

Формула Мора

Правило Верещагина

Доцент кафедры
самолетостроения
к.т.н. Мухин Д.В.

1. Интеграл Мора

Используется в тех случаях, когда требуется найти перемещение в направлении не совпадающем с направлением действия сил.

Сущность интеграла Мора в следующем идеальном построении:

1. Прикладываем в интересующем направлении внешнюю силу $\overline{\Phi}$.
2. Составляем для системы выражение для потенциальной энергии деформации U .
3. Дифференцируем выражение для U по $\overline{\Phi}$ и получаем выражение для перемещения в направлении действия $\overline{\Phi}$ (то есть в интересующем направлении)
4. В полученном выражении приравниваем $\overline{\Phi}=0$, получаем окончательное выражение.

Фиктивную силу $\bar{\Phi}$ представляем в виде произведения скалярной величины Φ на единичный силовой фактор в соответствующем направлении.

Таким образом фиктивная сила в зависимости от интересующего нас направления будет выражена:

$N_1 \Phi$ - в случае продольной силы. Определяем продольное перемещение. N_1 – единичная продольная сила приложенная в интересующей нас точке.

$Q_{z1} \Phi$ - в случае горизонтальной перерезывающей силы. Определяем прогиб в горизонтальной плоскости. Q_{z1} – единичная горизонтальная перерезывающая сила приложенная в интересующей нас точке.

$Q_{y1} \Phi$ - в случае вертикальной перерезывающей силы. Определяем прогиб в вертикальной плоскости. Q_{y1} – единичная горизонтальная перерезывающая сила приложенная в интересующей нас точке.

$M_{K1}\Phi$ - в случае крутящего момента. Определяем угол закручивания. M_{K1} – единичный крутящий момент приложенный в интересующей нас точке.

$M_{y1}\Phi$ - в случае момента изгибающего в горизонтальной плоскости. Определяем угол поворота сечения в горизонтальной плоскости. M_{y1} – единичный изгибающий момент в горизонтальной плоскости приложенный в интересующей нас точке.

$M_{z1}\Phi$ - в случае момента изгибающего в вертикальной плоскости. Определяем угол поворота сечения в вертикальной плоскости. M_{z1} – единичный изгибающий момент в вертикальной плоскости приложенный в интересующей нас точке.

После приложения фиктивной силы Φ значения силовых факторов в интересующем сечении будут равны сумме значений силовых факторов от исходной системы сил и от силы Φ .

$$N = N_P + N_1\Phi; \quad Q_y = Q_{yP} + Q_{y1}\Phi; \quad Q_z = Q_{zP} + Q_{z1}\Phi;$$

$$M_K = M_{KP} + M_{K1}\Phi; \quad M_y = M_{yP} + M_{y1}\Phi; \quad M_z = M_{zP} + M_{z1}\Phi.$$

$N_P, Q_{yP}, Q_{zP}, M_{KP}, M_{yP}, M_{zP}$ - значения силовых факторов до приложения силы Φ . (То есть в реально существующей системе)

Подставляем в формулу для внутренней энергии:

$$U = \int_0^l \frac{(N_P + N_1\Phi)^2}{2EA} dx + \int_0^l \frac{k_y (Q_{yP} + Q_{y1}\Phi)^2}{2GA} dx + \int_0^l \frac{k_z (Q_{zP} + Q_{z1}\Phi)^2}{2GA} dx + \int_0^l \frac{(M_{KP} + M_{K1}\Phi)^2}{2GI_K} dx + \int_0^l \frac{(M_{yP} + M_{y1}\Phi)^2}{2EI_y} dx + \int_0^l \frac{(M_{zP} + M_{z1}\Phi)^2}{2EI_z} dx$$

Дифференцируя по Φ , и принимая после этого $\Phi=0$, находим перемещение.

(формулы громоздкие, поэтому на примере одного слагаемого)

