§15 и 16. Многочлены и рациональные функции

п.1. Многочлены.

Рассмотрим уравнения:

$\boxed{ax+b}=0$ — линейное уравнение

— многочлен 1-й степени

$\boxed{ax^2+bx+c}=0$ — квадратное уравнение

— многочлен 2-й степени

$\boxed{ax^3+bx^3+cx+d}=0$ — кубическое уравнение

— многочлен 3-й степени

Пример 1.

$$x^3-4x^2-5x=0;$$

$$x^3-4x^2-3x+12=0;$$

$$x^3+x+1=0.$$

Формулы Кардано для решение кубических уравнений.

Метод Феррари для решение уравнений 4-й степени.

Общее уравнение степени не ниже 5 не разрешимо в радикалах.

Выражение вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $a_k \in \mathbf{R},\ k = \overline{0, n},\quad a_n \neq 0,$ называется многочленом n-й степени.

Обозначается: $P_n(x).$

Число x_0 называется корнем многочлена $P_n(x),$ если

$$P_n(x_0) = 0.$$

Теорема 1 (о делении с остатком).

Пусть

$f(x), g(x)$ — некоторые многочлены;

$g(x) \neq 0.$

Тогда существуют многочлены $q(x), r(x)$ такие, что

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x),$$

причем степень многочлена $r(x)$ меньше степени многочлена $g(x)$.

Пример 2.

$$f(x) = 2x^5 + x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x + 2;$$

$$g(x) = x^2 + 2x - 3.$$

Найти $q(x), r(x)$.

Решение.

Разделим в столбик.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^5+x^4-3x^3+x^2-4x+2 & x^2+2x-3 \\
\underline{2x^5+4x^4-6x^3} & \overline{2x^3 \qquad\qquad} \\
\quad -3x^4+3x^3+x^2-4x+2 & \qquad = q(x) \\
\quad \underline{-3x^4-6x^3+9x^2} & \\
\qquad 9x^3-8x^2-4x+2 & \\
\qquad \underline{9x^3+18x^2-27x} & \\
\qquad\quad -26x^2+23x+2 & \\
\qquad\quad \underline{-26x^2-52x+78} & \\
\qquad\qquad 75x-76 \ = r(x) &
\end{array}
$$

Значит,

$$2x^5+x^4-3x^3+x^2-4x+2=$$

$$=(x^2+2x-3)(2x^3-3x^2+9x-26)+(75x-76)$$

Теорема 2 (Безу).

Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $(x-a)$ равен значению $P(x)$ при $x=a$.

Пример.

$$P(x)=x^3-2x^2+3x+5;$$

$$a=1.$$

$$r=7=$$

Доказательство.

Пусть $r(x)$ — остаток от деления $P(x)$ на $(x-a)$.

По теореме 1 степень многочлена $r(x)$ меньше степени многочлена $(x-a)$, т.е. равна

Значит, $r(x)$ — число, т.е. $r(x) \equiv r$.

По теореме 1

$$P(x) = (x-a) \cdot q(x) + r.$$

Положим $x = a$:

$$P(a) = (a-a) \cdot q(a) + r \quad \Rightarrow \quad r =$$

Следствие.

Число $x = a$ является корнем многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда остаток от деления $P(x)$ на $(x - a)$ равен нулю.

Доказательство.

Необходимость.

Пусть $x = a$ — корень многочлена $P(x),$ т.е.

$$P(a) =$$

Тогда по теореме 2, остаток равен

$$r =$$

Достаточность.

Если $r = 0,$ то по теореме 2 $P(a) =$

т.е. $x = a$ — корень многочлена $P(x).$

Таким образом, если известен один из корней $x = a$ уравнения $P(x) = 0$,

то степень уравнения можно понизить на 1, разделив $P(x)$ на $(x - a)$.

Пример. Решить уравнение

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0.$$

Решение. Очевидно, $x = 1$ — корень уравнения.

