Ioffe Physico-Technical Institute

Лекция 6:
Электромагнитная теория света

Введение

Поляризация

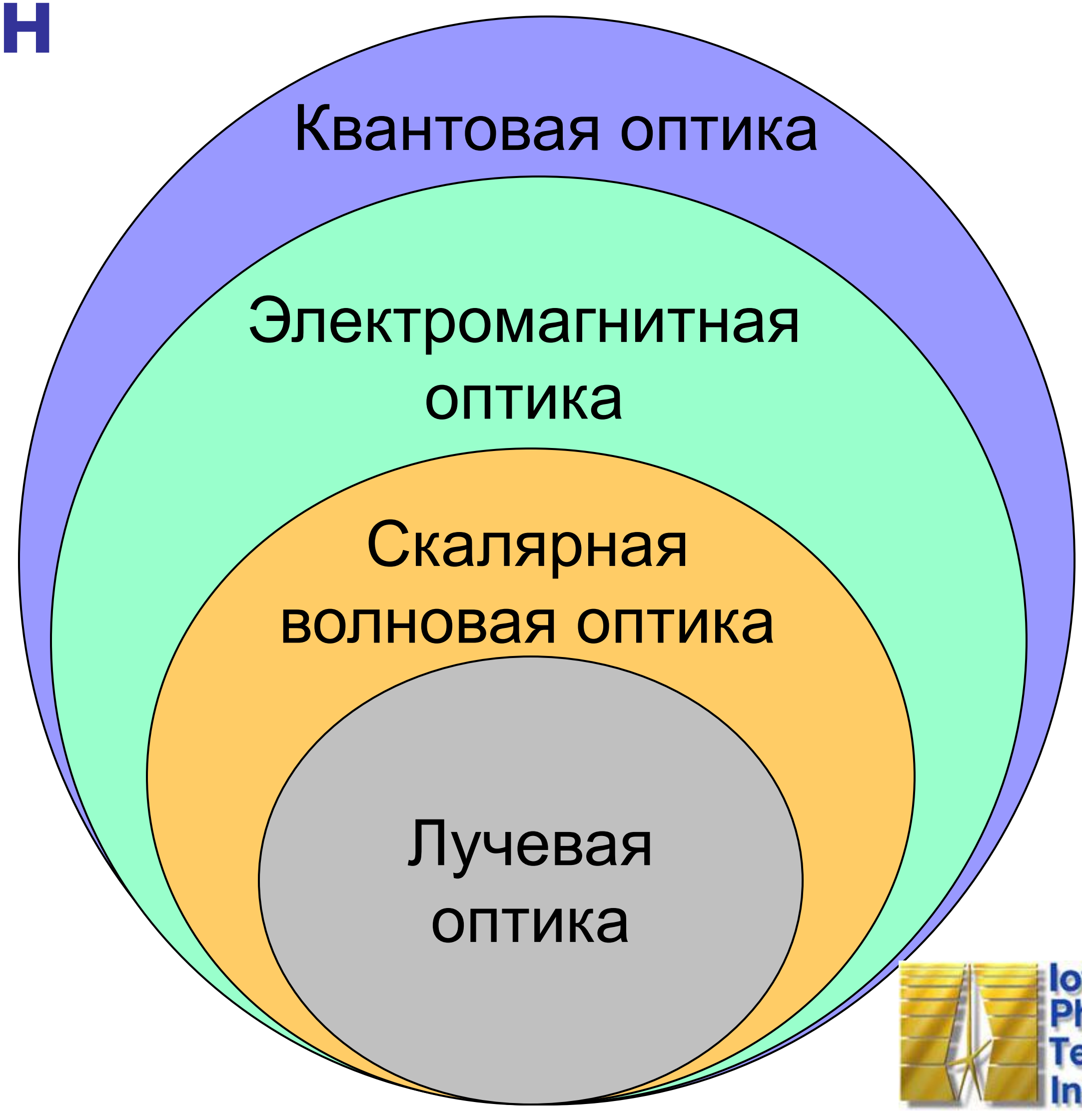
Формулы Френеля

«Фотоника» - производная слова фотон

Условия когда проявляются квантовые свойства

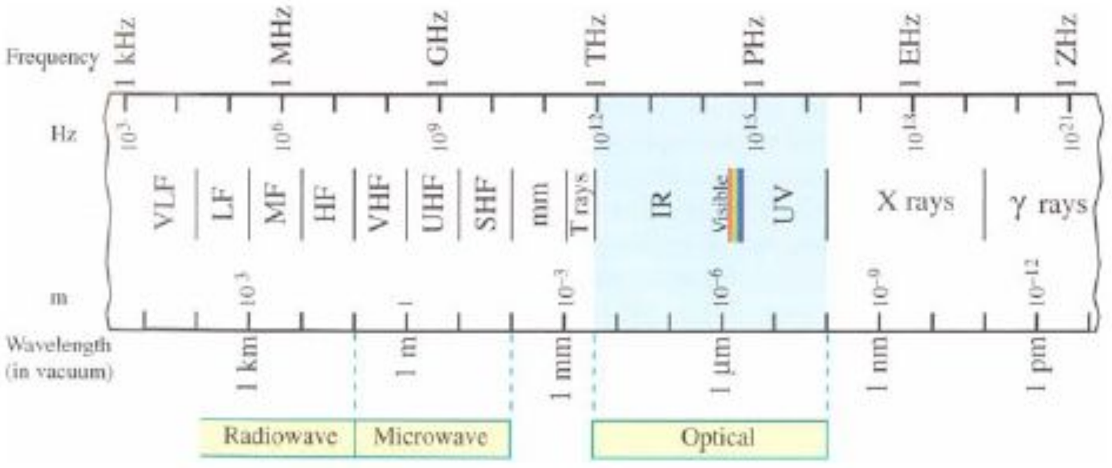
$E_{ph} = h\nu = hc/\lambda > kT$

при ком. темп. 300 K
ν = 6 THz



Электромагнитная оптика

- Описание через два связанных вектора - электрического и магнитного поля.
- Описание поляризации света.
- Распространение в средах (взаимодействие с веществом).



Уравнения Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$ ← Ampere's circuital law (J=0)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$ ← Faraday's law of induction

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho = 0$$ ← No free electric charges assumed

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$ ← No free magnetic charges

Maxwell's equations
(Source-free medium)

Где H (r,t) – магнитное поле [A/m], E (r,t) – электрическое поле [V/m], D(r,t) – электрическая индукция [C/m^2], B (r,t) – магнитная индукция [T = Vs/m^2]

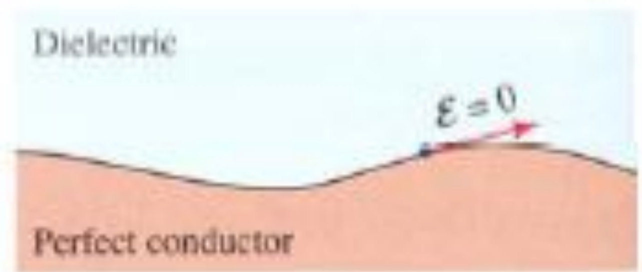
$$D = \varepsilon_0 E + P$$

$$B = \mu_0 H + \mu_0 M$$

ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума 8,85 *10^{-12} [As/Vm]
