«Комплексные числа и действия над ними»

План

1. Историческая справка
2. Основные понятия
3. Геометрическое изображение Геометрическое изображение Геометрическое изображение комплексных чисел
4. Формы записи комплексных чисел
5. Действия над комплексными числами

п.1 Историческая справка

Понятие комплексного числа возникло из практики и теории решения алгебраических уравнений.

С комплексными числами впервые математики встретились при решении квадратных уравнений. Вплоть до XVI века математики всего мира, не находя приемлемого толкования для комплексных корней, возникавших при решении квадратных уравнений, объявляли их ложными и не принимали во внимание.

Кардано, занимавшийся решением уравнений 3-й и 4-й степеней был одним из первых математиков, формально оперировавших комплексными числами, хотя их смысл во многом оставался для него неясным.

Смысл комплексных чисел разъяснил другой итальянский математик Р. Бомбелли. В своей книге «Алгебра» (1572 г.) он впервые изложил правила действий над комплексными числами в современной форме.

Вместе с тем, вплоть до XVIII века, комплексные числа считали «воображаемыми» и бесполезными. Интересно отметить, что даже такой выдающийся математик как Декарт, отождествлявший действительные числа с отрезками числовой прямой, считал, что для комплексных чисел не может быть никакого реального истолкования, и они навечно останутся воображаемыми, мнимыми. Аналогичных взглядов придерживались великие математики Ньютон и Лейбниц.

содержание

Лишь в XVIII веке многие задачи математического анализа, геометрии, механики требовали широкого применения операций над комплексными числами, что создало условия для разработки их геометрического истолкования.

В прикладных работах Даламбера и Эйлера в середине XVIII века авторы представляют произвольные мнимые величины в виде $z=a+ib$, что позволяет изображать такие величины точками координатной плоскости. Именно эта интерпретация была использована Гауссом в работе, посвященной исследованию решений алгебраического уравнения.

И только в начале XIX века, когда уже была выяснена роль комплексных чисел в различных областях математики, была разработана очень простая и естественная их геометрическая интерпретация, позволившая уяснить геометрический смысл операций над комплексными числами.

Этому математика обязана Гауссу, опубликовавшему в 1831 г. свою работу по теории чисел. Тем самым был положен конец сомнениям в законном и полезном применении комплексного числа.

содержание

п.2 Основные понятия

Комплексным числом z называется выражение вида $z=a+ib$**,** где a и b – действительные числа, i – *мнимая единица*, которая определяется соотношением:

$$i^2=-1; \qquad i=\sqrt{-1}.$$

При этом число a называется ***действительной частью*** числа z ($a = Re\, z$), а b - ***мнимой частью*** ($b = Im\, z$).

Если $a=Re\ z=0$, то число *z* будет *чисто мнимым*, если $b=Im\ z=0$, то число z будет *действительным*.

Числа $z=a+ib$ и $\bar{z}=a-ib$ называются ***комплексно – сопряженными*.**

Два комплексных числа $z_1=a_1+ib_1$ и $z_2=a_2+ib_2$ называются *равными*, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

$$a_1=a_2; \qquad b_1=b_2$$

Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части

$$a=b=0.$$

Также комплексные числа можно записывать, например, в виде $z=x+iy$, $z=u+iv$.

содержание

п.3 Геометрическое изображение комплексных чисел

Всякое комплексное число $z=x+iy$ можно изобразить точкой $M(x;y)$ плоскости xOy такой, что $x = Re\, z,\ y = Im\, z$. И, наоборот, каждую точку $M(x;y)$ координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа $z=x+iy$ (рисунок 1).

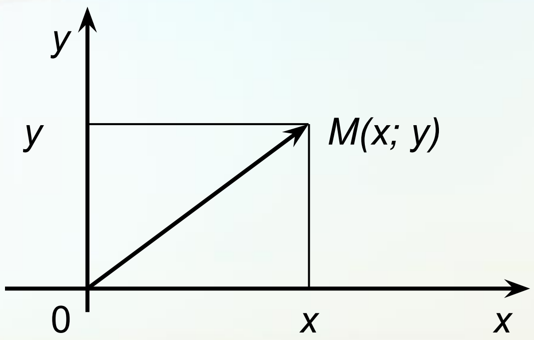


Рисунок 1

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется ***комплексной плоскостью*.**

Ось абсцисс называется ***действительной осью*,** так как на ней лежат действительные числа $z=x+0i=x$.

Ось ординат называется ***мнимой осью*,** на ней лежат мнимые комплексные числа $z=0+yi=yi$.

Часто вместо точек на плоскости берут их *радиус-векторы* $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$,

т.е. векторы, началом которых служит точка $O(0;0)$, концом $M(x;y)$.

Длина вектора $\vec{r}$, изображающего комплексное число z, называется ***модулем*** этого числа и обозначается $|z|$ или r.

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\vec{r}$, изображающим комплексное число, называется ***аргументом*** этого комплексного числа, обозначается $Arg\, z$ или φ.

Аргумент комплексного числа $z=0$ не определен.

Аргумент комплексного числа $z\neq 0$ - величина многозначная и определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$ $(k=0,-1,1,-2,2,..)$:

$$Arg\, z = arg\, z + 2\pi k,$$

где $arg\, z$ *-* ***главное значение аргумента****, заключенное в промежутке* $(-\pi, \pi]$.

