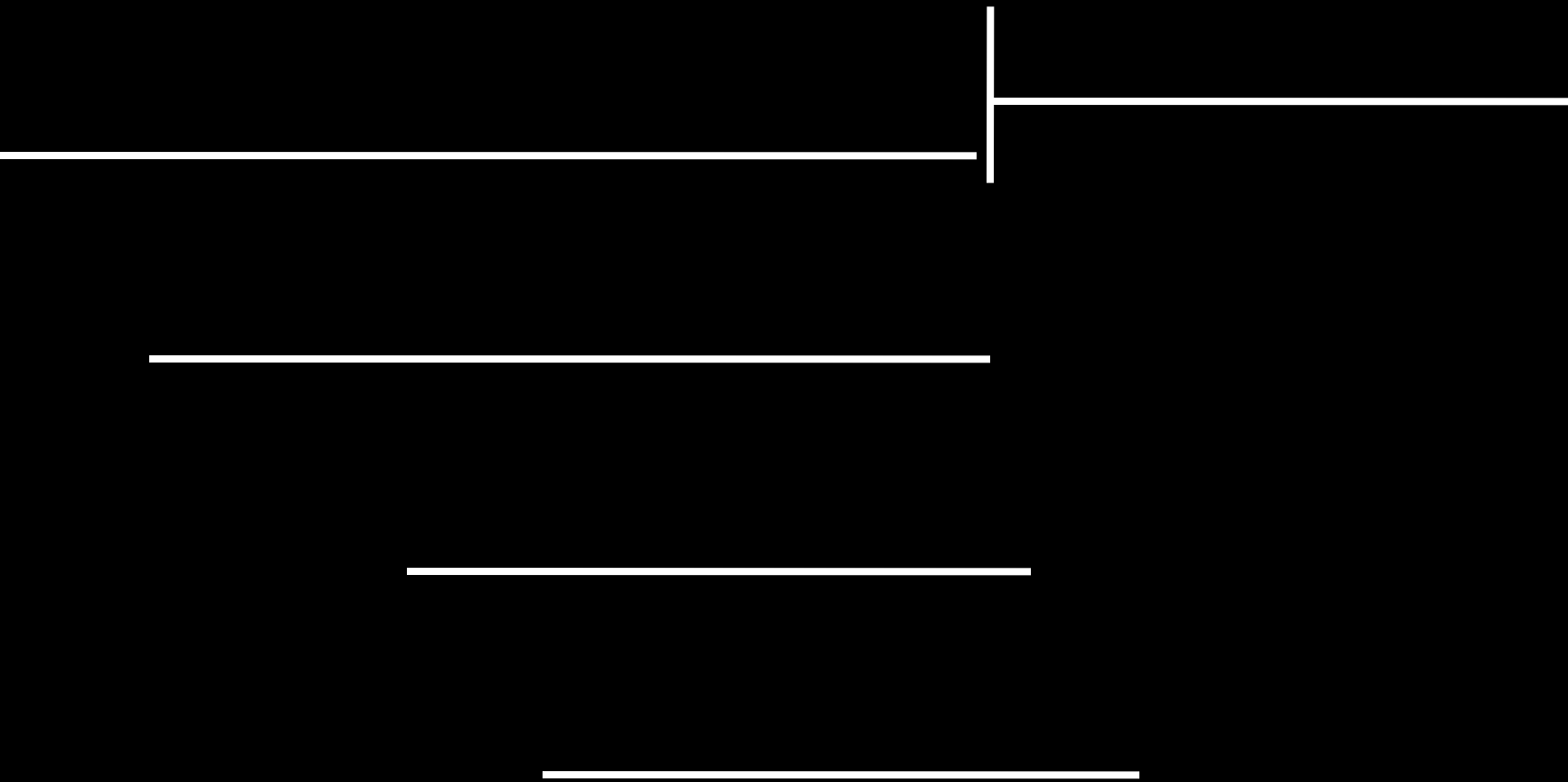
причем степень многочлена R меньше степени многочлена P

Пример 2.

Найти

Решение.

Разделим в столбик.



