Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ

Институт права и национальной безопасности
Факультет таможенного дела

Раздел 1 тема №2

«СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ»

Лекция №1

профессор Резниченко Александр Васильевич

Москва – 2016

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. **Основные понятия и определения**
2. **Методы решения систем алгебраических уравнений**
3. **Системы линейных однородных уравнений**

Литература

1. «Высшая математика для экономического бакалавриата: Учебник и практикум» / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: "Юрайт", 2016.
2. «Математика для экономистов от арифметики до эконометрики: базовый курс» / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: "Юрайт", 2016.
3. Демидович Б.П., Кудрявцев В.А. «Краткий курс высшей математики: Учебное пособие для вузов» - М.: ООО «Издательство Астрель», 2011.

ПЕРВЫЙ ВОПРОС

Основные понятия и определения

Определение.

Системой ***m*** *линейных алгебраических уравнений с* ***n*** переменными называется система уравнений вида:

Краткая форма записи

$$\forall i = \overline{1, m} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i$$

где x_1, … x_n – неизвестные величины (*переменные*);

a_{ij}, b_i $(i = 1 \div m, j = 1 \div n)$ – произвольные числа, называемые соответственно *коэффициентами при переменных* и *свободными членами уравнений*.

Определение.

Решением системы m линейных алгебраических уравнений с n переменными называется такая совокупность чисел ($x_1=k_1$, $x_2=k_2$ …, $x_n=k_n$), при которых каждое уравнение системы превращается в верное равенство (тождество).

Определение.

Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она имеет не решений.

Определение.

Совместная система уравнений называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если решений больше одного.

Пример.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 = 20 \end{cases}$$

совместная и **неопределенная** ($x_1=c$, $x_2=10-2c$), c– любое число.

Матричная форма записи *системы m линейных алгебраических уравнений с n переменными*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

где $\boldsymbol{A}$ – матрица коэффициентов при переменных или матрица системы;
$\boldsymbol{X}$ – матрица-столбец переменных;
$\boldsymbol{B}$ – матрица-столбец свободных членов.

$$A_{m,n}\cdot X_{n,1}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Векторная форма записи *системы m линейных алгебраических уравнений с n переменными*

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \quad \dots \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

где $\boldsymbol{A_1, A_2 \dots A_n}$ – вектор-столбцы коэффициентов при переменных $\boldsymbol{x_1, \dots x_n}$;
$\boldsymbol{B}$ – вектор-столбец свободных членов.

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = B \qquad \text{или} \qquad \sum_{j=1}^{n} A_j x_j = B.$$

ВТОРОЙ ВОПРОС

Методы решения систем алгебраических уравнений

Решение системы методом обратной матрицы

Если определитель матрицы системы ***n*** линейных уравнений с ***n*** переменными (***определитель системы***) $\Delta = |A| \neq 0$ (т.е. матрица A – ***невырожденная***), то единственное решение системы определяется следующим образом:

$$\text{из матричной формы записи} \quad AX = B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B.$$

$$\text{Так как} \quad A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Пример.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 = 11 \end{cases}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix}; \quad \det A = 1 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = -1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A} = \frac{1}{(-1)}\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-5) \cdot 4 + 2 \cdot 11 \\ 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 2; \; x_2 = 1.$$

Решение системы методом Крамера

Теорема Крамера.

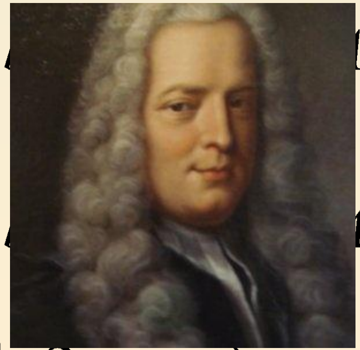
Пусть Δ – определитель матрицы A, Δ_j – определитель матрицы, получаемый из матрицы A заменой j-го столбца столбцом сво-бодных членов. Тогда, если Δ ≠ 0, то система имеет единствен-ное решение, определяемое по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Доказательство.

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + \ldots A_{n2} \\ \\ b_1A_{1n} + \ldots A_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$x_j = \frac{1}{\Delta}(b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \ldots + b_nA_{nj}) = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (\forall j = 1, 2, \ldots, n).$$



Габриэль Крамер

Пример.

Решить систему по формулам **Крамера** :

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 = 3. \end{cases}$$

Решение.

Определитель

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 18 \neq 0,$$

следовательно, по теореме **Крамера** система имеет единственное решение.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 18, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -36.$$

Теперь по формулам **Крамера**:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{18}{18} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{18} = 0, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-36}{18} = -2.$$

Метод Гаусса системы *m* линейных уравнений с *n* переменными

Метод Гаусса – *метод последовательного исключения переменных* – заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной* системе ступенчатого (треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Переход от исходной сис вносильной ей системе ступенчатого (треугольного) в вается *прямым ходом метода Гаусса*, а нахождение п х – *обратным ходом*.

Иоганн Карл Фридрих Гаусс

Преобразования Гаусса удоб ть не с самими уравнениями, а с расширенной матри ициентов (**A**|**B**) – *расширенной матрицей системы* – д матрице **A** приписывают столбец свободных членов **B**.

