Интегрирование дробно-рациональных функций

Дробно-рациональной функцией (или рациональной дробью)называется функция,равная отношению двух многочленов,т.е. $f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$,где $P_m(x)$ - многочлен

степени m,а $Q_n(x)$ -многочлен степени n.

Рациональная дробь называется **правильной,**если степеньчислителя меньше степени знаменателя,т.е. $m<n$

в противном случае (если $m \geq n$)рациональная дробь называется **неправильной**.

Всякую неправильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно,путем деления числителя на знаменатель представить в виде суммы многочлена $L(x)$ и правильной рациональной дроби $\frac{R(x)}{Q(x)}$ т.е. $\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$

Например $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2}$

Делим числитель на знаменатель в столбик.

Получим частное $L(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 3$ и остаток $R(x) = 15$.

Следовательно $$\frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} = x^3 + 2x^2 + 4x + 3 + \frac{15}{x - 2}$$

Правильные рациональные дроби вида:

1) $$\frac{A}{x-a}$$

2) $$\frac{A}{(x-a)^k}(k \geq 2, k \in \mathbb{N}$$

3) $$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)}$$ (корни комплексные,т.е. $p^2-4q<0$)

4) $$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$$ (*k >2,* корни знаменателя комплексные),

Где *A,a,M,N,p,q*-действительные числа,называются простейшими рациональными дробями 1,2,3 и 4 типов.

Теорема: Всякую *правильную* рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$,

Знаменатель которой разложен на множители

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \cdot ...(x^2 + p_m x + q_m)^{s_m},$$

можно представить (и притом единственным образом) в виде следующей суммы простейших дробей:

(*)

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - x_1)} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} +$$

$$+ \frac{B_1}{x - x_2} + \frac{B_2}{(x - x_2)^2} + \ldots + \frac{B_{k_2}}{(x - x_2)^{k_2}} + \ldots$$

$$+ \frac{C_1 x + D_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{C_2 x + D_2}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + \ldots + \frac{C_{s_1} x + D_{s_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + p_m x + q_m} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + p_m x + q_m)^2} + \ldots + \frac{M_{s_m} x + N_{s_m}}{(x^2 + p_m x + q_m)^{s_m}},$$

где $A_1, A_2, ..., B_1, B_2, ..., C_1, D_1, ..., M_1, N_1 ... -$ **некоторые действительные коэффициенты.**

Поясним формулировку теоремы на следующих примерах:

1) $$\frac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^3}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-2)^2}+\frac{D}{(x-3)^3};$$

2) $$\frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1};$$

3) $$\frac{7x^2+8x+9}{(x-1)(x-2)(x^2+x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}+\frac{Mx+N}{(x^2+x+1)^2}.$$

Для нахождения неопределённых коэффициентов $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2,$

Можно применить ***<u>метод сравнивания коэффициентов.</u>***

<u>Суть метода такова:</u>

1) В правой части равенства(*)приведем к общему знаменателю $Q(x)$;в результате получим тождество

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{S(x)}{Q(x)},$$

где S(x)-многочлен с неопределёнными коэффициентами.

2)Так как в полученном тождестве знаменатели равны , то тождественно равны и числители, т.е. $P(x) = S(x)(**)$ x

$A_1, A_2, ..., B_1, ...$

3)Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях

в обеих частях тождества, получим систему линейных уравнений ,из которой и определим искомые коэффициенты

Пример: Представить дробь $\dfrac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}$

В виде суммы простейших дробей.