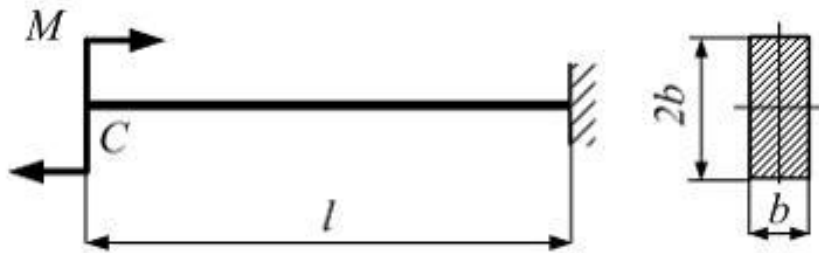
$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\int_0^l \frac{(N_P + N_1 \Phi)^2 dx}{2EA} \right) \right|_{\Phi=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\int_0^l \frac{(N_P^2 + 2N_P N_1 \Phi + (N_1 \Phi)^2) dx}{2EA} \right) \right|_{\Phi=0} = \\ & \left. \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\int_0^l \frac{N_P^2 dx}{2EA} \right) \right|_{\Phi=0} + \left. \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\int_0^l \frac{2N_P N_1 \Phi dx}{2EA} \right) \right|_{\Phi=0} + \left. \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\int_0^l \frac{(N_1 \Phi)^2 dx}{2EA} \right) \right|_{\Phi=0} = \\ & = 0 + \left. \left(\int_0^l \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\frac{2N_P N_1 \Phi}{2EA} \right) dx \right) \right|_{\Phi=0} + \left. \left(\int_0^l \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\frac{(N_1 \Phi)^2}{2EA} \right) dx \right) \right|_{\Phi=0} = \\ & = \left. \left(\int_0^l \frac{N_P N_1}{EA} dx \right) \right|_{\Phi=0} + \left. \left(\int_0^l \frac{2N_1 \Phi}{2EA} dx \right) \right|_{\Phi=0} = \int_0^l \frac{N_P N_1}{EA} dx \end{aligned}$$

Суммируя все интегралы находим перемещение

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial \Phi} \Big|_{\Phi=0} = \int_0^l \frac{N_P N_1}{EA} dx + \int_0^l \frac{k_y Q_{yP} Q_{y1}}{GA} dx + \int_0^l \frac{k_z Q_{zP} Q_{z1}}{GA} dx +$$
$$+ \int_0^l \frac{M_{KP} M_{K1}}{GI_K} dx + \int_0^l \frac{M_{yP} M_{y1}}{EI_y} dx + \int_0^l \frac{M_{zP} M_{z1}}{EI_z} dx$$

Формула носит название *формула Мора*, а входящие в формулу интегралы – *интегралы Мора*

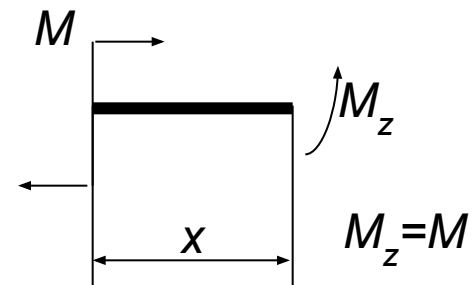
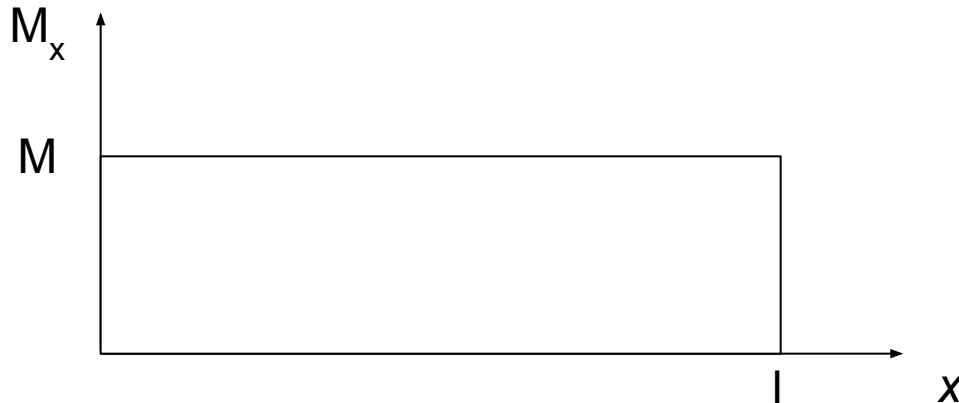
Пример



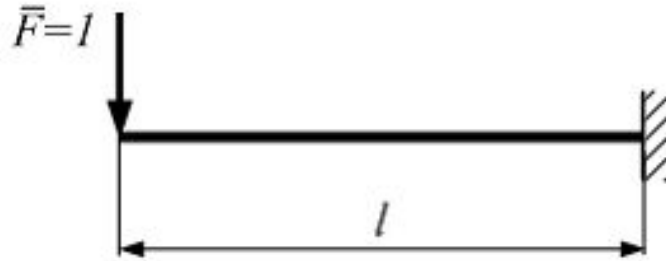
Балка прямоугольного сечения с размерами b и $2b$ нагружена моментом M . Модуль упругости материала E , длина l заданы. Найти прогиб концевого сечения балки C