---

* *Две системы уравнений называются* ***равносильными*** *(****эквивалентными****), если они имеют одно и то же множество решений.*

Пример.

Методом **Гаусса** решить систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 20, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 17, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4. \end{cases}$$

Решение.

Выпишем расширенную матрицу системы.

Для удобства вычислений (чтобы $a_{11} = 1$) поменяем местами первую и четвертую строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -5 \\ 3 \\ -2 \end{array}$$

Шаг 1. Умножим элементы первой строки на -5, 3 и -2 и прибавим их соответственно к элементам второй, третьей и четвертой строк, чтобы под элементом a_{11} в первом столбце образовалась «ступенька» из нулей.

Для проведения второго шага необходимо, чтобы в новой матрице $a_{22} \neq 0$, но удобнее, чтобы $a_{22} = 1$ или $a_{22} = -1$. Поэтому переставим вторую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array}\right) \quad 4 \quad 3$$

Шаг 2. Элементы второй строки умножаем на 4 и 3 и прибавляем соответственно к элементам третьей и четвертой строк, тогда под элементом a_{22} во втором столбце появится вторая «ступенька».

Шаг 3. Так как в полученной матрице $a_{33} = 26 \neq 0$, умножаем элементы третьей строки на -24/26 (-12/13) и прибавляем к элементам четвертой строки.

$$\begin{array}{c} \\ \\ (-12/13) \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 24 & -5 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{13} & \frac{19}{13} \end{array}\right).$$

Расширенная матрица приведена к ступенчатому виду.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4, \\ \quad\; - x_2 + 11x_3 - 4x_4 = -11, \\ \qquad\qquad 26x_3 - 7x_4 = -7, \\ \qquad\qquad\qquad \frac{19}{13}x_4 = \frac{19}{13}. \end{cases} \Rightarrow x_4 = 1,\ x_3 = 0,\ x_2 = 7,\ x_1 = 5.$$

Замечание.

Обратный ход метода Гаусса можно проводить и с расширенной матрицей, не переходя к системе, если эту матрицу с помощью элементарных преобразований привести к диагональной.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{13} & \frac{19}{13} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 11 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 26 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 11 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 5,\ x_2 = 7,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1\ .$$

Теорема Кронекера – Капелли.

Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы.

Для совместных систем линейных уравнений верны **теоремы**:

1. Если ранг матрицы совместной системы равен числу переменных, т.е. $r = n$, то ***система имеет единственное решение***.

Пример.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \\ x_1 + 2x_2 = \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3 \\ 2x_2 = 4 \end{cases};$$

$$r(A) = r(A \mid \quad) = r(A \mid B) = \quad r(A \mid B) = 2.$$

Леопольд Кронекер

$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Альфредо Капелли

$c \quad x = \begin{pmatrix} c \\ 3 - c \end{pmatrix}$

?

ений нет.

Определение.

Пусть $r < n$, тогда r переменных $x_1, x_2, \ldots, x_r$ называются **основными** или ***базисными***, если определитель матрицы из коэффициентов при них (***базисный минор***) отличен от нуля.

Остальные $n - r$ переменных называются ***неосновными*** или **свободными**.

Определение.

Решение системы m линейных уравнений с n переменными, в котором все $n - r$ неосновных переменных равны нулю, называется ***базисным***.

Таким образом, *совместная система* m *линейных уравнений с* n *переменными* $(m < n)$ *имеет бесконечное множество реше-ний, среди которых базисных решений конечное число, не превосходящее* C_n^r*, где* $r \le m$.

Пример.

Методом **Гаусса** решить систему: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$

Решение.

Преобразуем расширенную матрицу системы, взяв в качестве первой строки коэффициенты второго уравнения ($\boldsymbol{a_{21}}$ = 1):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right) \Rightarrow r = 2.$$

Оставляем в левой части переменные $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, которые берем за базисные (базисный минор – $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$).

Получаем систему

Общее решение системы

$$\left(x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}c_2;\; x_2 = -\frac{17}{5} + c_1 - \frac{7}{5}c_2;\; x_3 = c_1;\; x_4 = c_2 \right).$$

Пример.

Найти все базисные решения системы :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6. \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

Решение.

Ранг матрицы системы r = 2.

Общее число базисных переменных не более $C_n^r = C_4^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6,$ а именно: x_1, x_2; x_1, x_3; x_1, x_4; x_2, x_3; x_2, x_4; x_3, x_4.

Из всех возможных групп базисных переменных только x_2, x_3 не могут быть основными, поскольку

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Найдем ***первое базисное решение***, взяв в качестве основных переменных x_1, x_2 а неосновных – x_3 = 0 и x_4 = 0.

Замечание.

Все базисные решения системы можно найти из общего решения, полученного в предыдущем примере, последовательно приравнивая соответствующие переменные нулю.

ТРЕТИЙ ВОПРОС

Системы линейных однородных уравнений

Определение.

