Предел функции в бесконечности

С понятием предела последовательности

$a_n = f(n)$ тесно связано понятие функции

$y = f(x)$ в бесконечности.

Этот предел функции обозначается

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to \infty$.

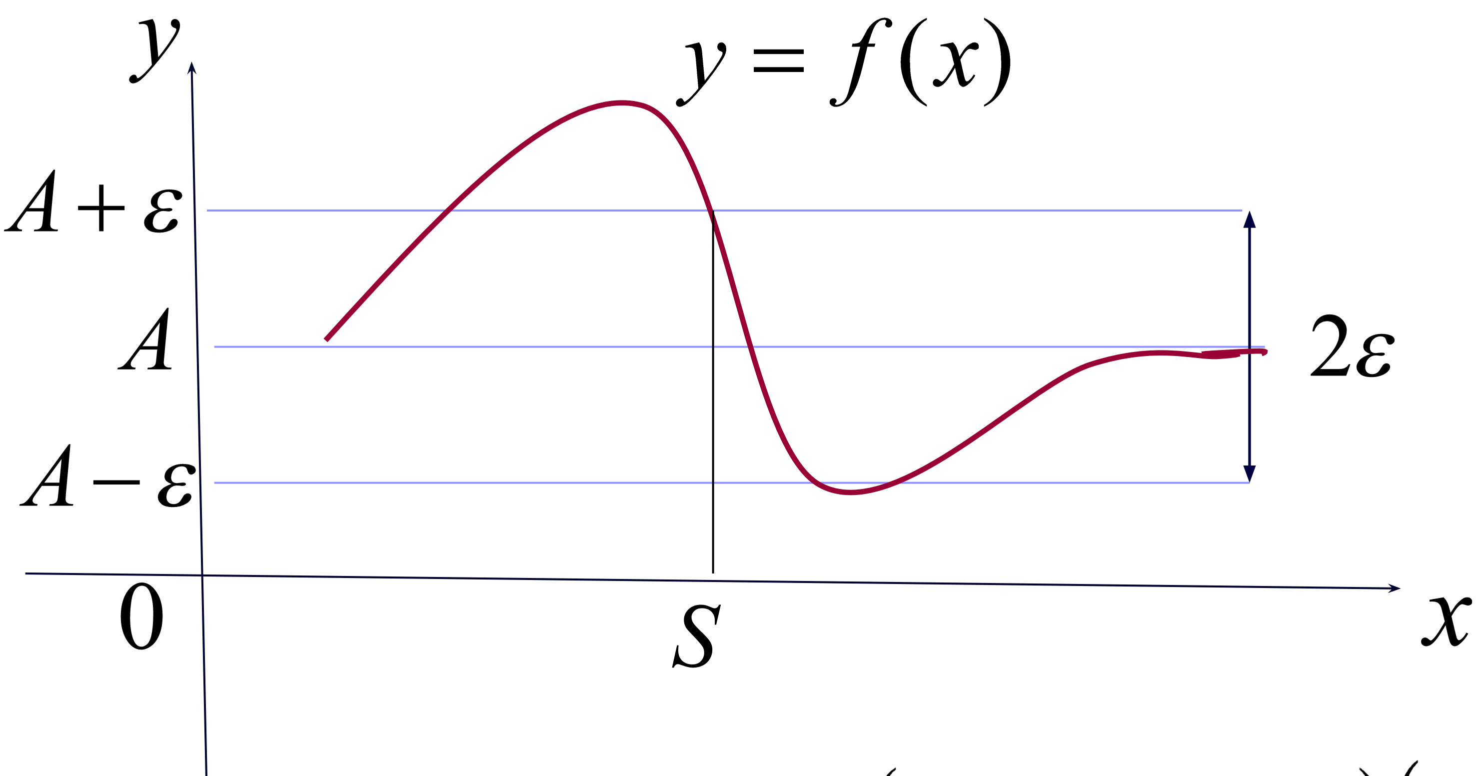
С помощью логических символов определение запишется

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\left(\exists S = S(\varepsilon) > 0\right)\left(\forall x : |x| > S\right)$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Геометрический смысл предела функции в бесконечности.