Решение

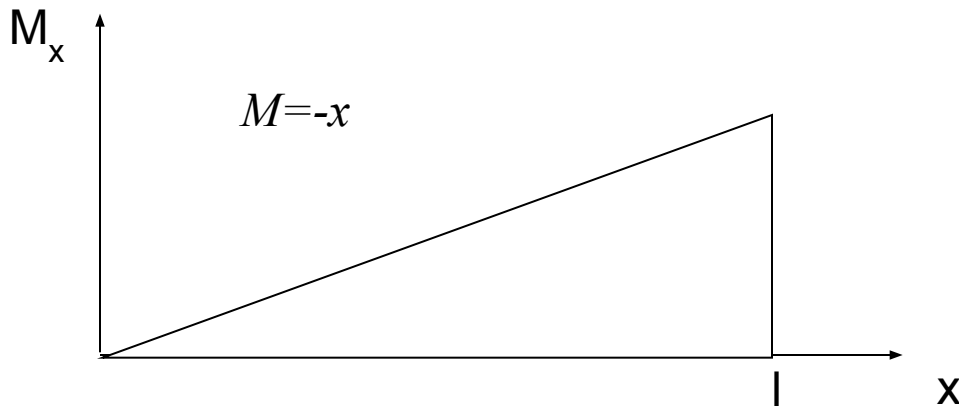
1. Строим эпюр изгибающего момента



2. Прикладываем единичную внешнюю силу в направлении интересующего перемещения

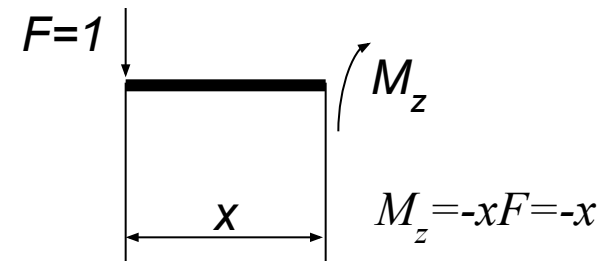


3. Строим эпюр изгибающего момента от единичной силы



4. Составляем интеграл Мора

$$\delta_C = \int_0^l \frac{M(-x)}{EI_z} dx$$



5. Вычисляем интеграл

$$I_z = \frac{b(2b)^3}{12}$$

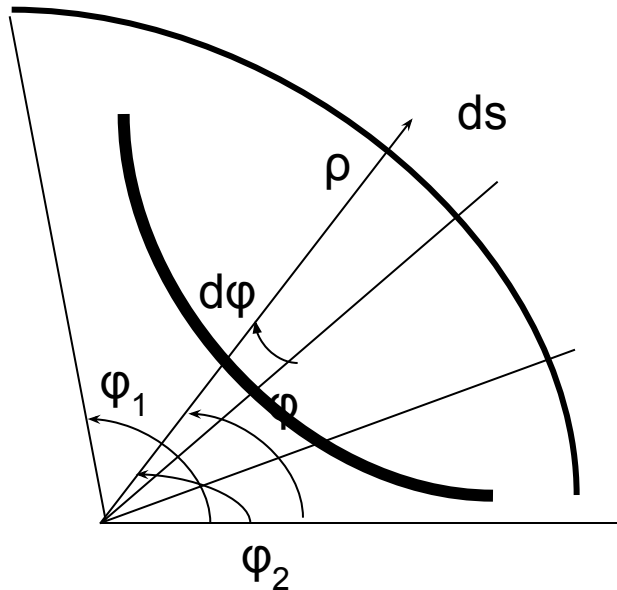
$$\delta_c = \int_0^l \frac{12 \cdot M(-x)}{E \cdot 8b^4} dx = \frac{3}{2} \frac{M}{Eb^4} \int_0^l (-x) dx = \frac{3}{4} \frac{Ml^2}{Eb^4}$$

Интеграл Мора можно использовать для определения перемещений как прямолинейных, так и криволинейных стержневых систем.

Поскольку интеграл Мора вычисляется по длине, для криволинейных стержней вместо dx в подынтегральном выражении используется элемент длины дуги $ds = \rho d\varphi$

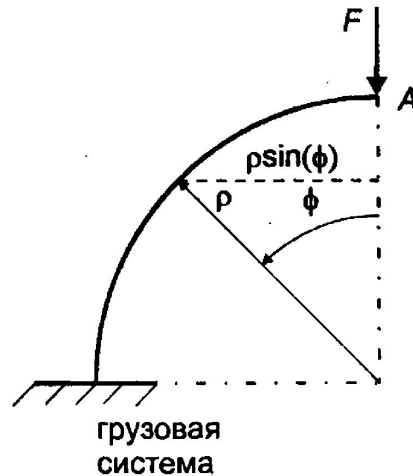
где ρ - радиус кривизны стержня, который может быть постоянным, а может быть функцией от угловой координаты φ .

$$\delta = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{M_{zP} M_{z1} \rho}{EI_z} d\varphi$$