μ_0 – магнитная восприимчивость вакуума 1,26*10^{-6} [Vs/Am]
P – поляризация [C/m^2]
M – магнитный момент [A/m]

Ioffe Physico-Technical Institute

Граничные условия



- Тангенциальные компоненты $E_{1\tau}=E_{2\tau}$; $H_{1\tau}=H_{2\tau}$
- Нормальные компоненты $D_{1n}=D_{2n}$; $B_{1n}=B_{2n}$
- На границе с идеальным проводником $E_{\tau}=0$
  - При отражении от металлического зеркала отраженная волна сдвигается на π

Энергетические характеристики

- Вектор Пойнтинга S - плотность потока энергии электромагнитного поля (непрерывен на границе двух сред)

Poynting vector, S=E×H

Poynting theorem:

Закон преобразования энергии

$$\nabla\cdot\mathbf{S} = \ldots = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 \mathbf{E}^2}{2}+\frac{\mu_0 \mathbf{H}^2}{2}\right)+\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}+\mu_0 \mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}$$

Electric and magnetic energy densities (per unit volume) stored in the electric and magnetic fields

Power densities delivered to the material's electric and magnetic dipoles

- Интенсивность I = <ISI> - усреднение по времени
- Плотность импульса p = S/c^2 (давление света)
- Угловой момент r x S/c (для неплоских фронтов, кручение)

Используется для атомарных ловушек, манипуляции отдельными атомами, получение сверхнизких температур.