$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \ (\forall \varepsilon > 0)\big(\exists S = S(\varepsilon) > 0\big)\big(\forall x : |x| > S\big)$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

- ***Замечание.*** Приведенное выше определение предела при $x \to \infty$ предполагает неограниченное возрастание независимой переменной x по абсолютной величине. Можно сформулировать понятие предела при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. В первом случае основное неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon.$ выполняется для всех $x > S$, а во втором случае для всех $x < -S$

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

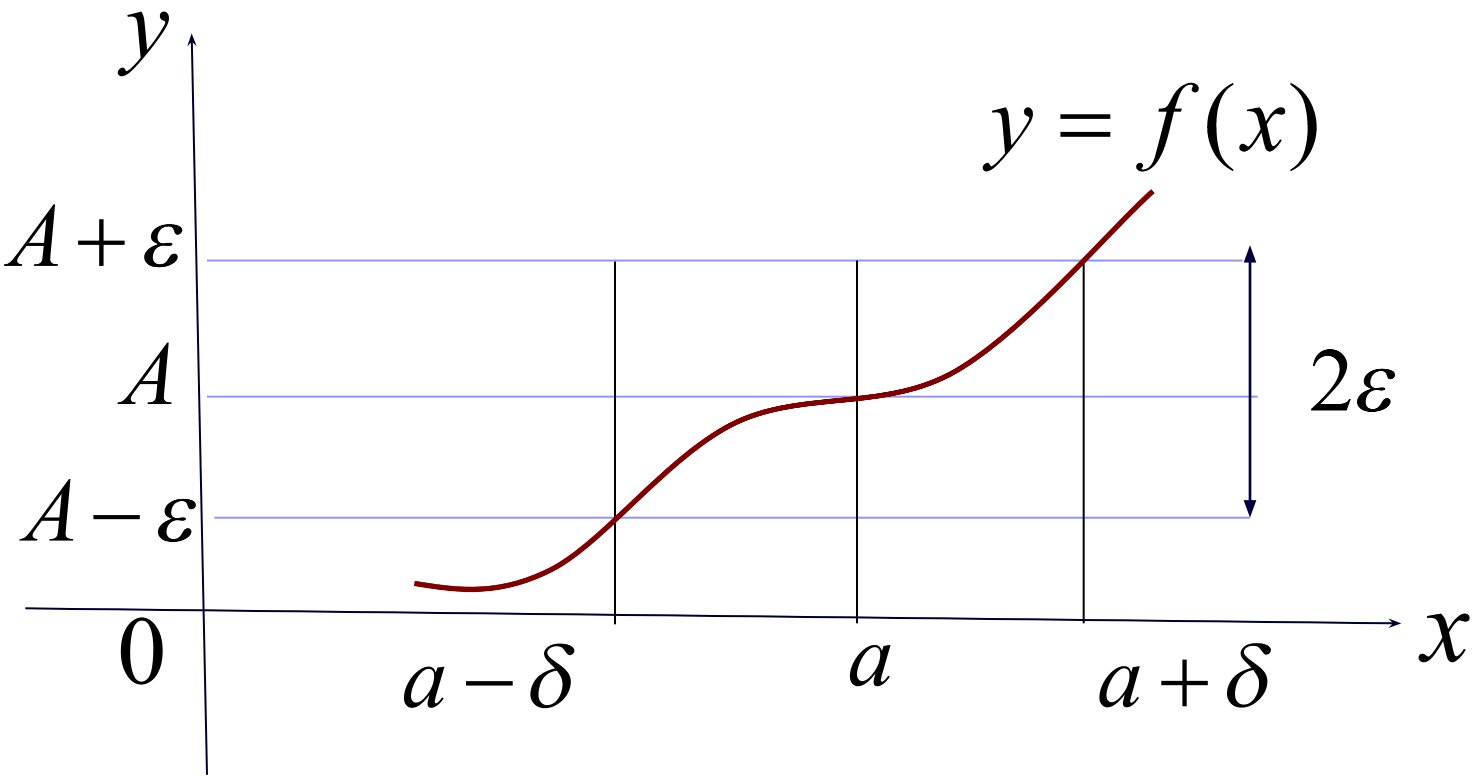
- **Определение 2.** Число A называется <u>*пределом*</u> *(по Коши)* <u>*функции*</u> $y = f(x)$ <u>*в точке*</u> a (или при $x \to a$), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется отвечающее ему положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для всех значений аргумента $x \in D(f)$, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta,$ справедливо неравенство:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Для обозначения предела используют символику:

$y = f(x)$ (или $f(x) \to A$ при $x \to a$).