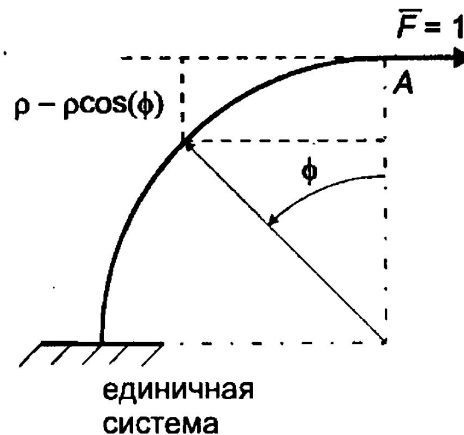
Пример:

Для кривого бруса в форме четверти круга найти горизонтальное перемещение точки **A**.



Нарисуем вспомогательную единичную систему и нагрузим ее горизонтальной единичной силой в точке **A**.

В полярной системе координат положение произвольного сечения характеризуется радиусом-вектором ρ (в нашей задаче $\rho = \mathbf{Const}$ — радиус круга) и углом ϕ от произвольно выбранной начальной точки дуги.



Изгибающий момент от внешних сил $M_F(\varphi) = F \cdot \rho \cdot \sin \varphi$

Изгибающий момент от единичной силы $M_1(\varphi) = 1 \cdot \rho \cdot (1 - \cos \varphi) = \rho(1 - \cos \varphi)$

Горизонтальное перемещение точки А

$$\Delta_{A_{\text{гор}}} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{M_F M_1}{EI_z} \rho d\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{F\rho \sin \varphi \cdot \rho(1 - \cos \varphi)}{EI_z} \rho d\varphi = \frac{F\rho^3}{2EI_z}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\phi) \cdot (1 - \cos(\phi))}{1} d\phi = 0.5$$

Правило Верещагина

Правило Верещагина – графо-аналитический метод, позволяющий упростить вычисления интегралов, входящих в формулу Мора. Упрощение основано на том, что эпюры от единичных силовых факторов на прямолинейных участках оказываются линейными.

