# Теорема о параллельных осях

Существуют две простые теоремы, которые помогают при вычислении моментов инерции. Первая из них называется *теоремой о параллельном переносе оси вращения* (теоремой о параллельных осях). Она утверждает, что если $I$ – момент инерции тела массой $M$ относительно некоторой оси вращения, а $I_{\text{цм}}$ – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной первой оси, отстоящей от нее на расстояние $h$, то[1)]

$$I = I_{\text{цм}} + Mh^2 . \tag{9.15}$$

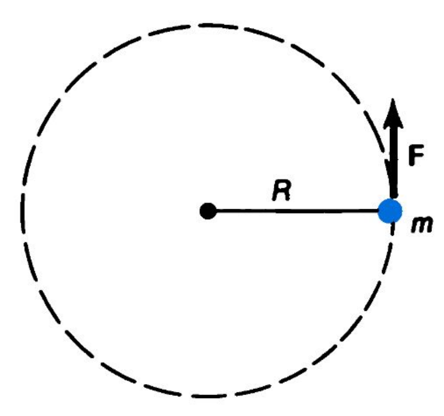
# Теорема о перпендикулярных осях

Теорема о параллельном переносе осей может быть применена к любому телу. Другая теорема – *теорема о перпендикулярных осях* – может быть применена лишь к плоским фигурам, т. е. к двумерным телам, или телам постоянной толщины, которой можно пренебречь по сравнению с другими размерами. Согласно этой теореме, сумма моментов инерции плоского тела относительно любой пары взаимно перпендикулярных осей в плоскости этого тела равна моменту инерции относительно оси, проходящей через точку пересечения перпендикулярно плоскости тела. Точнее говоря, если тело расположено в плоскости $xy$, то

$$I_z = I_x + I_y \qquad \text{[тело в плоскости } xy\text{]}. \qquad (9.16)$$

# Момент инерции

Частица с массой **m** вращается по окружности **R** $F = ma = mR\alpha.$




Умножим обе части уравнения на **R**

$$RF = \boxed{mR^2}\alpha$$

**момент инерции** – мера инертности частицы во вращательном

Рассмотрим вращающееся твердое тело как совокупность множества частиц, расположенных на разных расстояниях от оси вращения.

Так как угловое ускорение одинаково, то $(\sum m_i R_i^2)\alpha$

Полный момент сил = сумме моментов внешних сил.

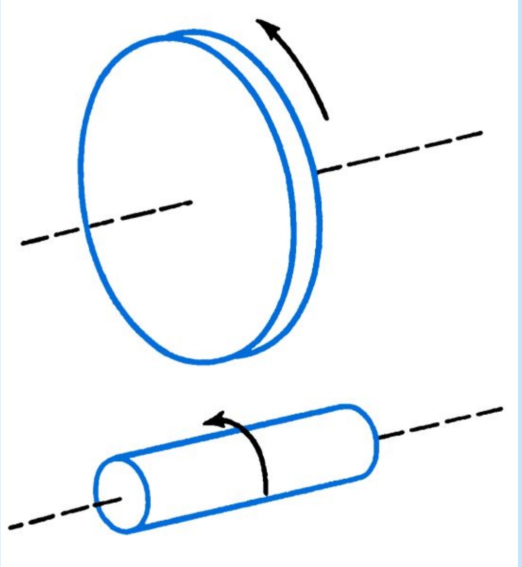
Сумма $\sum m_i R_i^2 = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + \ldots + m_n R_n^2 = I$

называется **моментом инерции** тела.

Вращательный эквивалент второго закона Ньютона

$$\boxed{T = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha.}$$

[неподвижная ось].



момент инерции зависит не только от массы тела, но и от того, как эта масса распределена.