Геометрический смысл предела функции в точке



$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta, \; x \neq a \quad a-\delta < x < a+\delta$

$A-\varepsilon_0 < y < A+\varepsilon_0.$

- **Замечание 1.** Определение предела не требует существования функции в самой точке a. Т.е. x стремится к a, но не достигает значения a.

  Замечание 2. Если при стремлении x к a переменная x принимает лишь значения меньшие a, или, наоборот, лишь значения, большие a и при этом функция $y = f(x)$ стремится к некоторому числу *A*, то говорят об *односторонних* пределах функции $y = f(x)$ соответственно *слева*

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = A$$

  и справа

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = A.$$

Односторонние пределы

- **Определение 3.** Число *A* называется <u>*левым (правым) пределом функции*</u> $y = f(x)$ <u>*в точке*</u> a (или при $x \to a$), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется отвечающее ему положительное число δ такое, что для всех значений аргумента $x \in D(f)$, удовлетворяющих условию $a - \delta < x < a$ ($a < x < a + \delta$),справедливо неравенство:

$$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon.$$

Используют символику:

$A = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0) -$ для правого предела,

$A = \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a-0) -$ для левого предела.

- **Определение 4.** Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке a *предел* $\infty \left(+\infty \text{ или } -\infty\right)$, если для любого положительного числа M можно указать отвечающее ему положительное число δ такое, что для всех значений аргумента $x \in D(f)$, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство:

$$|f(x)| > M \quad \left(f(x) > M \text{ или } f(x) < -M\right).$$

- При этом используют символику:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad \left(\lim_{x \to a} f(x) = +\infty,\ \lim_{x \to a} f(x) = -\infty\right).$$

Бесконечно малые величины их свойства

- **Определение 4.** Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой величиной* при $x \to a$, если ее предел равен нулю:

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0.$$

- **Теорема 1.** Если функция $y = f(x)$ имеет при $x \to a$ $(x \to \infty)$ предел, равный *A*, то ее можно представить в виде суммы этого числа ***A*** и бесконечно малой величины $\alpha(x)$ при $x \to a$ $(x \to \infty)$, т.е. $f(x) = A + \alpha(x).$

- **Теорема 2.** Если функцию $y = f(x)$ можно представить как сумму числа *A* и бесконечно малой величины $\alpha(x)$ при $x \to a$ $(x \to \infty)$, то число *A* есть предел этой функции при $x \to a$ $(x \to \infty)$, т.е.

$$\lim_{x \to a(\infty)} f(x) = A.$$

Основные свойства бесконечно малых величин

- 1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечная малая.
- 2. Произведение бесконечно малой величины на ограниченную функцию есть величина бесконечно малая.
- 3. Частное от деления бесконечно малой величины на функцию, предел которого отличен от нуля, есть величина бесконечно малая.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕДЕЛА

- **1)** $A = \lim\limits_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow A = f(a-0) = f(a+0)$
- **2)** Справедливо равенство (*первый замечательный предел*):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

- **3)** Если $\lim \alpha(x) = 0$ то $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$
- **4)** Справедливо равенство (*второй замечательный предел*):

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$ (или $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e$),

где e - основание натурального логарифма,

- **5)** Если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0,$ то $\lim\limits_{x\to a}\left(1+\alpha(x)\right)^{1/\alpha(x)}=e.$
- **Если существуют конечные пределы:**

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = A, \qquad \lim_{x\to a} f_2(x) = B.$$

то справедливы следующие равенства:

- **6)** $$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)=\lim_{x\to a} f_1(x)\pm\lim_{x\to a} f_2(x);$$
- **7)** $$\lim_{x\to a}\left(c\cdot f_1(x)\right)=c\cdot\lim_{x\to a} f_1(x)$$, если $c=const;$
- **8)** $$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\right)=\lim_{x\to a} f_1(x)\cdot\lim_{x\to a} f_2(x);$$

- **9)** $$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}\quad \left(\text{ если } \lim_{x\to a} f_2(x)\neq 0\right);$$
- **10)** $$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)\right)^k=\left(\lim_{x\to a} f_1(x)\right)^k,\quad \text{где } k\in R.$$

- а) *Если при замене* "x" *на* "а" *под знаком предела получают определенное число, то оно и будет значением предела:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

- б) *Если при замене* "x" *на* "а" *под знаком предела получают*

$$\left[\frac{c}{0}\right], c \neq 0; \left[\frac{\infty}{c}\right], c \neq \infty; [c\cdot\infty], c \neq 0; [\infty+\infty],$$

- *где с – число, то*

$$\infty\left(+\infty \text{ или } -\infty\right),$$

- в) *Если при замене* "x" *на* "а" *под знаком предела получают*

$$\left[\frac{0}{0}\right]; \left[\frac{\infty}{\infty}\right]; [0\cdot\infty]; [\infty-\infty]; \left[0^0\right]; \left[1^\infty\right]; \left[\infty^0\right],$$

то говорят, что под знаком предела *неопределенность.*

- В таком случае задача вычисления предела $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

сводится к ***раскрытию неопределенности***:

тождественными преобразованиями «убирают» неопределенность, если это возможно, и вычисляют предел.