Предположим, что необходимо взять интеграл от произведения двух функций

$$J = \int_0^l f_1(z) \cdot f_2(z) dz$$

Пусть вторая из этих функций - линейная $f_2(z) = b + kz$

Тогда

$$J = b \int_0^l f_1(z) dz + k \int_0^l z f_1(z) dz$$

Первый интеграл – площадь эпюры $f_1(z)$ $\int_0^l f_1(z) dz = \Omega_1$

Второй интеграл – статический момент этой эпюры относительно оси ординат

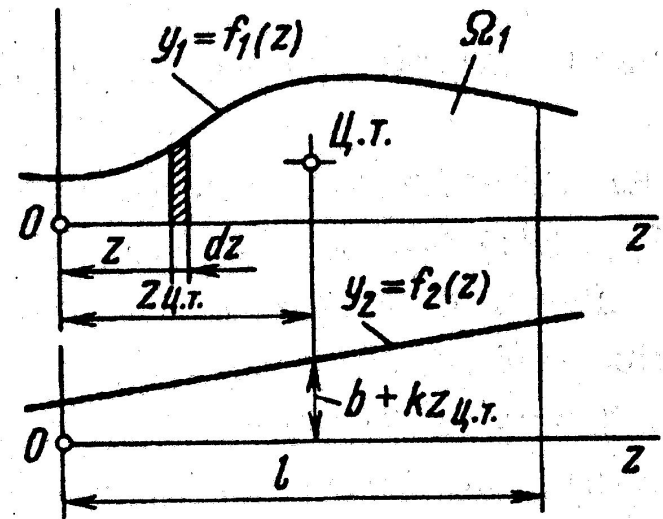
По свойству статического момента

$$\int_0^l z f_1(z) dz = \Omega_1 z_{\text{ЦТ}}$$

$z_{\text{ЦТ}}$ – координата центра тяжести первого эпюра

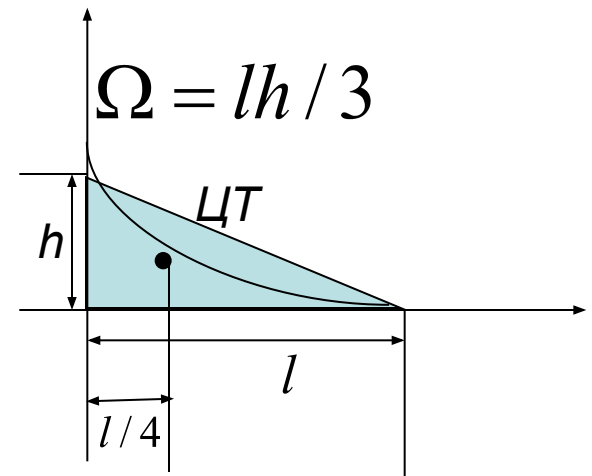
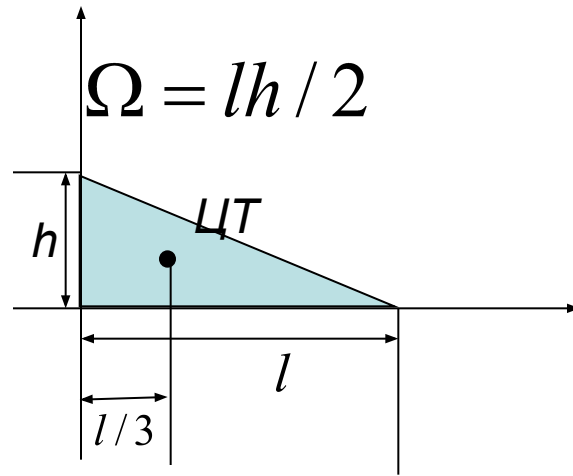
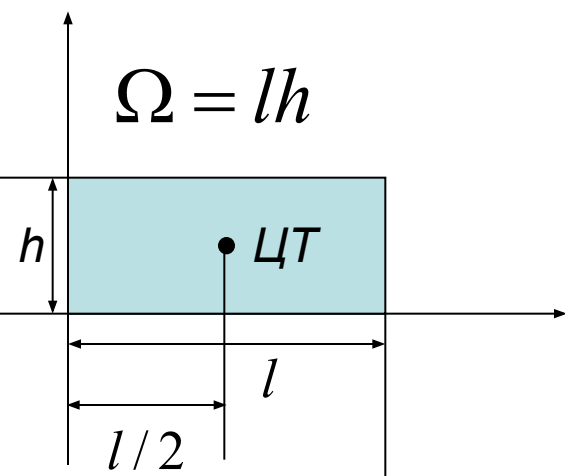
В сумме получаем

$$J = \Omega_1 b + k \Omega_1 z_{\text{ЦТ}} = \Omega_1 (b + k z_{\text{ЦТ}})$$

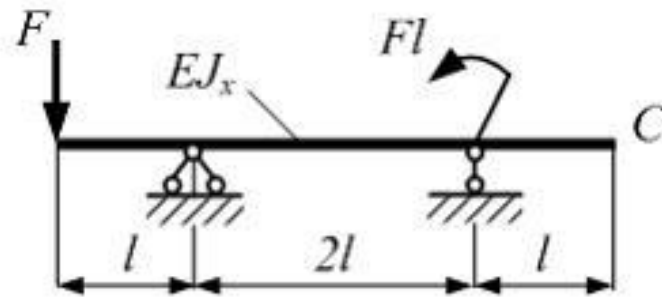


Выражение в скобках – значение функции f_2 под центром тяжести первой фигуры

$$J = \Omega_1 f_2(z_{\text{ЦТ}})$$

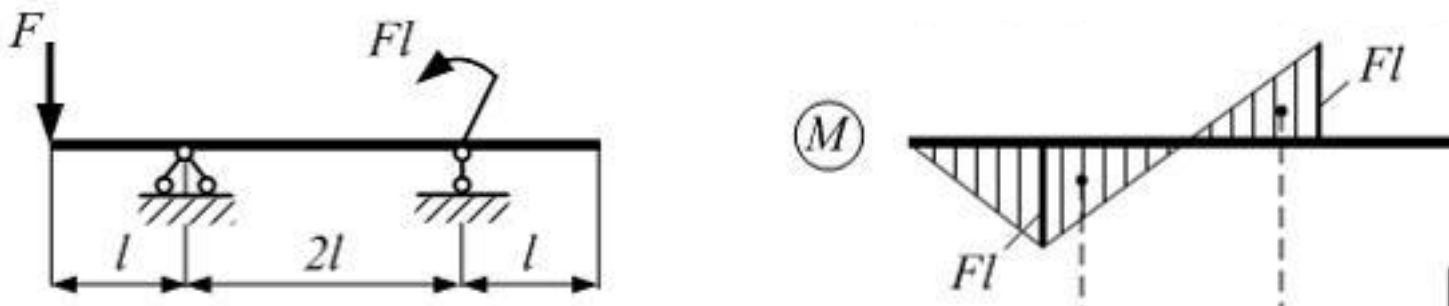


Пример

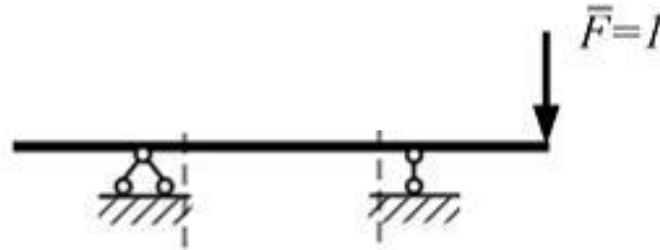


Однопролетная двухконсольная балка нагружена силой и моментом. Жесткость поперечного сечения на изгиб по длине постоянна. Линейный размер l задан. Найти прогиб сечения C от внешней нагрузки по абсолютной величине. (Влиянием поперечной силы на величину перемещения пренебречь).