Ioffe Physico-Technical Institute

Волновое уравнение

$$\nabla^2\mathbf{E} - \nabla(\nabla\cdot\mathbf{E}) - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0\frac{\partial^2\mathbf{P}}{\partial t^2} = 0$$

Maxwell's wave equation *(Electric field)*

<u>Однородная среда</u>

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{n^2}{c_0^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

Maxwell's wave equation in dielectric medium *(Linear, nondispersive, homogeneous, isotropic medium)*

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi\mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0(1+\chi)\mathbf{E} \equiv \varepsilon\mathbf{E}$$

χ– диэлектрическая восприимчивость

$$n = \sqrt{(1+\chi)}, \quad c_0 = 1/\sqrt{(\varepsilon_0\mu_0)}.$$

<u>Неоднородная среда</u>

ε и χ– зависят от координаты

$$\nabla^2 E + \nabla\left[\frac{1}{n^2(r)}\nabla\left(n^2(r)\right)\cdot E\right] - \frac{n^2(r)}{c_0^2}\cdot\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2 E - \frac{n^2(r)}{c_0^2}\cdot\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \approx 0$$

Приближение для медленных изменений n(r), незначительных на расстоянии порядка длины волны
Компоненты электрического и магнитного полей описываются одинаковыми скалярными волновыми уравнениями

Ioffe Physico-Technical Institute

Комплексные амплитуды

$$\mathbf{E}(r,t) = \mathrm{Re}(\mathbf{E}(r)\exp(j\omega t))$$
$$\mathbf{H}(r,t) = \mathrm{Re}(\mathbf{H}(r)\exp(j\omega t))$$

If $n(r)$ varies slowly over a wavelength $\rightarrow$

$$\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r}) = j\omega\varepsilon_0 n^2(\mathbf{r},\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r})$$
$$\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu_0\mathbf{H}(\mathbf{r})$$
$$\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx 0$$
$$\nabla\cdot\mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0$$

Maxwell's equations
(Source-free, linear, isotropic medium; monochromatic light)

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}) + k^2 U(\mathbf{r}) = 0$$

Helmholtz equation

Inhomogenity Dispersion

$$k = \frac{\omega_0}{c_0} n(\mathbf{r},\omega) = k_0 n(\mathbf{r},\omega)$$

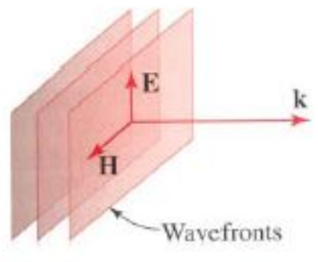
$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mathbf{E}(\mathbf{r})\times\mathbf{H}(\mathbf{r})^*$$

Комплексный вектор Пойнтинга

Ioffe Physico-Technical Institute

Плоские волны

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$$
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 \exp(-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$$



- E_0, H_0 – комплексные амплитуды (постоянные вектора)
- K – волновой вектор
- E и H – перпендикулярны направлению распространения

Поперечная электромагнитная волна (TEM)

- Правая тройка векторов (E_0,H_0, k)

$$\frac{|\mathbf{E}_0|}{|\mathbf{H}_0|} \equiv \underset{\text{Wave impedance}}{\eta} = \eta_0 \frac{1}{n(\mathbf{r},\omega)} = \overbrace{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}^{\text{Wave impedance in vacuum} = 377\ \Omega} \frac{1}{n(\mathbf{r},\omega)}$$

