Интегрирование

Неопределенный интеграл

Для 19-ИУ, 19-Э

Бобкова И.А.

Лекция

Интегрирование рациональных дробей, некоторых иррациональных и трансцендентных функций.

- **Разложение правильной рациональной дроби в сумму простых дробей.**
- **Интегрирование простых дробей.**
- **Понятие рациональной функции от нескольких переменных.**
- **Интегрирование некоторых тригонометрических и гиперболических функций.**
- **Интегрирование некоторых иррациональных функций.**

Разложение правильной рациональной дроби в сумму простых дробей.

Функция вида

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно, называется дробно-рациональной функцией, или рациональной дробью.

Если $n < m$, то дробь называется правильной, в противном случае – неправильной. Если дробь неправильная – выделим ее целую часть:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)},$$

где $S_{n-m}(x)$, $R_k(x)$ – многочлены степени $(n-m)$ и k соответственно, причем $k < m$.

Пусть x_1 - действительный корень знаменателя кратности r. Простыми (элементарными) дробями, соответствующими этому корню, называются дроби вида

$$\frac{A_1}{x - x_1}, \quad \frac{A_2}{(x - x_1)^2}, \quad \dots \quad, \quad \frac{A_r}{(x - x_1)^r},$$

где A_1, A_2, ..., A_r – действительные числа.

Пусть $\alpha \pm i\beta$ – пара комплексно сопряженных корней знаменателя кратности s, причем

$$(x - \alpha - i\beta)(x - \alpha + i\beta) = x^2 + px + q, \text{ где } D < 0.$$

Простыми дробями, соответствующими этой паре корней, называются дроби вида

$$\frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q}, \quad \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2}, \quad \dots \quad, \quad \frac{M_s x + N_s}{(x^2 + px + q)^s},$$

где $M_j x + N_j$ $(j = 1, 2, \dots, s)$ – многочлены первой степени с действительными коэффициентами.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k$ – все действительные корни многочлена $Q_m(x)$ в знаменателе, кратности которых соответственно равны $r_1, r_2, \ldots, r_k$; $\alpha_1 \pm i\beta_1$, …, $\alpha_l \pm i\beta_l$ – все пары комплексно сопряженных корней этого же многочлена кратности $s_1, s_2, \ldots, s_l$ соответственно.

Напомним, что многочлен в этом случае может быть разложен на множители, то есть представлен в виде

$$Q_m(x) = (x - x_1)^{r_1} \ldots (x - x_k)^{r_k} (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \ldots (x^2 + p_l x + q_l)^{s_l}.$$

где

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_k + 2(s_1 + s_2 + \ldots + s_l) = m.$$

ТЕОРЕМА.

Всякая правильная дробь может быть единственным образом представлена в виде суммы элементарных дробей, соответствующих всем корням знаменателя.

При выполнении разложения правильной рациональной дроби

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

в сумму простых дробей обычно используют так называемый *метод неопределенных коэффициентов*. Он состоит в следующем:

- Для данной дроби пишется разложение, коэффициенты которого считаются неизвестными.
- После этого обе части полученного равенства приводятся к общему знаменателю.
- У получившихся в числителе многочленов приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях переменной.
- В результате получается система m линейных уравнений с m неизвестными, которая в данном случае имеет единственное решение.

ПРИМЕР 1. $$\frac{x^2+x+7}{(x-1)(x+2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{A(x+2)^2+B(x-1)(x+2)+C(x-1)}{(x-1)(x+2)^2} \quad \Rightarrow$$

$$x^2+x+7 \equiv A(x+2)^2+B(x+2)(x-1)+C(x-1).$$

Для определения коэффициентов *A, B, C* получаем систему:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ C+4A+B=1 \\ 4A+2B-C=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=0 \\ C=-3 \end{cases}.$$

Итак, искомое разложение имеет вид

$$\frac{x^2+x+7}{(x-1)(x+2)^2}=\frac{1}{x-1}-\frac{3}{(x+2)^2}.$$

ПРИМЕР 2. $$\frac{x+7}{(x-1)(x^2+2x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}=$$

$$=\frac{A(x^2+2x+5)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+2x+5)}\quad\Rightarrow$$

$$x+7=A(x^2+2x+5)+(Bx+C)(x-1)\quad\Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A-B+C=1 \\ 5A-C=7 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} A=1 \\ B=-1. \\ C=-2 \end{cases}$$

Итак, искомое разложение имеет вид

$$\frac{x+7}{(x-1)(x^2+2x+5)}=\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{x^2+2x+5}.$$

Интегрирование простых дробей.

