Линейная алгебра

- Ранг матрицы
- Метод Гаусса решения систем линейных уравнений
- Исследование систем линейных уравнений

Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу размерностью *(m x n)*.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Выделим в этой матрице произвольное число *k* строк и *k* столбцов. Элементы матрицы *A*, стоящие на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют определитель *k* - ого порядка.

Минором *k*-того порядка матрицы *A* называют определитель, полученный из *A* выделением произвольных *k* строк и *k* столбцов и обозначается M_k

порядок минора матрицы

Таких миноров матрицы *A* размера *(m x n)* можно

составить $C_m^k \cdot C_n^k$ штук, где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ -

число сочетаний из *n* элементов по *k* .

Рангом матрицы называется наибольший порядок отличного от нуля минора этой матрицы и обозначается *r*, *r*(A), *rang A*, *rg A*, *Rg A*.

Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется ***базисным***. У матрицы может быть несколько базисных миноров.

Строки и столбцы, на пересечении которых стоят элементы базисного минора, называются ***базисными***.

Ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Матрица A имеет 4 минора 3 - его порядка, например:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -20$$

18 миноров 2 - го порядка, например:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

12 миноров 1 - го порядка – сами элементы.

Наибольший порядок отличного от нуля минора этой матрицы равен 3, поэтому: $r(A) = 3$

Свойства ранга матрицы

- При транспонировании матрицы её ранг не меняется.
- Если вычеркнуть из матрицы нулевую строку(столбец), то ранг матрицы не изменится
- Ранг матрицы не изменится при элементарных преобразованиях и равен количеству ненулевых строк в ступенчатой матрице.
- Ранг канонической матрицы равен числу единиц на главной диагонали.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \overset{I+III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 10 & 8 \end{pmatrix} \overset{II\times(-2)+III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$r(A) = 2$$

Методы вычисления ранга матрицы

1. Метод элементарных преобразований (метод Гаусса).

2. Метод окаймляющих миноров.

Минор M_{k+1} порядка (*k*+1), который в себе содержит

минор M_k порядка *k* называется ***окаймляющим***

минором.

Пример:

Вычислить ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 4 \\ 7 & -6 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Решение:

1. Выберем минор второго порядка, находящийся в верхнем левом углу,

$$M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

Вывод: минор второго порядка не равен нулю, следовательно ранг не менее двух.

2. Составляем миноры третьего порядка, окаймляющие отличный от нуля минор второго порядка. Для этого добавим к M_{12}^{12} третью строку и третий столбец.

$$M_{123}^{123}=\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ -1 & -2 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 3 & -2 & -2\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{5}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-(-6+6)=0$$

$$M_{123}^{124}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ -1 & -2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7 & -2 & 3\\ 0 & 0 & -1\\ 7 & -2 & 4\end{vmatrix}=-1\cdot(-1)^{5}\begin{vmatrix}7 & -2\\ 7 & -2\end{vmatrix}=0$$

$$M_{124}^{123}=\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ 7 & -6 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 9 & -6 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{5}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 9 & -6\end{vmatrix}=0$$

$$M_{124}^{124}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 0 & -1\\ 7 & -6 & 7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7 & -2 & 3\\ 0 & 0 & -1\\ 21 & -6 & 7\end{vmatrix}=-1\cdot(-1)^5\begin{vmatrix}7 & -2\\ 21 & -6\end{vmatrix}=0$$

Все миноры третьего порядка, окаймляющие минор второго порядка, равны нулю. А это значит, что *rang A*=2.

$S_1, S_2, \dots, S_k$ – строки (столбцы) матрицы A

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – некоторые числа

Выражение вида $\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \dots + \alpha_k S_k$ называется ***линейной комбинацией***

Строки (столбцы) $S_1, S_2, \dots, S_k$ называют ***линейно зависимыми***, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, не все равные нулю одновременно, такие, что линейная комбинация $\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \dots + \alpha_k S_k = 0$ (нулевой матрице).

Если же равенство $\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \dots + \alpha_k S_k = 0$ возможно только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$, то строки (столбцы) $S_1, S_2, \dots, S_k$ называют ***линейно независимыми.***

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{matrix}$$

$$2S_1 + S_2 - S_4 = (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0) = \mathbf{O}$$

S_1, S_2, S_4 – линейно зависимы

Лемма (*о линейной зависимости*). Строки (столбцы) $S_1, S_2, \ldots, S_k$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы одна из них является линейной комбинацией других.

Теорема (*о базисном миноре*). **1.** Базисные строки (столбцы) матрицы линейно независимы.
2. Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).

Следствие (*критерий равенства нулю определителя*). Определитель матрицы **A** равен нулю тогда и только тогда, когда его строки (столбцы) линейно зависимы.

Линейным уравнением называется выражение вида

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ – числа.

$a_1, a_2, \dots, a_n$ – ***коэффициенты*** уравнения

b – ***свободный член***

Если $b = 0$, то уравнение называют ***однородным***.

Если $b \neq 0$, то уравнение называют ***неоднородным***.