$$I = \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{2\eta}$$

- Интенсивность 10 W/cm^2 соответствует ~ 87 V/cm

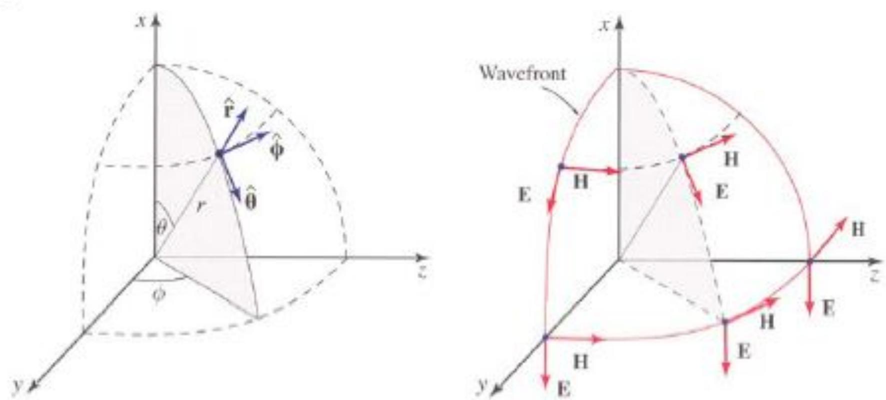
Другие элементарные волны

Сферические волны

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 \sin\theta\, U(\mathbf{r})\,\hat{\theta}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = H_0 \sin\theta\, U(\mathbf{r})\,\hat{\phi}$$

where the scalar spherical wave $U(\mathbf{r}) = (1/r)\exp(-jkr)$,
and $H_0=(jk/\mu_0)A$, $E_0=\eta H_0$, and A is a constant.



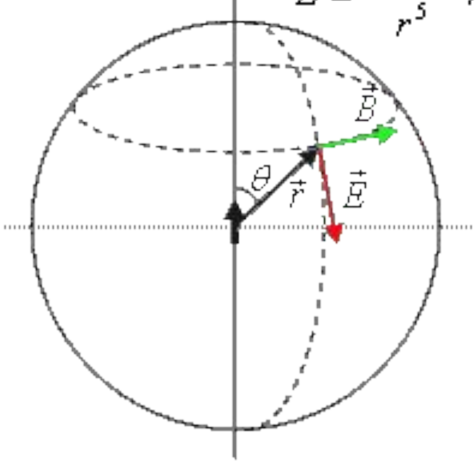
- Волновой фронт сферический,
- E, H – ортогональны друг другу
- и радиальному направлению.
- В общем случае амплитуда изменяется с углом
- Параксиальное приближение

$\theta\approx\pi/2$ and $\phi\approx\pi/2$, $\quad \mathbf{E}(\boldsymbol{r}) \approx E_0\left(-\hat{\boldsymbol{x}} + \dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{z}}\hat{\boldsymbol{z}}\right)U(\mathbf{r})$

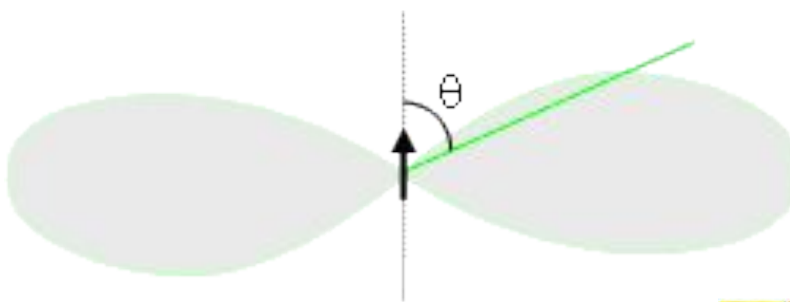
$U(\mathbf{r})=(1/z)\exp(-jkz)\exp(-jk(x^2+y^2)/(2z))$,

Излучение электрического диполя (волновая – дальняя зона)

$$\vec{p} = q\vec{l}\cos\omega t \qquad \vec{E} = \frac{3(\vec{p}\vec{r})}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \quad (r >> \lambda)$$



