§10. Интеграл типа Коши. Теорема Мореры.

п.1. Интеграл типа Коши.

Пусть Γ — произвольная кусочно-гладкая кривая, замкнутая или незамкнутая.

Пусть функция непрерывна вдоль Γ. Рассмотрим интеграл

(1)

Выражение (1) имеет определенное значение в каждой точке z,

Поэтому, оно определяет однозначную функцию

Если Γ — замкнутая кривая, и — аналитическая функция как внутри Γ, так и на Γ, то

В этом случае (1) называется интегралом Коши.

При общих вышеуказанных предположениях выражение (1) называется <u>интегралом типа Коши</u>.

<u>Теорема 1.</u>

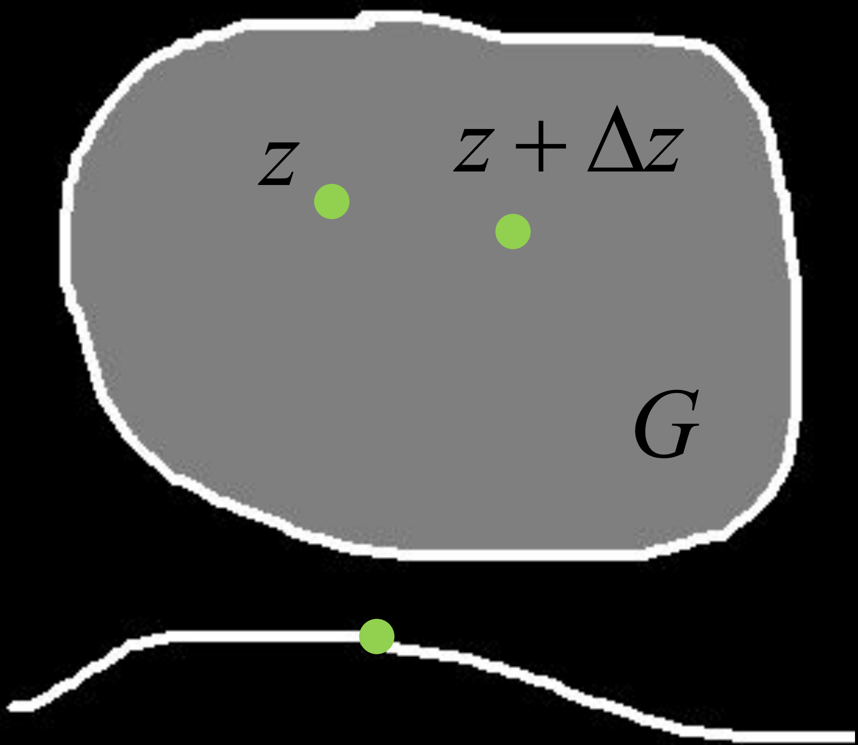
Функция , определенная интегралом типа Коши (1), аналитична во всякой односвязной области G, не содержащей точек кривой Γ, и для ее производной имеет место формула

Доказательство.

Пусть z — произвольная точка области G;

— такое, что

Рассмотрим приращение



Тогда

или

если возможен предельный переход под знаком интеграла в правой части.

Обоснуем этот предельный переход.

Покажем, что разность

стремится к нулю при

Так как функция непрерывна вдоль Γ, то

Поэтому,

Обозначим через $2d$ расстояние от точки z до кривой Γ, т.е.

Тогда

и, кроме того, при достаточно малых

Поэтому,

где l — длина Γ.

Значит,

Последнее равенство обосновывает предельный переход, что и завершает доказательство теоремы.

Теорема 2.

Функция , определенная интегралом типа Коши (1), имеет в каждой точке z, лежащей вне кривой Γ, производные всех порядков.

При этом имеют место формулы

Доказательство.

Методом математической индукции.

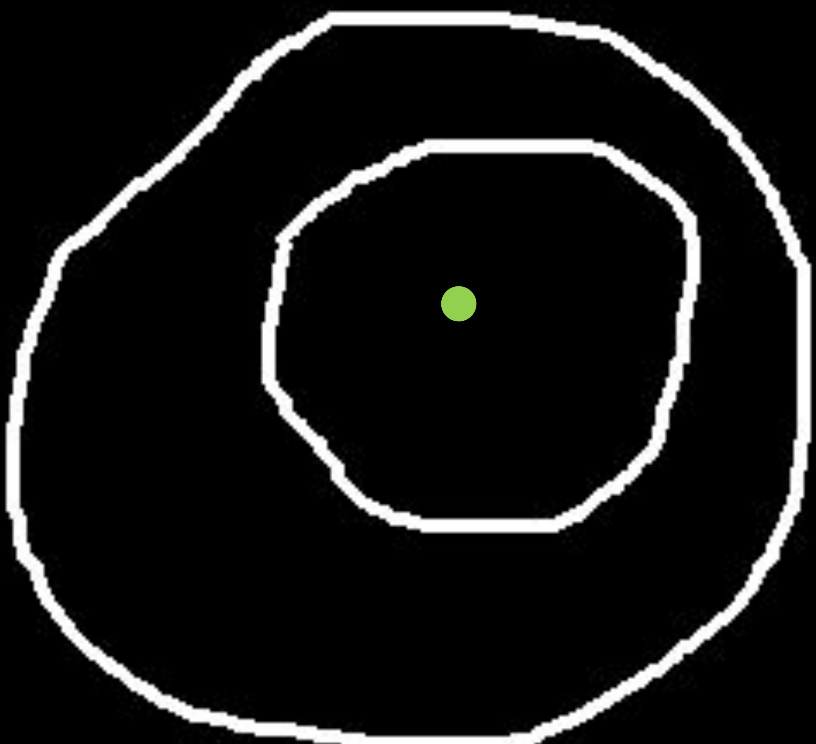
п.2. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции.

<u>Теорема 3.</u>

Каждая функция , аналитическая в области G, имеет производные всех порядков в этой области, т.е. бесконечно дифференцируема в ней.

Доказательство.

Пусть z — произвольная точка области G;
Γ — кусочно-гладкий замкнутый контур, окружающий точку z и лежащий со всеми своими внутренними точками в области G.



С одной стороны, по интегральной теореме Коши

С другой стороны, на основании теоремы 2 функция , определяемая интегралом типа Коши, дифференцируема в точке z произвольное число раз.

В силу произвольности выбора точки z заключаем, что функция имеет производные всех порядков повсюду в области G.

Замечание 1.

Для производных аналитической функции справедливы формулы

которые называются формулами Коши для производных.

Замечание 2.

Любая производная аналитической функции является аналитической функцией.

п.3. Обращение интегральной теоремы.

Теорема 4 (Морера).

Пусть
G — односвязная область;
— непрерывная в G функция;
для любого кусочно-гладкого замкнутого контура Γ, справедливо равенство

Тогда
функция является аналитической в области G.

Доказательство.

Из условия теоремы следует, что интеграл

не зависит от пути, соединяющего точки и z.

По теореме 1 §9 функция

является аналитической в области G, причем

Для завершения доказательства осталось применить замечание 2.