Разделив $x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ на $x - 1$, получим

$$x^2 - x + 2.$$

Значит,

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = (x - 1)(x^2 - x + 2).$$

Схема Горнера

Деление многочлена на двучлен, удобно выполнять по следующей схеме.

Пусть в результате деления многочлена

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

на двучлен $x - a$ в частном получается многочлен

$$b_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + b_1 x + b_0$$

и в остатке r.

Тогда

a	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_1	a_0
	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = ab_{n-1} + a_{n-1}$	$\dots$	$b_0 = ab_1 + a_1$	$r = ab_0 + a_0$

Пример. Разделить $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$ на $x - 3.$

3	1	1	– 6	– 14	– 11	– 3
	1	4	6	4	1	0

Значит,

$x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3 =$

Теорема 3 (основная теоремы алгебры).

Всякий многочлен n-й степени ($n > 0$) имеет по крайней мере один корень (действительный или комплексный).

Если многочлен $P(x)$ делится на $(x-a)^k$, то число $x = a$ называется корнем кратности k этого многочлена.

Пусть $P(x)$— многочлен с действительными коэффициентами.

Если

$$P(a+ib)=0,$$

то и

$$P(a-ib)=0.$$

Следствие (основной теоремы алгебры).

Всякий многочлен n-й степени ($n > 0$) имеет равно n корней (действительных или комплексных) с учетом их кратности.

Всякий многочлен $P_n(x)$ с действительными коэффициентами n-й степени разлагается на линейные и квадратные множители с действительными коэффициентами, т.е.

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}...(x - x_r)^{k_r} \times$$

$$\times(x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1}...(x^2 + p_m x + q_m)^{s_m},$$

где $k_1 + ... + k_r + s_1 + ... + s_m = n$ и

$p_i^2 - 4q_i < 0, \; i = \overline{1, m}.$

Рациональные корни многочлена

Теорема 4.

Пусть

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $a_k \in \mathbf{Z},\ k = \overline{0, n},\ a_n \neq 0.$

Если несократимая дробь

$$\frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbf{Z},$$

является корнем этого многочлена, то

p — делитель a_0,

q — делитель a_n.

Доказательство.

По условию теоремы

$$P_n\left(\frac{p}{q}\right) = 0,$$

т.е.

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0. \;\Big|\times q^n$$

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Тогда

$$a_n p^n = -q(a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 pq^{n-2} + a_0 q^{n-1}), \qquad (1)$$

$$a_0 q^n = -p(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1 q^{n-1}). \qquad (2)$$

Правая часть равенства (1) делится на q,

Так как дробь $\frac{p}{q}$ является несократимой, то p не делится на q,

Аналогично, с помощью равенства (2) показывается, что a_0 делится на p.

Пример. Решить уравнение

$$2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0.$$

Решение.

$p:$

$q:$

Возможные корни:

$$\pm\frac{p}{q}:\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2}.$$

Проверим с помощью схемы Горнера, какие из этих чисел являются корнями уравнения.

	2	-3	-11	6	
1	2	-1	-12	$-6 \neq 0$	— не корень
-1	2	-5	-6	$12 \neq 0$	— не корень
2	2	1	-7	$-8 \neq 0$	— не корень
-2	2	-7	3	0	

Значит, $x_1 = -2$ — корень уравнения.

Остальные корни можно найти из уравнения

$$2x^2 - 7x + 3 = 0.$$

$$x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = 3.$$

п.2. Рациональные функции.

Рациональной функцией называется отношение двух многочленов.

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}.$$

$n < m \Rightarrow R(x)$ — правильная рациональная дробь;

$n \geq m \Rightarrow R(x)$ — неправильная рациональная дробь.