$$E \sim \frac{1}{r}\sin\theta$$



Ioffe Physico-Technical Institute

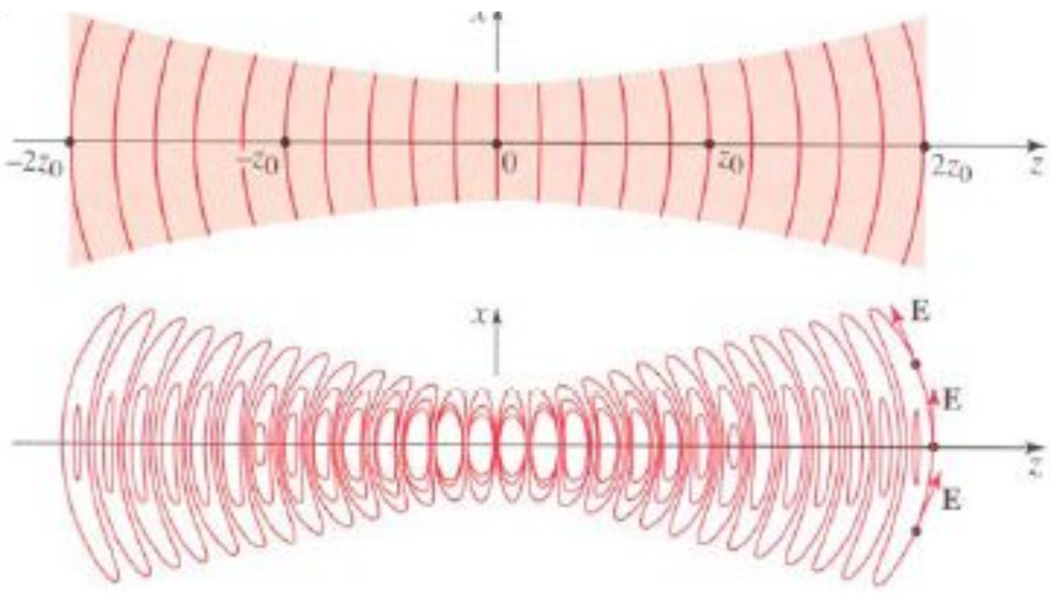
Другие элементарные волны

Гауссов пучок

$$\mathbf{E}(r) = E_0\left(-\hat{x} + \frac{x}{z + jz_0}\hat{z}\right)U(\mathbf{r})$$

where $U(\mathbf{r})=A_0(W_0/W(z))\exp(-\rho^2/W^2(z))\exp(-jkz-jk\rho^2/(2R(z))+j\zeta(z))$, which represents the scalar complex amplitude of a Gaussian beam

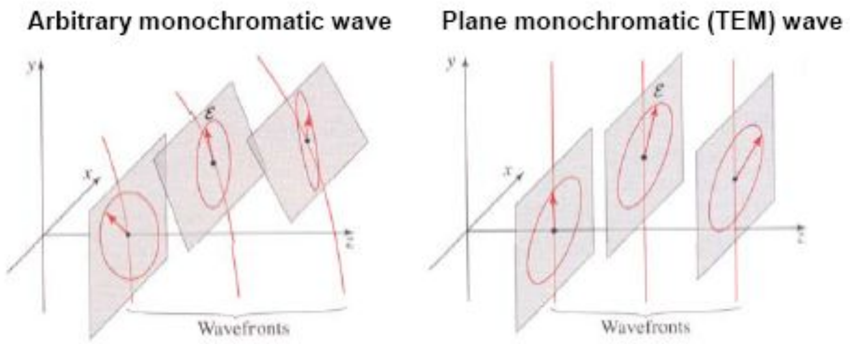
- The direction of the electric field is not spatially uniform



Поляризация

Поляризация света определяется направлением вектора электрического поля E (r,t)

1. В изотропной однородной среде вектор E лежит в плоскости касательной к волновому фронту
2. Для монохроматической волны любые ортогональные компоненты E в тангенциальной плоскости изменяются гармонически со временем
3. Амплитуда и фаза этих составляющих определяет траекторию движения вектора E (в общем случае эллипс)



4. Для плоской волны эта траектория не изменяется в пространстве. Говорят об линейной, циркулярной или эллиптической поляризации

Поляризация играет важную роль при взаимодействии света с веществом:

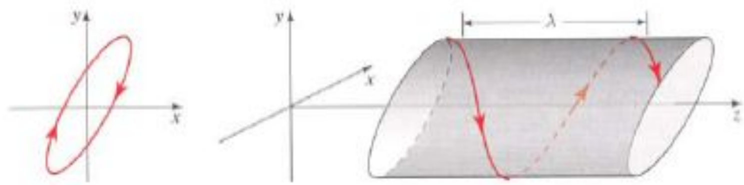
- Отражение и преломление
- Поглощение
- Анизотропия

Поляризация

$$\mathbf{E}(z,t)=\begin{bmatrix}E_x(z,t)\\E_y(z,t)\end{bmatrix}=\mathrm{Re}\left(\begin{bmatrix}A_x\\A_y\end{bmatrix}\exp\left(j\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right)\right)=\mathrm{Re}\left(\begin{bmatrix}a_x\exp(j\varphi_x)\\a_y\exp(j\varphi_y)\end{bmatrix}\exp\left(j\omega\left(t-\frac{z}{c}\right)\right)\right)$$