Примеры

- **П р и м е р 1.** Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x+2}{2x+3}.$

Р е ш е н и е: $$\lim_{x\to 4}\frac{5x+2}{2x+3}=\left[\frac{5\cdot 4+2}{2\cdot 4+3}=\frac{22}{11}=2\right]=2.$$

- **П р и м е р 2.** Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2^x+3}{2^x-1}.$

Р е ш е н и е: $$\lim_{x\to -\infty}\frac{2^x+3}{2^x-1}=\left[\frac{0+3}{0-1}=-3\right]=-3.$$

- **Пример 3.** Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x+3}{2^x-1}$.

Решение:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+3}{2^x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{2^x}}{1-\frac{1}{2^x}}=1.$$

- **Пример 4.** Вычислить: предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+1}{4x^3+x+1}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+1}{4x^3+x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2-5x+1}{x^3}}{\frac{4x^3+x+1}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{4+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\left[\frac{0}{4}\right]=0.$$

О т в е т: 0.

- **П р и м е р 5.** Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{2x^2-3x-9}$.

Р е ш е н и е: $$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{2x^2-3x-9}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)\cdot(x+3)}{2\cdot(x-3)\cdot(x+1{,}5)}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x+3}{2x+3}=\left[\frac{3+3}{2\cdot3+3}=\frac{2}{3}\right]=\frac{2}{3}.$$

- **Пример 7.** Найти предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{4x}$

Решение:

$$\frac{5\cdot\sin 5x}{4\cdot 5x}=\frac{5}{4}\cdot\frac{\sin 5x}{5x};\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{5}{4}\cdot\frac{\sin 5x}{5x};$$

Согласно свойству 7, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{5}{4}\cdot\frac{\sin 5x}{5x}=\frac{5}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=\frac{5}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{5}{4}.$

Пример 8. Найти предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x+5}$.

Решение:

$$\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x+5}=\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{2}\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)^{5}.$$

Согласно свойству 8, имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x+5}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{2}\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)^{5}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{2}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{5}=e^{2}\cdot 1=e^{2}.$$

Ответ: e^2.

Непрерывность функции.

О п р е д е л е н и е 1. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, принадлежащей области определения $D(f)$, если функция $y = f(x)$ имеет в точке a конечный предел, равный числу $f(a)$, то есть