п.4 Формы записи комплексных чисел

Запись числа в виде $z=x+iy$ называют ***алгебраической формой*** комплексного числа.

Из рисунка 1 видно, что $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, следовательно, комплексное $z=x+iy$ число можно записать в виде:

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Такая форма записи называется ***тригонометрической формой записи*** комплексного числа.

Модуль $r=|z|$ однозначно определяется по формуле

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Аргумент φ определяется из формул

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}; \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}; \quad tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

содержание

п.5 Действия над комплексными числами

1) Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме

а) Сложение комплексных чисел

Суммой двух комплексных чисел $z_1=x_1+y_1i$ и $z_2=x_2+y_2i$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2).$$

Свойства операции сложения:

1. $z_1+z_2= z_2+z_1$,
2. $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$,
3. $z+0=z$.

б) Вычитание комплексных чисел

Вычитание определяется как действие, обратное сложению.

Разностью двух комплексных чисел $z_1=x_1+y_1i$ и $z_2=x_2+y_2i$ называется такое комплексное число z, которое, будучи сложенным с z_2, дает число z_1 и определяется равенством

$$z=z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

содержание

в) Умножение комплексных чисел

Произведением комплексных чисел $z_1=x_1+y_1i$ и $z_2=x_2+y_2i$ называется комплексное число, определяемое равенством

$$z=z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2-x_2y_1).$$

Отсюда, в частности, следует важнейшее соотношение

$$i^2=-1.$$

Свойства операции умножения:

1. $z_1z_2=z_2z_1,$
2. $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3),$
3. $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3,$
4. $z\cdot 1=z.$

содержание

г) Деление комплексных чисел

Деление определяется как действие, обратное умножению.

Частным двух комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ называется комплексное число z, которое будучи умноженным на z_2, дает число z_1, т. е. $\frac{z_1}{z_2} = z,$ если $z_2 z = z_1$.

Если положить $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i \neq 0$, $z = x + yi$, то из равенства $(x+yi)(x_2+iy_2) = x_1 + y_1 i$, следует

$$\begin{cases} xx_2 - yy_2 = x_1, \\ xy_2 + yx_2 = y_1. \end{cases}$$

Решая систему, найдем значения x и y:

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Таким образом,

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

На практике вместо полученной формулы используют следующий прием: умножают числитель и знаменатель дроби $\dfrac{z_1}{z_2}$ на число, сопряженное знаменателю («избавляются от мнимости в знаменателе»).

Пример 1. Даны комплексные числа $10+8i$, $1+i$. Найдем их сумму, разность, произведение и частное.

Решение.

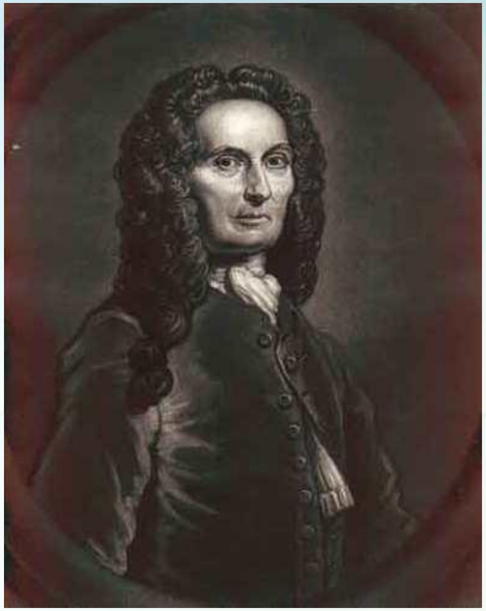
а) $(10+8i)+(1+i)=(10+1)+(8+1)i=11+9i;$

б) $(10+8i)-(1+i) =(10-1)+(8-1)i=9+7i;$

в) $(10+8i)(1+i) =10+10i+8i+8i^2=2+18i;$

г) $\dfrac{10+8i}{1+i}=\dfrac{(10+8i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{10-10i+8i-8i^2}{1-i^2}=\dfrac{18-2i}{2}=9-i.$

содержание



Абрахам де Муавр (1667 – 1754) – английский математик французского происхождения.

Заслуги Муавра:

- открыл (1707) формулу Муавра для возведения в степень (и извлечения корней) комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме;
- первый стал использовать возведение в степень бесконечных рядов;
- большой вклад в теорию вероятностей: доказал частный случаи теоремы Лапласа, провёл вероятностное исследование азартных игр и ряда статистических данных по народонаселению.

Формулу Муавра можно использовать для нахождения тригонометрических функций двойного, тройного и т.д. углов.

содержание

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение комплексного числа.
2. Какое комплексное число называется чисто мнимым?
3. Какие два комплексных числа называются сопряженными?
4. Объясните, что значит сложить комплексные числа, заданные в алгебраической форме; умножить комплексное число на действительное.
5. Объясните принцип деления комплексных чисел, заданных в алгебраической форме.
6. Расскажите как изображаются комплексные числа на плоскости.
7. Сформулируйте определение модуля и аргумента комплексного числа.