Решение: Согласно теореме имеем:

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+5}$$

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\frac{A(x^2-2x+5)+(x-1)(Bx+C)}{(x-1)(x^2-2x+5)}$$

Отсюда следует $2x^2-3x-3=Ax^2-2Ax+5A+Bx^2+Cx-C,$

$$2x^2-3x-3=(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+(5A-C)$$

Приравнивая коэффициенты при $x^2, x^1, x^0,$ получаем

$$\begin{cases} 2 & = & A+B \\ -3 & = & -2A-B+C \\ -3 & = & 5A-C \end{cases}$$

Решаем систему, находим, что $A=-1, B=3, C=-2$

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\frac{-1}{x-1}+\frac{3x-2}{x^2-2x+5}$$

Для нахождения неопределённых коэффициентов применяют также *метод отдельных значений аргумента*

после получения тождества(**) аргументу x придают конкретные значения столько раз, сколько $Q(x)$) неопределённых коэффициентов(обычно полагают вместо x значения действительных корней многочлена

Найдём интегралы от простейших рациональных дробей.

1) $$\int \frac{A}{x-a}dx = \int \frac{l(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln\left|x-a\right| + C$$

(формула (2) таблицы интегралов)

2) $$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A \cdot \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \cdot \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$$

(формула (1))

3) $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$. Выделяем в знаменателе полный

квадрат, делаем замену и подстановку в числителе.

Пример: Найти $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10}dx$

Решение: $x^2+2x+10=(x+1)^2+9$

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10}dx=\int \frac{3x+1}{(x+1)^2+9}=\begin{bmatrix} x+1 & = & t \\ x & = & t-1 \\ dx & = & dt \end{bmatrix}=$$

$$\int \frac{3(t-1)+1}{t^2+9}dt=3\int \frac{tdt}{t^2+9}-2\int \frac{dt}{t^2+9}=\frac{3}{2}\ln(t^2+9)-$$

$$\frac{2}{3}arctg\frac{t}{3}+C=\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+10)-\frac{2}{3}arctg\frac{x+1}{3}+C.$$

Интегрирование рациональных дробей

Сформулируем общее правило интегрирования рациональных дробей:

1).Если дробь неправильная, то представить её в виде суммы многочлена и правильной дроби;

2)Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители , представить её в виде суммы простейших рациональных дробей;

3)Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Пример: Найти интеграл $\int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx$

Решение: Под знаком интеграла неправильная дробь; выделим её целую часть путём деления числителя на знаменатель. Получаем:

$$\frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = x - 2 + \frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2}$$

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = \frac{4x^3 + 4x^2 + 4x}{x^2(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2},$$

$$т.е. 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 = Ax(x^2 + 2x + 2) + B(x^2 + 2x + 2) + (Cx + D)x^2,$$

$$т.е. 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 = (A + C)x^3 + (2A + B + D)x^2 + (2A + 2B)x + 2B.$$

Отсюда следует,что

$$\begin{cases} A+C = 4, \\ 2A+B+D = 4, \\ 2A+2B = 4, \\ 2B = 4. \end{cases}$$

Находим :

$$B=2, A=0, C=4, D=2.$$

Таким образом получаем ,что:

$$\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}$$

$$u \qquad \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}.$$

Найдем искомый интеграл, преобразуя подынтегральную дробно-рациональную функцию, представляя её в виде полученной суммы.

$$\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx = \int (x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2})dx =$$

$$\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+\int \frac{4x+2}{(x+1)^2+1}dx.$$

НАЙДЁМ ИНТЕРГАЛ:

$$\int \frac{4x+2}{(x+1)^2+1}dx = \int \frac{4t-4+2}{t^2+1}dt = \int \frac{4t-2}{t^2+1}dt = 4\int \frac{tdt}{t^2+1} - 2\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$4\cdot\frac{1}{2}\ln(t^2+1)-2arctg(t)+C = 2\ln(x^2+2x+2)-2frctg(x+1)+C.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx =$$

$$\frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2\ln(x^2 + 2x + 2) - 2\,\mathrm{ar}\,ctg(x+1) + C$$

Отметим,что любая рациональная функция интегрируется в элементарных функциях.