Задача интегрирования рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена, интеграл от которого является табличным, и правильной рациональной дроби, что приводит к нахождению интегралов следующих четырех типов:

1) $$\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C;$$

2) $$\int \frac{Adx}{(x-a)^s} = -\frac{A}{(s-1)(x-a)^{s-1}} + C, \quad s>1;$$

3) $$\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q};$$

4) $$\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^s}, \quad s>1.$$

При этом многочлен $x^2 + px + q$ не имеет вещественных корней, т.е. $D = p^2 - 4q < 0$.

Выделим полный квадрат по x в знаменателях двух последних дробей и сделаем замену переменной:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = t^2 + a^2 \quad \Rightarrow$$

$$x = t - \frac{p}{2}, \quad (Ax + B)dx = \left(At + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\right)dt.$$

3) $$\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{At + (B - Ap/2)}{t^2 + a^2} dt = \frac{A}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{t^2 + a^2} +$$

$$+ \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{A}{2} \ln(t^2 + a^2) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \frac{1}{a} arctg \frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{A}{2} \ln(x^2 + px + q) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} arctg \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C.$$

4) $$\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^s} = \frac{A}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^s} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^s} =$$

$$= -\frac{A}{2(s-1)(x^2+px+q)^{s-1}} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)I_s,$$

где интеграл

$$I_s = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^s}$$

вычисляется по рекуррентной формуле

$$I_s = \frac{1}{2(s-1)a^2}\left(\frac{t}{(t^2+a^2)^{s-1}} + (2s-3)I_{s-1}\right), \qquad s = 2,3,\dots.$$

Понятие рациональной функции от нескольких переменных.

Под рациональной функцией двух переменных u и v понимается функция $R(u, v)$, представимая в виде

$$R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)},$$

где P и Q – многочлены относительно u, коэффициенты которых являются многочленами относительно v.

Например

$$R(u,v) = \frac{5u^2v + u^3v^5 - 7}{u + v^2}.$$

Если переменные u и v, в свою очередь, являются функциями переменной x, то функция $R(u(x),v(x))$ называется рациональной функцией от $u(x)$, $v(x)$.

Например

$$f(x) = \frac{3x + \sqrt{1 + x^2}}{5x - 8(1 + x^2)} = R(x, \sqrt{1 + x^2}).$$

Аналогично можно ввести понятие рациональной функции от m переменных.

Интегрирование некоторых тригонометрических и гиперболических функций

- **Интегралы вида** $\int R(\sin x, \cos x)dx.$

Так называемая *универсальная тригонометрическая подстановка*

$$t = tg\frac{x}{2}, \quad x \in (-\pi, \pi),$$

сводит данный интеграл к интегралу от рациональной дроби, так как

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2arctgt, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

ПРИМЕР.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{(1+t^2)2dt}{2t(1+t^2)} = \int \frac{dt}{t} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

Универсальная тригонометрическая подстановка часто приводит к громоздким вычислениям. Вместе с тем другие методы иногда позволяют вычислить данный интеграл значительно быстрее. В частности, подстановки вида

- $t = \cos x,\ x \in (0, \pi)$;
- $t = \sin x,\ x \in (-\pi/2, \pi/2)$;
- $t = \mathrm{tq}\,x,\ x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

ПРИМЕР 4.