Вращение абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси

$$\boxed{\tau_{ЦМ} = I_{ЦМ}\,\alpha_{ЦМ}}$$

# Пример вычисления момента инерции

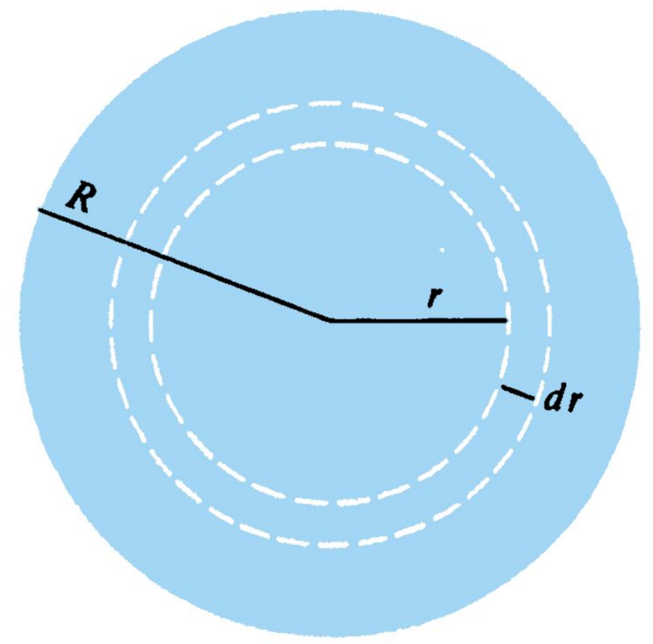
В случае непрерывного распределения масс

$$I \equiv \sum r_j^2 \Delta m_j \quad \longrightarrow \quad I \equiv \int r^2\, dm \quad (\textit{момент инерции}).$$

Вычислим момент инерции диска радиуса **R** и массой **M**

Площадь кольца, заключенного между ***r*** и ***r+dr***

$$dA = 2\pi r\, dr.$$



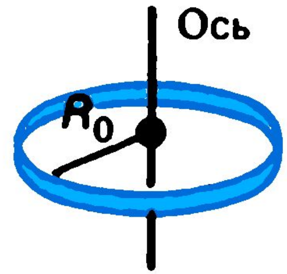
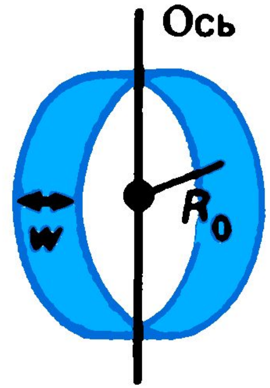
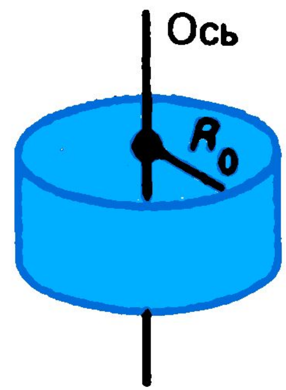

Следовательно:

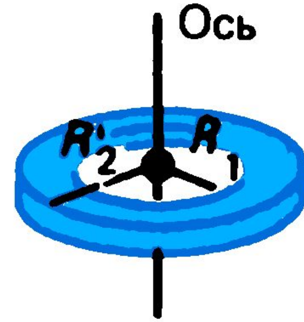
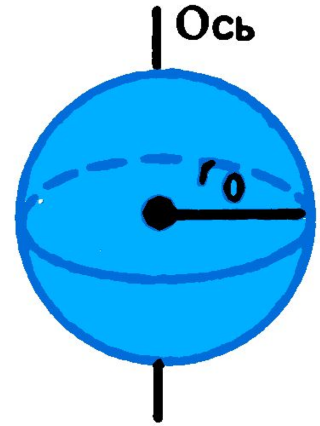
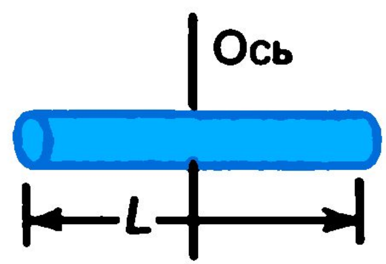
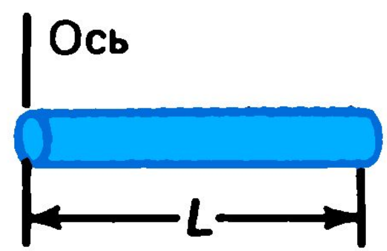
$$\frac{dm}{M} = \frac{dA}{A} = \frac{2\pi r\, dr}{\pi R^2}, \qquad dm = M\frac{2r\, dr}{R^2}$$