Значит,

Теорема 2 (Безу).

Остаток от деления многочлена на
двучлен равен значению при

Пример.

Доказательство.

Пусть r — остаток от деления $P(x)$ на $Q(x)$

По теореме 1 степень многочлена r меньше степени многочлена $Q(x)$, т.е. равна 0

Значит, r — число, т.е.

По теореме 1

Положим

Следствие.

Число a является корнем многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда остаток от деления $P(x)$ на $(x - a)$ равен нулю.

Доказательство.

Необходимость.

Пусть a — корень многочлена $P(x)$, т.е.

Тогда по теореме 2, остаток равен

Достаточность.

Если $R(x) = 0$, то по теореме 2

т.е. a — корень многочлена $P(x)$.

Таким образом, если известен один из корней уравнения

то степень уравнения можно понизить на 1, разделив на

Пример. Решить уравнение

Решение. Очевидно, $x = 1$ — корень уравнения.

Разделив на $(x - 1)$ получим

Значит,

Схема Горнера

Деление многочлена на двучлен, удобно выполнять по следующей схеме.

Пусть в результате деления многочлена

на двучлен $ax + b$ в частном получается
многочлен $cx + d$

и в остатке r .

Тогда

Пример. Разделить
на

3	1	1	-6	-14	-11	-3
	1	4	6	4	1	0

Значит,

Теорема 3 (основная теоремы алгебры).

Всякий многочлен n -й степени () имеет по крайней мере один корень (действительный или комплексный).

Если многочлен делится на , то число называется **корнем кратности k** этого многочлена.

Пусть — многочлен с действительными коэффициентами.

Если

то и

Следствие (основной теоремы алгебры).

Всякий многочлен n -й степени () имеет равно n корней (действительных или комплексных) с учетом их кратности.

Всякий многочлен с действительными коэффициентами n -й степени разлагается на линейные и квадратные множители с действительными коэффициентами, т.е.

где

и

Рациональные корни многочлена

Теорема 4.

Пусть

где

Если несократимая дробь

является корнем этого многочлена, то

p — делитель

q — делитель

Доказательство.

По условию теоремы

т.е.

|

Тогда

(1)

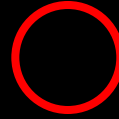
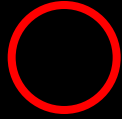
(2)

Правая часть равенства (1) делится на q ,

Так как дробь является несократимой, то p не делится на q ,

Аналогично, с помощью равенства (2) показывается, что делится на p .

Пример. Решить уравнение



Решение.

Возможные корни:

Проверим с помощью схемы Горнера, какие из этих чисел являются корнями уравнения.

	2	-3	-11	6	
1	2	-1	-12		— не корень
-1	2	-5	-6		— не корень
2	2	1	-7		— не корень
-2	2	-7	3	0	

Значит, -2 — корень уравнения.

Остальные корни можно найти из уравнения

п.2. Рациональные функции.

Рациональной функцией называется отношение двух многочленов.

- правильная рациональная дробь;
- неправильная рациональная дробь.

Пример.

Всякую неправильную рациональную дробь путем деления можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Пример.

(см. пример 2)

Простейшие рациональные дроби

I.

II.

III.

IV.

Теорема 5.

Всякую правильную рациональную дробь

знаменатель которой разложен на множители

можно представить (и притом единственным образом) в виде суммы простейших дробей.

Множителю вида
 k простейших дробей

соответствует сумма

Множителю вида

соответствует сумма s простейших дробей

Пример. Разложить в сумму простейших дробей

Решение.

Метод неопределенных коэффициентов

Пример. Разложить в сумму простейших дробей

Решение.

Приравняем конечный и исходный числитель,
раскрыв скобки:

Выпишем слагаемые с

Получаем уравнение:

Выпишем слагаемые с x :

Получаем уравнение:

Выпишем слагаемые без x :

Осталось решить систему:

Поэтому,

Метод отдельных значений аргумента

Пример. Разложить в сумму простейших дробей

Решение.

Приравняем конечный и исходный числитель:

Положим

Положим

Положим

Поэтому,