Семинар 11. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях. Правило Лопиталя.

1.Теорема о корнях производной (теорема Ролля)

Если функция $y=f(x)$ непрерывна и дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и на концах отрезка $f(a)=f(b)=0$, то существует внутри отрезка $[a,b]$ по крайней мере одна точка $x=c$, $a<c<b$, в которой производная $f'(x)$ обращается в 0.

2.Теорема о конечных приращениях (теорема Лагранжа)

Если $y=f(x)$ непрерывна и дифференцируема на отрезке $[a,b]$, то внутри отрезка $[a,b]$ найдется, по крайней мере, одна точка c, $a<c<b$, что

$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ (1)

3.Теорема об отношении приращений двух функций (теорема Коши)

Если $f(x), \varphi(x)$ непрерывные и дифференцируемые функции на отрезке [a,b], причем $\varphi'(x) \neq 0$ при $x \in [a,b]$, то найдется такая точка $x=c$, $a<c<b$, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \quad (1).$$

Понятие о правиле Лопиталя

Рассмотрим отношение $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ где функция $\varphi(x), \psi(x)$ определены и дифференцируемы в окрестности U_a точки a. Может случиться, что при $x \to a$, $\varphi(x), \psi(x)$ стремятся к 0 или к ∞, то есть обе функции одновременно являются бесконечно малыми или бесконечно большими. Тогда в точке a функция $f(x)$ имеет неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ (1).

В этом случае, используя производные $\varphi'(x), \psi'(x)$ можно сформулировать простое правило для нахождения предела функции *f(x)* при $x \to a$ то есть дать способ раскрытия неопределенностей вида (1). **Это правило Лопиталя.**

<u>Теорема</u>

Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует.

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

Указанные виды неопределенностей $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ не являются единственными.

Возможны неопределенности $0\cdot\infty$ то есть $f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$ причём $\varphi(x)\to 0, \psi(x)\to\infty, x\to a$ Или неопределенность $\infty-\infty$ то есть $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$ причём $\varphi(x)\to\infty, \psi(x)\to\infty, x\to a$ Возможны и другие неопределенности. Для раскрытия этих неопределенностей их стараются с помощью тождественных преобразований свести к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ и затем применить правило Лопиталя.

Примеры с решениями

1. Выполняется ли теорема Ролля для функции $f(x)=x^2-6x+100$ **если** *a=1, b=5?*

При каком значении *c*?

Решение. Так как функция *f(x)* непрерывна и дифференцируема при всех значения *x* и ее значения на концах отрезка [1;5] равны: *f(1)=f(5)=95*, то теорема Ролля на этом отрезке выполняется. Значение *c* определяется из уравнения *f'(x)=2x-6=0*, то есть *c=3*

2. Показать, что производная многочлена $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ **имеет действительный корень в интервале *(-1;1)***

Решение. Найдем корни данного многочлена: $x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2(x+1) = 0$ **то есть** $x_1 = x_2 = 1; x_3 = -1$

Так как *f(-1)=f(1)=0*, то по теореме Ролля *f'(x)* имеет корень в интервале *(-1;1)*. Найдем корни производной: $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1/3; x_2 = 1$

Таким образом, между корнями функции содержится корень производной, равный -1/3.

3.На дуге *AB* кривой $y = 2x - x^2$ **найти точку *M*, в которой касательная параллельна хорде *AB*, если *A(1;1)* и *B(3;-3)***

Решение. Функция $y = 2x - x^2$ непрерывна и дифференцируема при этих значениях *x*. По теореме Лагранжа между двумя значениями *a=1* и *b=3* существует значение *x=c*, удовлетворяющее равенству *f(b)-f(a)=f'(c)(x-a),* где *f'(x)=2-2x*. Подставив соответствующие значения, получим *f(3)-f(1)=f'(c)(3-1), -4=4(1-c)*. Отсюда *c=2, f(2)=0*. Таким образом, точка *M* имеет координаты *(2;0)*.

4. **На дуге *AB* кривой, заданной параметрическими уравнениями** $x = t^2; y = t^3$

найти точку *M*, в которой касательная параллельна хорде *AB*, если точкам *A* и *B* соответствуют значения *t=1* и *t=3*.

Решение. Угловой коэффициент хорды *AB* равен $\frac{y(3)-y(1)}{x(3)-x(1)}$ а угловой коэффициент касательной в точке *M* (при *t=c*) равен $\frac{y_t'(c)}{x_t'(c)}$ где $x_t' = 2t; y_t' = 3t^2$

Для определении *c* по теореме Коши получаем уравнение $\frac{y(3)-y(1)}{x(3)-x(1)} = \frac{y_t'(c)}{x_t'(c)}$ или

$$\frac{27-1}{9-1} = \frac{3c^2}{2c} \Rightarrow \frac{13}{4} = \frac{3}{2}c$$

Найденное значение *c=13/6* удовлетворяет неравенству *1<c<3*. Подставив значение t=c в уравнения кривой получим *x=169/36; y=2197/216.*

5. Применяя правило Лопиталя найти пределы.

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\sin x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2}{\cos x} = \frac{\ln 2}{1} = \ln 2$$

2. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x} = 0$$

3. $$\lim_{x\to+0} x\cdot\ln x = \{0\cdot\infty\} = \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = -\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to+0} x = 0$$

4. $$\lim_{x\to 0}(ctgx - \frac{1}{x}) = \{\infty-\infty\} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin x + x\cos x} = -\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin x + x\cos x} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} = -\frac{0}{1+1} = 0$$

Примеры для самостоятельного решения.

1. Проверить справедливость формулы Коши для функций $f(x)=x^3$ **и** $\varphi(x)=x^2+1$ **в интервале [1,2].**

2. Написать формулу Коши для функций $f(x)=e^{2x}$ **и** $\varphi(x)=1+e^x$ **в интервале [a,b].**

3. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $y=\sqrt[3]{x^2-3x+2}$ **в интервале [1,2].**

4. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $y=\ln\sin x$ **в интервале** $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$

5. Написать формулу Лагранжа для функции $y=x(1-\ln x)$ **в интервале [a.b].**

6.Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $y=\ln x$ **в интервале** $[1,e]$

7. Применяя правило Лопиталя найти пределы.

$$1)\lim_{x\to1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}\qquad 2)\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}\qquad 3)\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}\qquad 4)\lim_{x\to0}(x^2\ln x)\qquad 5)\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$$

$$6)\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}\qquad 7)\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}\qquad 8)\lim_{x\to a}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}\qquad 9)\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{1+2\ln\sin x}\qquad 10)\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n}$$