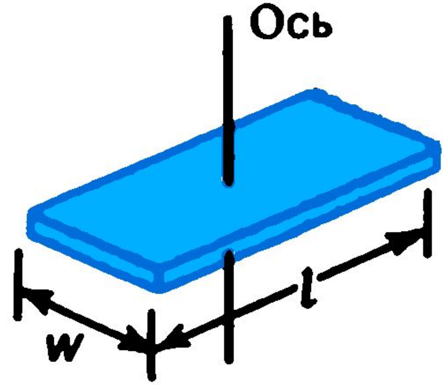
**Вычислим теперь момент инерции диска:**

$$I_{\text{дис}} = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 \left(\frac{2Mrdr}{R^2}\right) = \frac{2M}{R^2}\int_0^R r^3 dr =$$

$$= \frac{2M}{R^2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = (1/2)\, MR^2.$$

| Тело | Положение оси вращения | | Момент инерции | Радиус инерции |
|---|---|---|---|---|
| а) Тонкое кольцо радиусом $R_0$ | Через центр |  | $MR_0^2$ | $R_0$ |
| б) Тонкое кольцо радиусом $R_0$ и шириной $w$ | По диаметру |  | $\frac{1}{2}MR_0^2+\frac{1}{12}Mw^2$ | $\sqrt{\frac{R_0^2}{2}+\frac{w^2}{12}}$ |
| в) Твердый цилиндр радиусом $R_0$ | Через центр |  | $\frac{1}{2}MR_0^2$ | $\frac{R_0}{\sqrt{2}}$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| г) Полый цилиндр с внутренним радиусом $R_1$ и внешним радиусом $R_2$ | Через центр |   | $\frac{1}{2}M(R_1^2+R_2^2)$ | $\sqrt{\frac{R_1^2+R_2^2}{2}}$ |
| д) Твердая сфера радиусом $r_0$ | Через центр |   | $\frac{2}{5}Mr_0^2$ | $\sqrt{\frac{2}{5}}\, r_0$ |
| е) Тонкий стержень длиной $L$ | Через центр |   | $\frac{1}{12}ML^2$ | $\frac{L}{\sqrt{12}}$ |
| ж) Тонкий стержень длиной $L$ | Через конец |   | $\frac{1}{3}ML^2$ | $\frac{L}{\sqrt{3}}$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| з) Тонкая прямоугольная пластинка длиной $l$ и шириной $w$ | Через центр |   | $\frac{1}{12}M(l^2+w^2)$ | $\sqrt{\frac{l^2+w^2}{12}}$ |

| **Поступательное движение**<br>$x(t) = x_0 + v_0 t + a t^2/2$ | **Вращательное движение**<br>$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \alpha t^2/2$ |
|---|---|
| Скорость $\boldsymbol{v}$ | Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ |
| Масса **m** | Момент инерции **I** |
| Импульс $\mathbf{p} = \mathbf{m}\boldsymbol{v}$ | Момент импульса $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$ |
| Сила **F** | Момент силы $\boldsymbol{\tau}$ |
| Ускорение $\boldsymbol{a}$<br>$\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v}/d\mathbf{t}$ | Угловое ускорение $\boldsymbol{\alpha}$<br>$\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/d\mathbf{t}$ |
| **2-й закон Ньютона**<br>$\mathbf{F} = \mathbf{ma}$<br>$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/d\mathbf{t}$ | $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{I}\boldsymbol{\alpha}$<br>$\mathbf{F} = d\mathbf{L}/d\mathbf{t}$ |
| **Работа**<br>$\mathbf{A} = \mathbf{F}l$ | $\mathbf{A} = \boldsymbol{\tau\varphi}$ |
| **Кинетическая энергия**<br>$\mathbf{m}v^2/2$ | $\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^2/2$ |