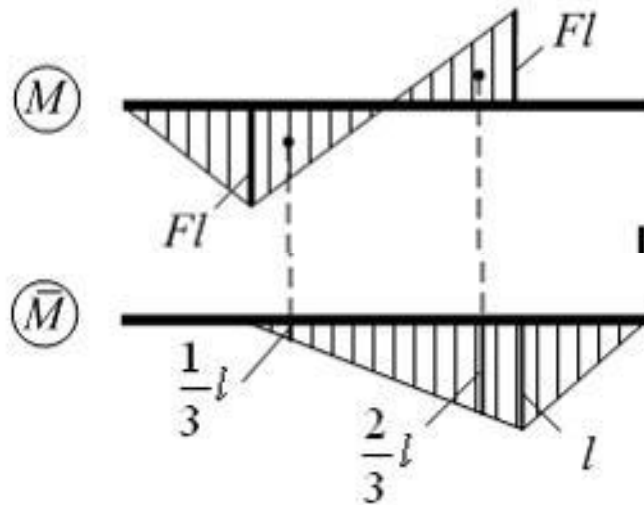
1. Строим эпюр изгибающего момента от действительной нагрузки



2. Прикладываем единичную нагрузку в направлении интересующего перемещения



3. Строим эпюр момента от приложенного единичного фактора



4. Находим интеграл Мора по правилу Верещагина

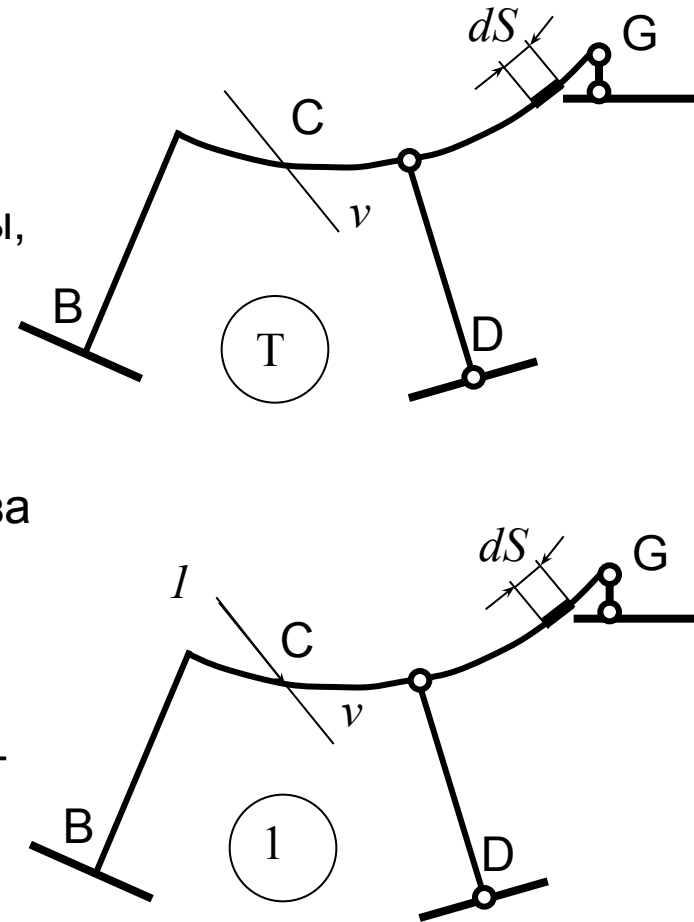
$$\delta_c = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{1}{2} Fl^2 \cdot \frac{2}{3} l + \frac{1}{2} Fl^2 \cdot \frac{1}{3} l \right] = -\frac{1}{6} \frac{Fl^3}{EJ_x}$$

3. Формула Мора для определения температурных перемещений сечения по заданному направлению

В основу вывода формулы положен принцип возможных перемещений. Пусть дана система, находящаяся под действием температуры. Обозначим: n — число участков системы; i — номер ее произвольного участка.

Для определения перемещения сечения C по направлению v рассмотрим систему без температуры, нагруженную безразмерной обобщенной единичной силой, приложенной в сечении C по направлению v .