<u>Эллиптическая поляризация</u>

$$\frac{E_x^2}{a_x^2}+\frac{E_y^2}{a_y^2}-2\cos\varphi\frac{E_xE_y}{a_xa_y}=\sin^2\varphi$$



Параметрическое уравнение для компонент электрического поля

$$r=\frac{a_x}{a_y}$$

$$\varphi=\varphi_x-\varphi_y$$

При фиксированном z вектор E вращается с частотой ω

Эллиптичность определяется соотношением амплитуд r и разностью фаз ϕ

Интенсивность

$$I=\frac{a_x^2+a_y^2}{2\eta}$$

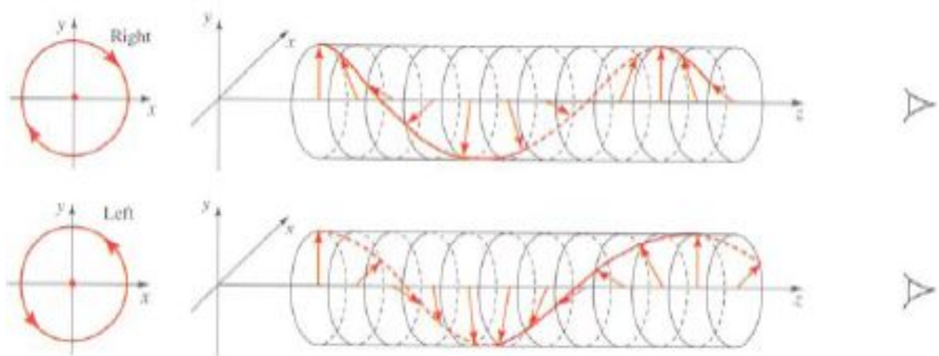
Поляризация

Циркулярная поляризация

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{2}; a_x = a_y = a_0$$

$\varphi = +\frac{\pi}{2}$ - правая поляризация

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$ - левая поляризация

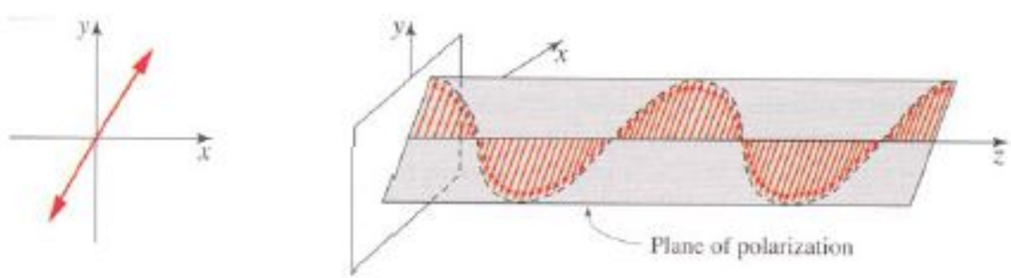


Линейная поляризация

$a_x = 0$ или $a_y = 0$

$\varphi = 0$ или π

$$E_y = \pm\left(a_y / a_x\right)E_x$$

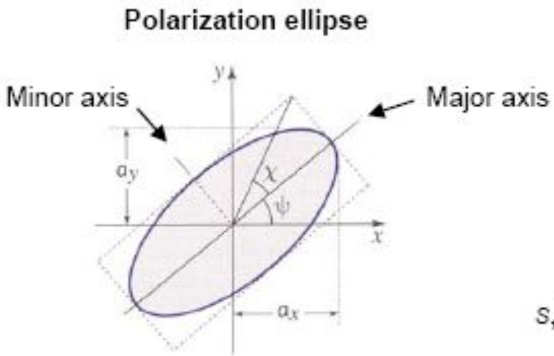


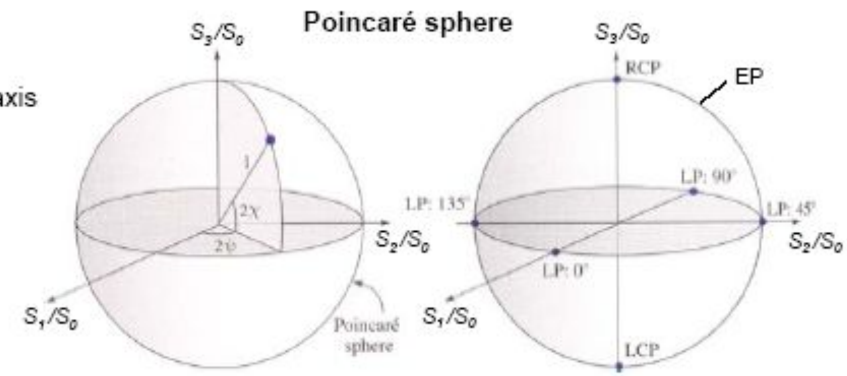
Поляризация
математическое описание

<u>Сфера Пуанкаре</u>

$$\tan 2\psi = \frac{2r}{1-r^2}\cos\varphi$$

$$\sin 2\chi = \frac{2r}{1+r^2}\sin\varphi$$





Состоянию поляризации соответствует точка на поверхности сферы ($r=1$, $\theta=90^o - 2\chi$, $\varphi = 2\Psi$)

<u>Параметры Стокса</u>

(S_0, S_1, S_2, S_3)

$S_0 = a_x^2 + a_y^2$ - пропорционален интенсивности