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

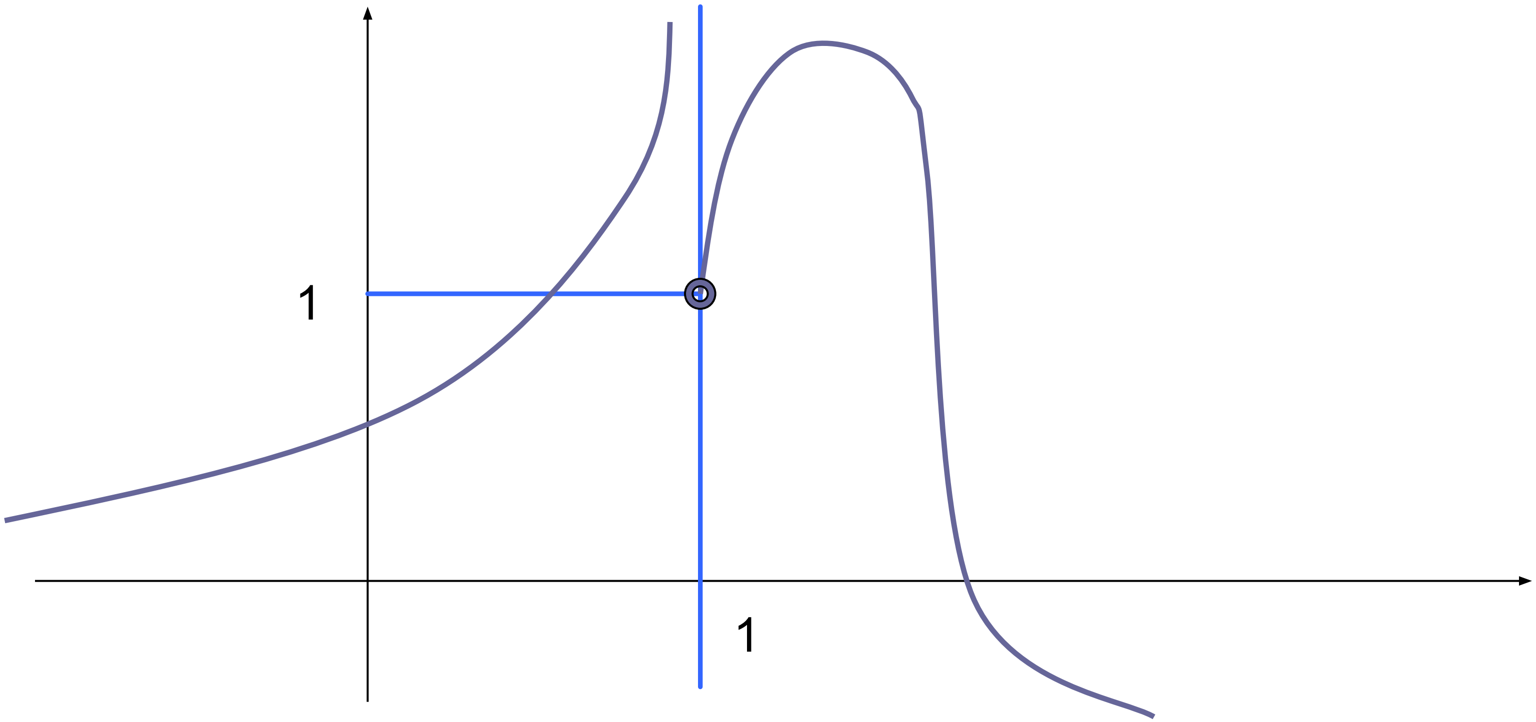
О п р е д е л е н и е 2. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной справа* (*слева*) *в точке* a из $D(f)$, если в точке a существует конечный правый (левый) предел функции, равный числу $f(a)$, то есть

$$f(a+0) = \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a); \quad \left(f(a-0) = \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a) \right).$$

- Из свойств предела вытекает следующее утверждение.
- **<u>Т е о р е м а 1</u>.** Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда в этой точке справедливы равенства:

$$f(a) = f(a+0) = f(a-0).$$

- *Пример:* Рассмотрим функцию $y = f(x)$.



- **<u>Определение 3.</u>** Функция $y = f(x)$ называется ***<u>непрерывной в интервале</u>*** $(b; c)$, если она непрерывна в любой его точке.

Функция $y = f(x)$ называется ***<u>непрерывной на отрезке</u>*** $[b; c]$, если она непрерывна в интервале $(b; c)$, непрерывна справа в точке непрерывна слева в точке $x = b,\quad x = c$.

Точки разрыва функции

- <u>**О п р е д е л е н и е .**</u> Точка $x = a$, являющаяся предельной точкой множества $D(f)$, называется точкой *<u>разрыва функции</u>* $y = f(x)$, если в точке a эта функция либо не определена, либо определена, но нарушено условие непрерывности.

О п р е д е л е н и е. Точка разрыва $x = a$ называется *точкой устранимого разрыва* функции $y = f(x)$, если в этой точке предел функции $f(x)$ существует, но $f(x)$ в точке a либо не определена, либо значение $f(a)$ не совпадает с найденным пределом, то есть

$$f(a-0) = f(a+0) \neq f(a).$$

Пример: Функция

$$y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{при } x = 0 \\ 0 & \text{при } x \neq 0 \end{cases}$$

Имеет в точке x=0 устранимый разрыв, т.к: $y(a-0) = y(a+0) = 1.$ $y(0) = 0$

- **О п р е д е л е н и е .** Точка разрыва $x = a$ называется *точкой разрыва первого рода* функции $y = f(x)$, если в этой точке функция имеет конечные, но не равные друг другу правый и левый пределы, то есть: $f(a-0) \neq f(a+0)$.