Схему системы под действием температуры обозначим T , а схему нагружения системы обобщенной единичной силой обозначим 1 . Приняв за возможное перемещение системы ее деформированное состояние в схеме T , найдем работу внешних, реактивных и упругих сил схемы нагружения 1 на этом возможном перемещении. По принципу возможных перемещений сумма этих работ равна нулю, так как система в состоянии 1 находится в равновесии.



Работа внешних сил

$$A_P = 1 \cdot \delta_v$$

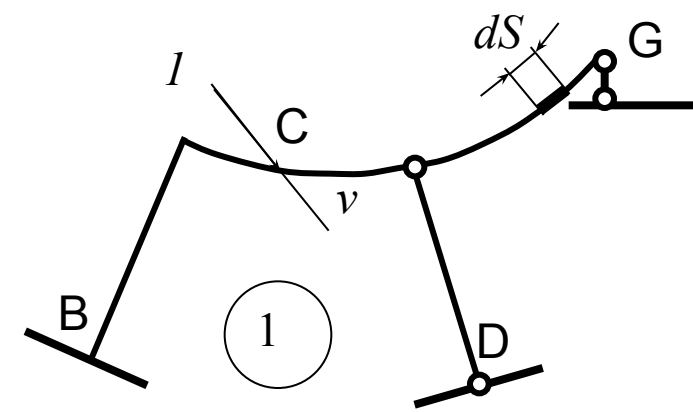
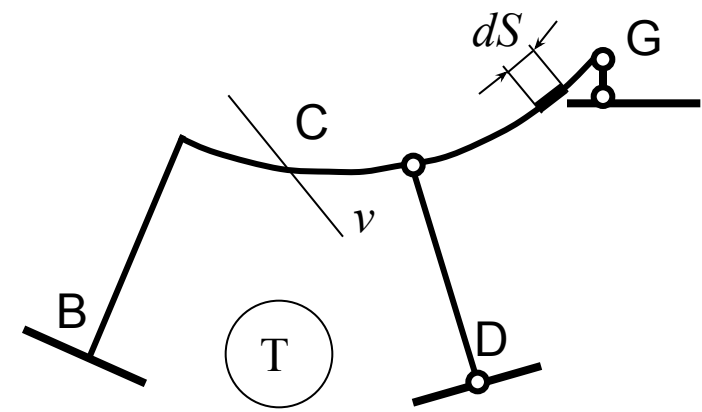
Опоры B и D неподвижны, а реакция в опоре G направлена по нормали к любому ее возможному перемещению, поэтому работа реактивных сил

$$A_R = 0$$

Для определения работы сил упругости A_y рассмотрим один и тот же элемент, вырезанный из схемы T и схемы 1 двумя поперечными сечениями, расстояние dS между которыми бесконечно мало.

Силы упругости в поперечном сечении элемента могут привести к шести внутренним силовым факторам, которым присваиваем индекс 1.

Обозначим температуры крайних верхних и нижних, правых и левых волокон i -го участка соответственно $T_{в}$, $T_{н}$ и $T_{п}$, $T_{л}$. Считаем, что температура в направлениях осей y и z сечения изменяется линейно, будучи соответственно функцией только y и только z .



Законы изменения температуры по поперечному сечению показаны на рис.

Очевидно, что

$$T(y) = \frac{T_B - T_H}{a+b} y + \frac{T_B b + T_H a}{a+b}$$

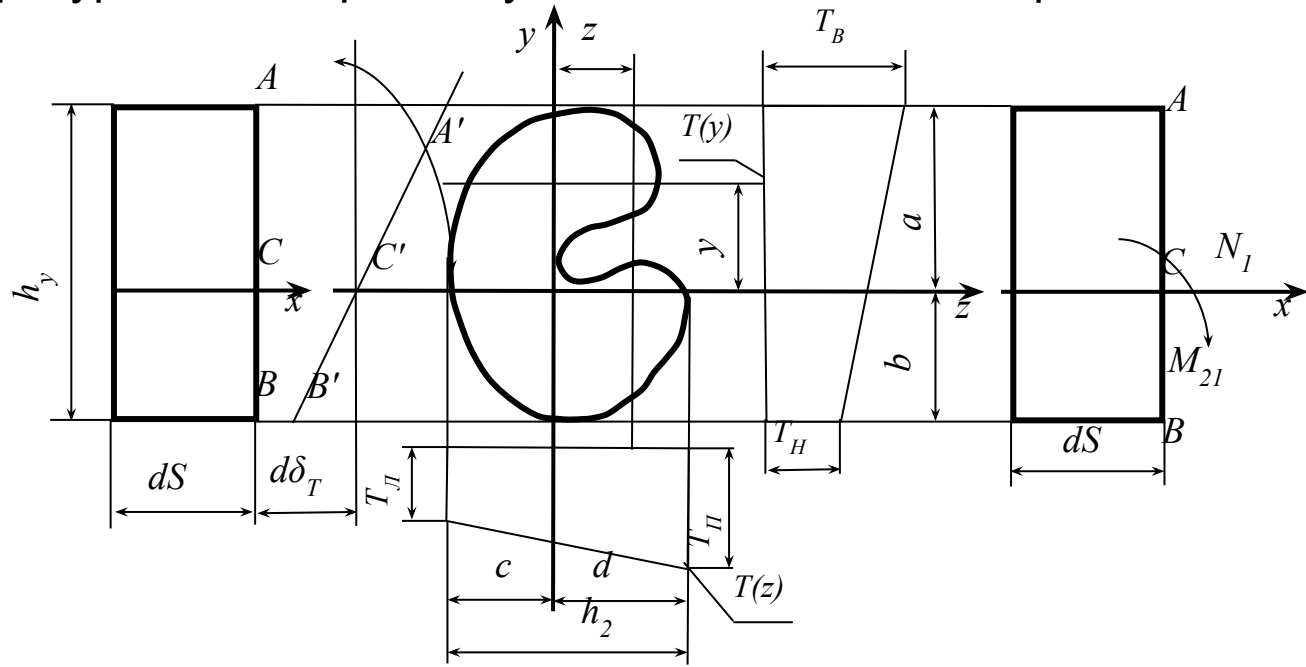
$$T(z) = \frac{T_{II} - T_{JI}}{c+d} z + \frac{T_{II} c + T_{JI} d}{c+d}$$