Пример:Вычислить $$I=\int\frac{x^3+x+2}{(x-3)(x-4)}dx$$

Решение: Преобразуем знаменатель дроби

$$(x-3)(x-4)=x^2-7x+12$$

Выделим целую часть в дроби (поделим многочлен, стоящий в числителе на многочлен знаменателя)

$$\frac{x^3+x+2}{x^2--7x+12}=x+7+\frac{38x-82}{x^2-7x+12}=x+7+\frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}$$

Поэтому

$$I=\int(x+7+\frac{38x-82}{(x-3)(x-4)})dx=\frac{1}{2}x^2+7x+\int\frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}dx$$

Дробь

$$\frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-4}$$

Умножая обе части равенства на(x-3)(x-4),получаем

$$38x-82=A(x-4)+B(x-3)=Ax-4A+Bx-3B$$

$$38x-82=x(A+B)+(-4-3)$$

$$x^1 \quad : \quad A+B= \quad 38$$

$$x^0 \quad : \quad -4-3= \quad -82$$

Решая систему с двумя неизвестными находим значения

A=-32;B=70.

Дробь $$\frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}=-\frac{32}{x-3}+\frac{70}{x-4}$$

А $$I=\frac{1}{2}x^2+7x+\int(-\frac{32}{x-3}+\frac{70}{x-4})dx=$$

$$=\frac{1}{2}x^2+7x-32\ln|x-3|+70\ln|x-4|+C.$$

Пример: Вычислить
$$I=\int\frac{xdx}{1+x^3}$$

Решение: Так как
$$1+x^3=(1+x)(1-x+x^2),$$

А корни трёхчлена комплексны, то дробь запишем в виде

$$\frac{x}{1+x^3}=\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{1-x+x^2}=$$

$$\frac{A(1-x+x^2)+(Bx+C)(1+x)}{(1+x)(1-x+x^2)}=\frac{A-Ax+Ax^2+Bx+Bx^2+C+Cx}{(1+x)(1-x+x^2)}=$$

$$=\frac{x^2(A+B)+x(-A+B+C)+(A+C)}{(1+x)(1-x+x^2)}$$

$$x; \qquad A + B = 0; \qquad A = B; \qquad A = B$$

$$x^1; \quad -A + B + C = 1; \quad -(-B) + B + C = 1; \quad 2B + C = 1$$

$$x^2; \qquad A + C = 0; \qquad -B + C = 0; \qquad -B + C = 0$$

Откуда вычитая из(2)-(3) получим: $3B = 1; B = \frac{1}{3}; A = -\frac{1}{3}; C = \frac{1}{3}$

Таким образом имеем: $\frac{A}{1+x} + \frac{Bx + C}{1 - x + x^2} = \frac{-1/3}{1+x} + \frac{\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}{1 - x + x^2};$

Тогда:

$$I = \int \left(-\frac{\frac{1}{3}}{1+x} + \frac{\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}{1 - x + x^2}\right) dx = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{1 - x + x^2} dx =$$

Решим отдельно второй интеграл т.к. первый табличный №2:

$$\frac{1}{3}\int\frac{x+1}{1-x+x^2}dx=\frac{1}{3}\int\frac{x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1}{1-x+x^2}dx=\frac{1}{3}\int\frac{x-\frac{1}{2}}{1-x+x^2}dx+\frac{1}{3}\int\frac{3/2}{1-x+x^2}dx=$$

Пусть $\left[\begin{array}{c} 1-x+x^2=t \\ d(x^2-x+1)=dt \\ 2x-1=dt \\ x-\frac{1}{2}=\frac{dt}{2} \end{array}\right]$

1) $\int\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2+x-1}dx=\int\frac{dt}{2t}=\frac{1}{2}\ln|t|=\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+C$

2) $\int\frac{3/2}{x^2-x+1}dx=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})+\frac{3}{4}}=\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}=\sqrt{3}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}=$$

$$I=-\frac{1}{3}\ln|1+x|+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\,\mathrm{ar}ctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$$

$$Ответ:-\frac{1}{3}\ln|1+x|+\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$$