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x \cos^3 x} = -\int \frac{d\cos x}{(1-\cos^2 x)\cos^3 x} = -\int \frac{dt}{(1-t^2)t^3}$$

ПРИМЕР 5.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d\sin x}{1-\sin^2 x} = \int \frac{dt}{1-t^2} = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C$$

ПРИМЕР 6.

$$\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \int \frac{dx}{\cos^4 x \cos^2 x} = \int (1+tg^2 x)^2 d(tgx) = \int (1+t^2)^2 dt$$

- **Интегралы вида** $\int \sin^m x \cos^n x dx.$

Рассмотрим некоторые случаи, когда когда m и n целые (не обязательно положительные) числа. Например

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx = -\int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x d\cos x = -\int (1-t^2)^k t^n dt;$$

$$\int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx = \int \sin^m x(1-\sin^2 x)^k d\sin x = \int t^m (1-t^2)^k dt;$$

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^{2l+1} x dx = \int \sin^{2k} x \cos^{2l} x \sin x \cos x dx =$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^l \frac{\sin 2x}{2} dx = -\frac{1}{4}\int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^l d\cos 2x =$$

$$= -\frac{1}{2^{k+l+2}} \int (1-t)^k (1+t)^l dt.$$

Если оба показателя m и n положительны и четны (или один из них равен 0), то целесообразно применять формулы понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Например

$$\int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx =$$

$$= \frac{x}{4}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)dx = \frac{x}{4}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{\sin 4x}{32}+C =$$

$$= \frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C.$$

- **Интегралы вида** $\int \sin\alpha x \cos\beta x dx.$

Интегралы этого типа непосредственно вычисляются, если в них подинтегральные функции преобразовать согласно формулам

$$\sin\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\right],$$

$$\sin\alpha x \sin\beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\right],$$

$$\cos\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x\right].$$

Например

$$\int \sin 2x \cos x dx = \frac{1}{2}\int(\sin 3x + \sin x)dx = -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x + C.$$

Интегрирование некоторых иррациональных функций.

- **Интегралы вида**

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \quad \ldots \quad, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right) dx,$$

где $r_k \in \boldsymbol{Q}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$, $ad - bc \neq 0$, подстановкой

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^p$$

(p – общий знаменатель рациональных чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$) приводятся к интегралу от рациональной функции одной переменной t. Например

$$\int (x+2)\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx = \left| \begin{array}{l} \dfrac{x+1}{x-1} = t^3 \Rightarrow x = \dfrac{1+t^3}{t^3-1}, \\ dx = \dfrac{-6t^2}{(t^3-1)^2}\,dt \end{array} \right| = -6\int \frac{t^2(3t^2-1)(1+t^3)}{(t^3-1)^2}\,dt.$$

- **Интегралы вида** $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx.$

После выделения полного квадрата в квадратном трехчлене и замены переменной интеграл может быть сведен к интегралам от функций следующих трех видов, каждый из которых может быть вычислен с помощью соответствующей тригонометрической подстановки:

1) $R\left(u, \sqrt{a^2 - u^2}\right)$ – подстановка $u = a\cos t$ или $u = a\sin t$;

2) $R\left(u, \sqrt{a^2 + u^2}\right)$ – подстановка $u = a\,\mathrm{tg}\,t$ или $u = a\,\mathrm{ctg}\,t$;

3) $R\left(u, \sqrt{u^2 - a^2}\right)$ – подстановка $u = \dfrac{a}{\cos t}$ или $u = \dfrac{a}{\sin t}$.

ПРИМЕР 7.

$$\int\sqrt{4+x^2}\,dx = \left|\begin{array}{l} x = 2tgt, \quad dx = \dfrac{2dt}{\cos^2 t}, \\ \sqrt{4+x^2} = \sqrt{4(1+tg^2 t)} = \dfrac{2}{\cos t} \end{array}\right| = \int\frac{4dt}{\cos^3 t} =$$

$$= 2\int\frac{\cos t\,dt}{\cos^4 t} = 2\int\frac{d\sin t}{(1-\sin^2 t)^2} = 2\int\frac{dy}{(1-y^2)^2}.$$

Итак, искомый интеграл мы свели к интегралу от рациональной дроби.

Спасибо за внимание!