Температура на оси
элемента

$$\Delta T_C = [T(y)]_{y=0} + [T(z)]_{z=0}$$

или

$$\Delta T_C = \frac{T_B b + T_H a}{a+b} + \frac{T_{II} c + T_{JI} d}{c+d}$$



Пусть $d\delta_T$ — возможное перемещение центра тяжести поперечного сечения в схеме от изменения температуры элемента.

$$d\delta_T = \alpha \Delta T_C dS$$

где α - коэффициент линейного расширения материала элемента.

Пусть $d\theta_z^T$ - возможный относительный поворот концевых сечений элемента около оси z в схеме от изменения температуры

$$d\theta_z^T = \alpha \frac{\Delta T_y}{h_y} dS$$

где $\Delta T_y = T_B - T_H$, h_y - наибольший размер поперечного сечения в направлении оси y.

По аналогии, возможный относительный поворот концевых сечений элемента вокруг оси y

$$d\theta_y^T = \alpha \frac{\Delta T_z}{h_z} dS$$

где $\Delta T_z = T_{II} - T_{I}$, h_z - наибольший размер поперечного сечения в направлении оси z .

1. dA_y — работа сил упругости в элементе dS по абсолютной величине равна работе внутренних силовых факторов состояния на возможных перемещениях состояния и противоположна ей по знаку, так как силы упругости всегда направлены в сторону, противоположную направлению изменения расстояния между точками тела.

2. Работа M_{z1} , Q_{y1} и Q_{z1} равна нулю, так как концевые сечения элемента при нагреве относительно оси x не поворачиваются, а Q_{y1} и Q_{z1} перпендикулярны направлению $d\delta T$, поэтому

$$dA_y = -M_{z1} d\theta_z^T - M_{y1} d\theta_y^T - N d\delta T$$

Подставляя сюда полученные ранее выражения и интегрируя полученное выражение по s_i — длине i -го участка найдем работу сил упругости на i -м участке.

$$A_{yi} = - \int_{s_i} \left(M_{z1} \alpha \frac{\Delta T_y}{h_y} + M_{y1} \alpha \frac{\Delta T_z}{h_z} + N_1 \alpha \Delta T_c \right) ds$$

Суммируя эти интегралы по всем участкам системы, найдем A_y .

$$A_y = -\sum_{i=1}^n \int_{s_i} \left(M_{z1} \alpha \frac{\Delta T_y}{h_y} + M_{y1} \alpha \frac{\Delta T_z}{h_z} + N_1 \alpha \Delta T_c \right) ds$$

Складывая A_p с A_y и приравнявая сумму нулю, получим формулу Мора для определения температурных перемещений сечений стержневой системы по заданному направлению:

$$A_p + A_y = 0;$$

$$1 \cdot \delta_v - \sum_{i=1}^n \int_{s_i} \left(M_{z1} \alpha \frac{\Delta T_y}{h_y} + M_{y1} \alpha \frac{\Delta T_z}{h_z} + N_1 \alpha \Delta T_c \right) ds = 0;$$

$$\delta_v = \sum_{i=1}^n \int_{s_i} \left(M_{z1} \alpha \frac{\Delta T_y}{h_y} + M_{y1} \alpha \frac{\Delta T_z}{h_z} + N_1 \alpha \Delta T_c \right) ds;$$