Пример.

$$\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+2}-\frac{x+1}{x^2+1}=$$

$$\frac{4x^3-x^2+6x+3}{(x-1)(x+2)(x^2+1)}=$$

Всякую неправильную рациональную дробь путем деления можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = T(x) + \frac{P_s(x)}{Q_m(x)}, \qquad \begin{array}{c} n \geq m \\ s < m \end{array}$$

Пример.

$$\frac{2x^5 + x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x + 2}{x^2 + 2x - 3} = \quad \text{(см. пример 2)}$$

$$= 2x^3 - 3x^2 + 9x - 26 + \frac{75x - 76}{x^2 + 2x - 3}.$$

Простейшие рациональные дроби

I. $$\frac{A}{x-a}$$

II. $$\frac{A}{(x-a)^k},\ k \geq 2$$
$$k \in \mathbf{N}$$

III. $$\frac{Mx+N}{x^2+px+q},$$

IV. $$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k},$$

$$p^2-4q<0$$

$$k \geq 2\ k \in \mathbf{N}\ p^2-4q<0$$

$$A, M, N, a, p, q \in \mathrm{R}$$

Теорема 5.

Всякую правильную рациональную дробь

$$\frac{P_s(x)}{Q_m(x)},\ s < m,$$

знаменатель которой разложен на множители

$$Q_m(x) = (x - x_1)^{k_1} \ldots (x - x_l)^{k_l} \times$$

$$\times \underset{D<0}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1}} \ldots \underset{D<0}{(x^2 + p_t x + q_t)^{s_t}},$$

можно представить (и притом единственным образом) в виде суммы простейших дробей.

Множителю вида $(x-x_1)^k$ соответствует сумма k простейших дробей

$$\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\frac{A_3}{(x-x_1)^3}+\ldots+\frac{A_k}{(x-x_1)^k}.$$

Множителю вида $(x+px+q)^s,\ p^2-4q<0,$ соответствует сумма s простейших дробей

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s}.$$

Пример. Разложить в сумму простейших дробей

$$\frac{3}{(x+1)(x-2)^2(x^2+x+1)}.$$

Решение.

$$\frac{3}{(x+1)(x-2)^2(x^2+x+1)}=$$

$$+\frac{\quad}{\quad}+\frac{\quad}{\quad}+\frac{\quad}{\quad}+\frac{\quad}{\quad}.$$

Метод неопределенных коэффициентов

Пример. Разложить в сумму простейших дробей

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}.$$

Решение.

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=$$

$$=\frac{A(x^2-2x+5)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2-2x+5)}.$$

Приравняем конечный и исходный числитель, раскрыв скобки:

$$Ax^2 - 2Ax + 5A + Bx^2 - Bx + Cx - C = 2x^2 - 3x - 3.$$

Выпишем слагаемые с x^2 :

$$Ax^2 + Bx^2 = 2x^2.$$

Получаем уравнение:

$$A + B = 2.$$

Выпишем слагаемые с x:

$$-2Ax - Bx + Cx = -3x.$$

Получаем уравнение:

$$-2A - B + C = -3.$$

Выпишем слагаемые без x:

$$5A - C = -3.$$

Осталось решить систему:

$$\begin{cases} A + B = 2, \\ -2A - B + C = -3, \\ 5A - C = -3. \end{cases}$$

$$A = -1,\ B = 3,\ C = -2.$$

Поэтому,

$$\frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{3x-2}{x^2 - 2x + 5}.$$

Метод отдельных значений аргумента

Пример. Разложить в сумму простейших дробей

$$\frac{-5x-4}{x(x-1)(x+2)}.$$

Решение.

$$\frac{-5x-4}{x(x-1)(x+2)} =$$

$$= \frac{A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}.$$

Приравняем конечный и исходный числитель:

$$A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)=-5x-4.$$

Положим $x=0:$

$$-2A=-4;$$

Положим $x=1:$

$$3B=-9;$$

Положим $x=-2:$

$$6C=6;$$

Поэтому,

$$\frac{-5x-4}{x(x-1)(x+2)}=\frac{2}{x}-\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+2}.$$