радиусов перпендикулярн

**1.135.** Определить момент инерции $J$ тонкого однородного стержня длиной $l = 50$ см и массой $m = 360$ г относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через: 1) конец стержня; 2) точку, отстоящую от конца стержня на $^1/_6$ его длины. [1) $3 \cdot 10^{-2}$ кг·м$^2$; 2) $1{,}75 \cdot 10^{-2}$ кг·м$^2$]

Т

**1.143** Сплошной однородный диск скатывается без скольжения по наклонной плоскости, образующей угол $\alpha$ с горизонтом. Определить линейное ускорение $a$ центра диска. [$a = {}^2/_3 g \sin\alpha$]

Т

Ч

**3.17.** Найти момент инерции $J$ плоской однородной прямоугольной пластины массой $m$=800 г относительно оси, совпадающей с одной из ее сторон, если длина $a$ другой стороны равна 40 см.

Ч

**3.22.** На горизонтальную ось насажены маховик и легкий шкив радиусом $R$=5 см. На шкив намотан шнур, к которому привязан груз массой $m$=0,4 кг. Опускаясь равноускоренно, груз прошел путь $s$=1,8 м за время $t$=3 с. Определить момент инерции $J$ маховика. Массу шкива считать пренебрежимо малой.

Ч

**3.24.** На цилиндр намотана тонкая гибкая нерастяжимая лента, массой которой по сравнению с массой цилиндра можно пренебречь. Свободный конец ленты прикрепили к кронштейну и предоставили цилиндру опускаться под действием силы тяжести. Определить линейное ускорение $a$ оси цилиндра, если цилиндр: 1) сплошной; 2) полый тонкостенный.

Ч

**3.28.** Шар массой $m=10$ кг и радиусом $R=20$ см вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Уравнение вращения шара имеет вид $\varphi=A+Bt^2+Ct^3$, где $B=4$ рад/с², $C=-1$ рад/с³. Найти закон изменения момента сил, действующих на шар. Определить момент сил $M$ в момент времени $t=2$ с.

И

**1.270.** Однородный диск радиуса $R$ раскрутили до угловой скорости $\omega$ и осторожно положили на горизонтальную поверхность. Сколько времени диск будет вращаться на поверхности, если коэффициент трения равен $k$?

Ч

**3.13.** Найти момент инерции $J$ тонкого однородного кольца радиусом $R=20$ см и массой $m=100$ г относительно оси, лежащей в плоскости кольца и проходящей через его центр.

# Домашнее задание

**2.71.** При выстреле из орудия снаряд массой $m_1=10$ кг получает кинетическую энергию $T_1=1{,}8$ МДж. Определить кинетическую энергию $T_2$ ствола орудия вследствие отдачи, если масса $m_2$ ствола орудия равна 600 кг.

**2.19.** На горизонтальной поверхности находится брусок массой $m_1=2$ кг. Коэффициент трения $f_1$ бруска о поверхность равен 0,2. На бруске находится другой брусок массой $m_2=8$ кг. Коэффициент трения $f_2$ верхнего бруска о нижний равен 0,3. К верхнему бруску приложена сила $F$. Определить: 1) значение силы $F_1$, при котором начнется совместное скольжение брусков по поверхности; 2) значение силы $F_2$, при котором верхний брусок начнет проскальзывать относительно нижнего.

**Т** **1.140, 1.144**

**Ч** **3.7, 3.13, 3.23, 3.25, 3.27**