Системой *m* линейных уравнений с *n* неизвестными, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (*)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

\- основная матрица

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

\- столбец из неизвестных

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

\- столбец из свободных членов

$$\bar{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

-расширенная матрица

Тогда система принимает вид:

AX = B

Т.е.система в матричном виде примет вид : $A \cdot X = B$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ . & . & . \quad .... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Если закрепить раз и навсегда нумерацию неизвестных, то можно опустить неизвестные в записи системы и записать ее в виде матрицы, отделяя столбец свободных членов вертикальной чертой.

$$\tilde{B} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} & & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} & & b_2 \\ . & . & . \quad .... & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots a_{mn} & & b_m \end{array}\right)$$

Расширенная матрица системы

Упорядоченный набор чисел c_1, c_2, …, c_n называется ***решением*** системы (*), если он обращает в тождество каждое уравнение системы.

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$ – решение системы

Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если она не имеет ни одного решения.

Система уравнений называется ***определенной***, если она имеет единственное решение, и ***неопределенной***, если она имеет более одного решения.

Решить СЛАУ – значит решить две задачи:
- выяснить, имеет ли СЛАУ решения;
- найти все решения, если они существуют.

Определить совместность и определенность.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3; \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 3; \\ x_1 + x_2 = 4. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 3; \\ 2x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$$

совместная и определенная несовместная совместная и неопределенная

Если столбец свободных членов равен нулевой матрице, то система называется ***однородной***, в противном случаи она является ***неоднородной***.

Системы называются ***равносильными*** (***эквива-лентными***), если каждое решение одной системы является решением другой, и наоборот.

Исследование систем линейных уравнений

Теорема Кронекера - Капелли.

Для того, чтобы система линейных алгебраических уравнений была ***совместна*** (имела решение), необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы системы равнялся рангу матрицы коэффициентов: $r(\tilde{B}) = r(A)$

Если $r(\tilde{B}) = r(A) = n$ (числу неизвестных), то система ***совместна и определенна*** (имеет единственное решение).

Если $r(\tilde{B}) = r(A) < n$,то система ***совместна и неопределенна*** (имеет бесконечное множество решений).

Если $r(\tilde{B}) \neq r(A)$,то система ***несовместна*** (не имеет решений).

При решении систем линейных алгебраических уравнений нет необходимости заранее вычислять ранги основной и расширенной матриц. Их определение производится автоматически при выполнении метода исключения Гаусса.

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Следующие действия над расширенной матрицей системы называются ***элементарными преобразованиями***.

- Умножение элементов строк на одно и то же число, не равное нулю
- Перестановка местами двух строк
- Прибавление к элементам строки элементов другой строки, умноженных на произвольный множитель.

Конечной целью элементарных преобразований является получение верхнетреугольной матрицы, у которой все элементы, стоящие под главной диагональю равны нулю. Преобразования стараются производить так, чтобы на главной диагонали появлялись единицы.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & c_{12} & c_{13} & d_1 \\ 0 & 1 & c_{23} & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \end{array}\right)$$

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x - 2y + 4z = 5 \\ 2x + 3y - z = 7 \\ 3x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы

К первой строке прибавим вторую строку, умноженную на (-2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{\sim}{\mathrm{I} + \mathrm{II} \times (-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{\sim}{\begin{matrix} \mathrm{II} + \mathrm{I} \times (-2) \\ \mathrm{III} + \mathrm{I} \times (-3) \end{matrix}}$$

Ко второй строке прибавим первую строку, умноженную на (-2), К третьей строке прибавим первую строку, умноженную на (-3).

Из третьей строки вычтем вторую строку

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & 19 & -13 & 25 \\ 0 & 23 & -16 & 30 \end{array}\right) \underset{\sim}{\mathrm{III} - \mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & 19 & -13 & 25 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right) \underset{\sim}{\mathrm{II} + \mathrm{III} \times (-5)}$$

Ко второй строке прибавим третью строку, умноженную на (-5)

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{III} + \text{II} \times 4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \underset{\sim}{\begin{array}{c}\text{II} \times (-1) \\ \text{III} : 5\end{array}}$$

К третьей строке прибавим вторую строку, умноженную на 4

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Вторую строку умножим на (-1), третью строку разделим на 5

Восстановим систему:

$$\begin{cases} x - 8y + 6z = -9 \\ y - 2z = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -9 + 8y - 6z \\ y = 2z = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -9 + 16 - 6 = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{x = 1 \quad y = 2 \quad z = 1}$$

Исследование систем линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{I}:2 \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}+\mathrm{I}\times(-3) \\ \mathrm{IV}+\mathrm{I} \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{II}:(-2) \\ \mathrm{III}:(-4) \\ \mathrm{IV}:4 \\ \sim \end{array}$$

Исследование систем линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{III}-\mathrm{II} \\ \mathrm{IV}-\mathrm{II} \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(\tilde{B}) = r(A) = 2 \quad \Rightarrow$ *система совместна*

$n = 3$ *- число неизвестных*

$r(\tilde{B}) < n \quad \Rightarrow$ *система неопределенна*

$n - r = 3 - 2 = 1$ *- число свободных переменных*

Пусть $x_2 = t.$ *Восстановим систему:*

$$\begin{cases} x_1 + t + x_3 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - t - x_3 = 1 - t \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - t \\ x_2 = t \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Исследование систем линейных уравнений

$$\begin{cases} x+2y-4z=1 \\ 2x+y-5z=-1 \\ x-y-z=3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \mathrm{II}+\mathrm{I}\times(-2) \\ \mathrm{III}-\mathrm{I} \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \mathrm{III}-\mathrm{II} \\ \sim \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$$r(\tilde{B})=3$$

$$r(A)=2$$

$r(\tilde{B}) \neq r(A) \Longrightarrow$ *система несовместна*