$(S_1, S_2, S_3) = S_0(\cos 2\chi\cos 2\psi, \cos 2\chi \sin 2\psi, \sin 2\chi)$

– Декартовые координаты точки на сфере

$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S_0^2$ - три независимых параметра

$$S_0 = a_x^2 + a_y^2 = |A_x|^2 + |A_y|^2$$
$$S_1 = a_x^2 - a_y^2 = |A_x|^2 - |A_y|^2$$
$$S_2 = 2a_x a_y \cos\varphi = 2\,\mathrm{Re}(A_x^* A_y)$$
$$S_3 = 2a_x a_y \sin\varphi = 2\,\mathrm{Im}(A_x^* A_y)$$

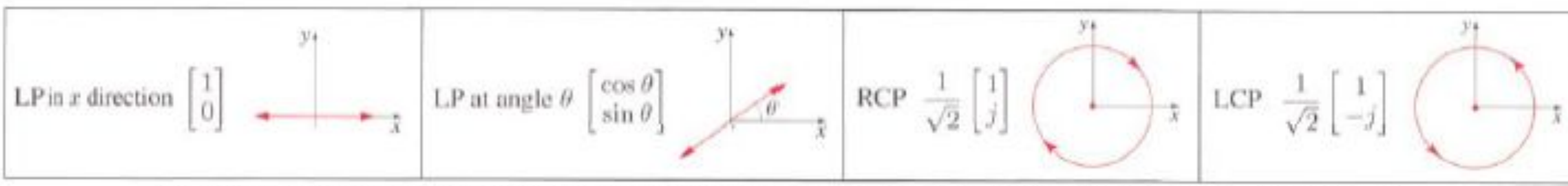
Поляризация
математическое описание

Матричное описание

Монохроматическая плоская волна может быть описана вектором из двух компонент (A_x, A_y)

Вектор Джонса

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \exp(j\varphi_x) \\ a_y \exp(j\varphi_y) \end{bmatrix}$$



*The intensity is normalized so that $|A_x|^2+|A_y|^2=1$ and the phase of the x component is set to $\varphi_x=0$.

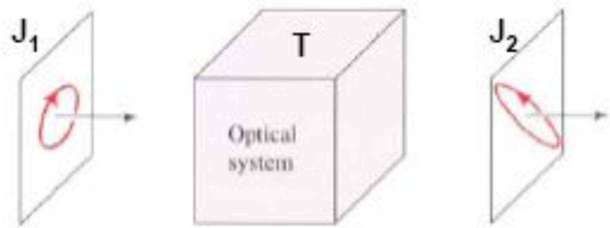
Ортогональные поляризации: $\mathbf{J_1}\cdot\mathbf{J_2}^{T*}=A_{1x}A_{2x}^*+A_{1y}A_{2y}^*=0$

Произвольная поляризация описывается как суперпозиция ортогональных векторов (базиса)

$\mathbf{J}=\alpha_1\mathbf{J_1}+\alpha_2\mathbf{J_2}$ (if $\mathbf{J_1}\cdot\mathbf{J_1}^{T*}=1$ and $\mathbf{J_2}\cdot\mathbf{J_2}^{T*}=1$ then $\alpha_1=\mathbf{J}\cdot\mathbf{J_1}^{T*}$ and $\alpha_2=\mathbf{J}\cdot\mathbf{J_2}^{T*}$)