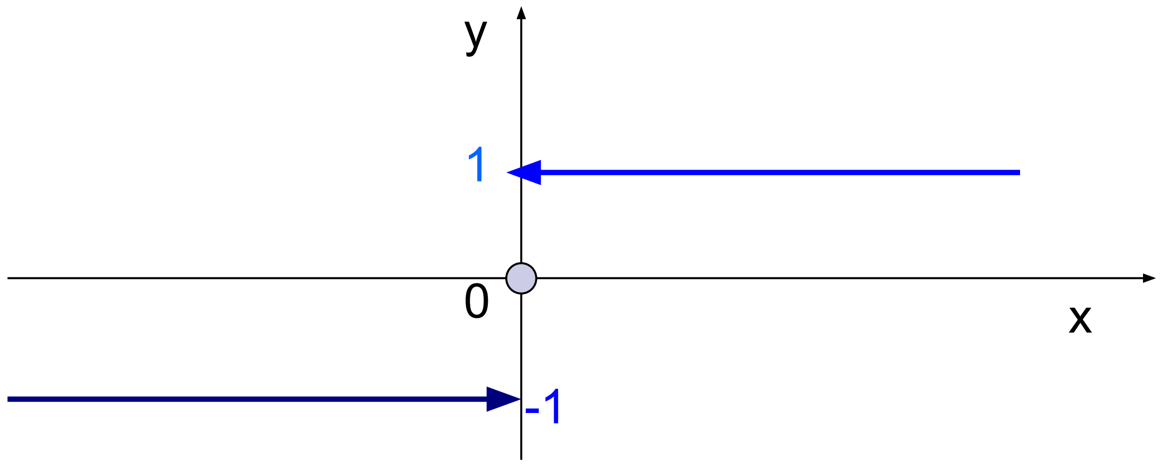
- **Пример:**

$$y = \operatorname{sgn} x = \left[\begin{array}{lll} 1 & \text{при} & x > 0 \\ 0 & \text{при} & x = 0 \\ -1 & \text{при} & x < 0 \end{array}\right.$$

«знак» числа x имеет в точке $x=0$ разрыв первого рода, т.к:

$$y(0-0) = 1, y(0+0) = 1, y(0) = 0$$

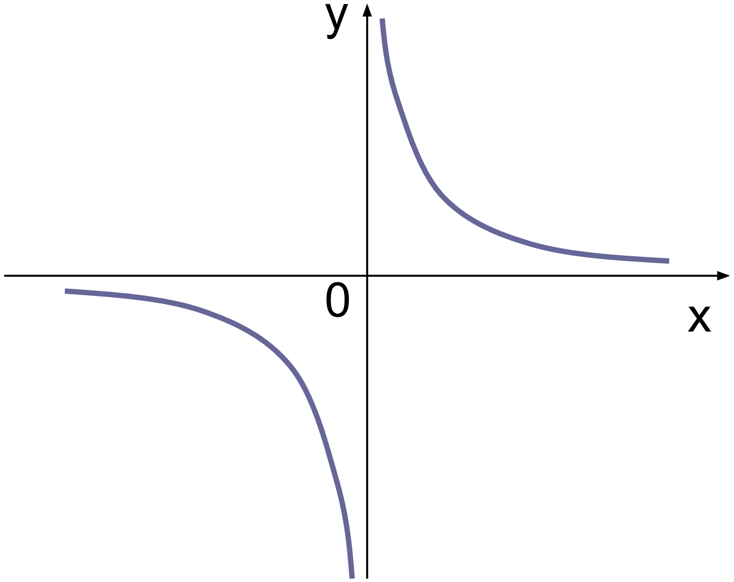
О п р е д е л е н и е . Точка разрыва $x = a$ называется ***точкой разрыва второго рода*** функции $y = f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет, по крайней мере, одного из односторонних пределов или хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности.



$$y = \operatorname{sgn} x$$

- Пример. Функция $y=\dfrac{1}{x}$ имеет в точке $x=0$ разрыв второго рода, так как в данном случае число $y(0)$ не определено

$$y(0-0)=-\infty,\ y(0+0)=+\infty$$



- **Т е о р е м а 1.** Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке a и существует конечный предел $\lim_{x \to a} f_1(x)$, то справедливо равенство:

$$\lim_{x \to a} f\left(f_1(x)\right) = f\left(\lim_{x \to a} f_1(x)\right)$$

- **Т е о р е м а 2.** Сумма, разность, произведение, частное, суперпозиция конечного числа непрерывных функций (то есть любая элементарная функция) есть функция, непрерывная во всех точках области определения.