Система m линейных уравнений с n переменными называется ***системой линейных однородных уравнений***, если все их свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Свойства:

1. Система линейных однородных уравнений всегда совместна, так как она имеет, ***по крайней мере***, ***нулевое решение.***

2. Если в системе $m = n$, а ее определитель отличен от нуля, то такая система имеет ***только нулевое решение***.

3. Система линейных однородных уравнений имеет ***ненулевве решения*** тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы коэффициентов при переменных меньше числа переменных: $r(A)<n$.

Определение.

Обозначим решение системы линейных однородных уравнений $x_1 = k_1,\ x_2 = k_2, \ldots,\ x_n = k_n$ в виде строки $e_1 = (k_1, k_2 \ldots k_n)$

Ненулевые векторы $e_1, e_2, \ldots, e_k$ называются **линейно независимыми**, если их линейная комбинация равна нулевому вектору только при нулевых значениях числовых коэффициентов (**тривиальная линейная комбинация**):

Свойства решений:

1. Если строка $e_1 = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ – решение системы, то и строка $\lambda e_1 = (\lambda k_1, \lambda k_2 \ldots, \lambda k_n)$ – **также решение этой системы**.

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_k e_k = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0\ \forall i = 1 \div k.$$

в противном случае (**нетривиальная линейная комбинация**)

2. Если строки $e_1 = (k_1, k_2 \ldots, k_n)$ и $e_2 = (l_1, l_2 \ldots, l_n)$ – решения системы, то при любых c_1 и c_2 их линейная комбинация

$$\exists i\ \lambda_i \neq 0 \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = 0$$

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 = (c_1 k_1 + c_2 l_1,\ c_1 k_2 + c_2 l_2,\ \ldots,\ c_1 k_n + c_2 l_n)$$

– **также решение данной системы**.

эти векторы называются **линейно зависимыми**.

Определение

Всякая линейная комбинация решений системы линейных однородных уравнений также является решением этой системы.

Система линейно независимых решений $e_1, e_2, \ldots, e_k$ называется **фундаментальной**, если каждое решение системы является линейной комбинацией решений $e_1, e_2, \ldots, e_k$.

Теорема.

Если ранг r матрицы A коэффициентов при переменных системы линейных однородных уравнений меньше числа переменных n $(r(A) = r < n)$, то всякая ***фундаментальной система решений системы линейных однородных уравнений*** состоит из $k = n - r$ решений .

Общее решение системы имеет вид:

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots + c_k e_k,$$

где $e_1, e_2, \ldots, e_k$ – любая фундаментальной система решений;

$c_1, c_2, \ldots, c_k$ – произвольные числа.

Для нахождения фундаментальной системы решений:

а) r ***основных*** (***базисных***) ***переменных*** (с отличным от нуля базисным минором) выражают через ***свободные переменные***;

б) поочередно заменяют $(n - r)$ ***неосновных переменных*** элементами каждой строки ***невырожденной квадратной матрицы порядка*** $n - r$, например, единичной E_{n-r}.

Пример.

Найти фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Аналогично находим выражения основных переменных x_1, x_2, через свободные x_3, x_4.

Получаем систему
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2x_3 - 3x_4 \\ -5x_2 = -5x_3 + 7x_4 \end{cases}.$$

Для нахождения фундаментальной системы решений заменяем поочередно неосновные переменные x_3, x_4 элементами строк единичной матрицы: $E_{4-2} = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

При $x_3 = 1$, а $x_4 = 0$ получаем из системы $x_2 = 1$, а $x_1 = 0$.

При $x_3 = 0$, а $x_4 = 1$ получаем из системы $x_2 = -7/5$, а $x_1 = -1/5$.

Фундаментальную систему решений образуют решения:

$e_1 = (0;1;1;0)$; $e_2 = (-1/5; -7/5; 0; 1)$.

Пример.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Теорема.

***Общее решение системы m линейных уравнений с n переменными* равно сумме общего решения соответствующей ей системы линейных однородных уравнений и произвольного частного решения системы.**

$$x^{об} = x^{ч} + c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ne_n,$$

где $x^{об}$ и $x^{ч}$ – соответственно общее и частное решения системы m линейных уравнений с n переменными;

$e_1, e_2, \ldots, e_n$ – фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений.

Решение.

Общее решение системы

$$x^{об} = \left(x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}c_2;\ x_2 = -\frac{17}{5} + c_1 - \frac{7}{5}c_2;\ x_3 = c_1;\ x_4 = c_2 \right)$$

Частное (базисное)

$$x^{ч} = \left(\frac{4}{5};\ -\frac{17}{5};\ 0;\ 0 \right), \text{ при } c_1 = 0 \text{ и } c_2 = 0.$$

Сравнивая их, получаем:

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} - \frac{1}{5}c_2 \\ -\frac{17}{5} + c_1 - \frac{7}{5}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -17/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1/5 \\ -7/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ или } x^{об} = x^{ч} + c_1e_1 + c_2e_2.$$

Фундаментальная система решений однородной системы:

$$e_1 = (0;1;1;0);\quad e_2 = (-1/5;\ -7/5;\ 0;\ 1).$$

Благодарю за внимание, лекция окончена!