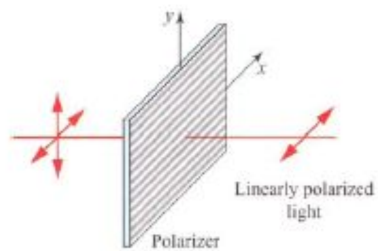
Распространение поляризованного света через линейную оптическую систему

$$J_2 = TJ_1 = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} J_1$$



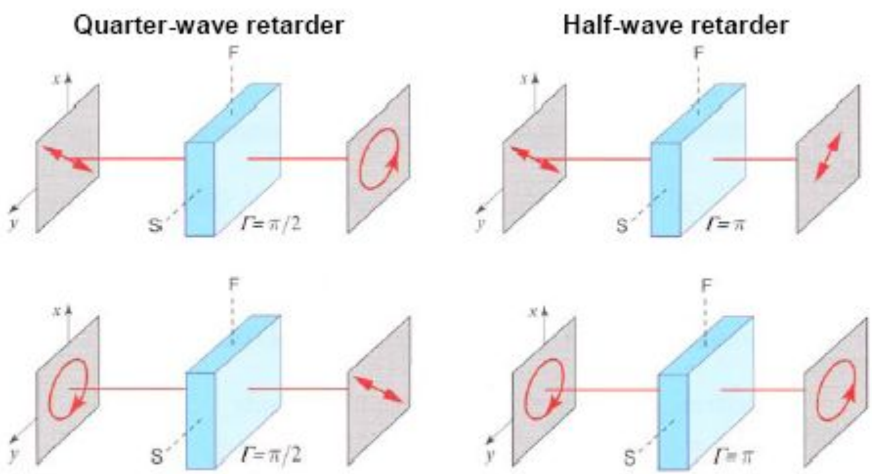
<u>Поляризатор</u>

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

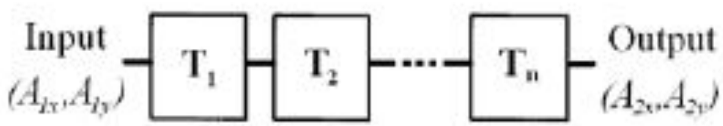


<u>Волновые пластики</u>

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(-j\Gamma) \end{bmatrix}$$

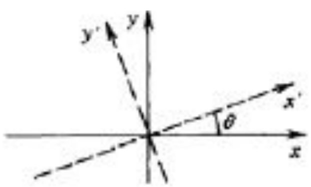


Сложная система



$$\mathbf{J}_2 = \mathbf{T}_n \ldots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \mathbf{J}_1 = \mathbf{T}_{tot} \mathbf{J}_1$$

Иногда удобно сменить систему координат



$$\mathbf{J}' = \mathbf{R}(\theta)\mathbf{J}, \quad \mathbf{T}' = \mathbf{R}(\theta)\mathbf{T}\mathbf{R}^{-1}(\theta) = \mathbf{R}(\theta)\mathbf{T}\mathbf{R}(-\theta), \quad \mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Собственные вектора поляризации не меняются при распространении и образуют базис для разложения произвольной поляризации

Для матрицы 2X2 существуют две собственные моды $\mathbf{TJ}_1=\mu_1\mathbf{J}_1$ and $\mathbf{TJ}_2=\mu_2\mathbf{J}_2$. $T_{12}=T_{21}^*$ $\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2^{T*}=0.$

$$\mathbf{TJ} = \mu\mathbf{J}$$

$$\mathbf{TJ} = \alpha_1\mu_1\mathbf{J}_1 + \alpha_2\mu_2\mathbf{J}_2$$

Неполяризованный свет

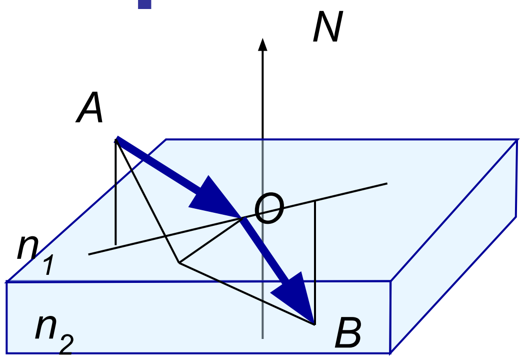
Строгое математическое описание поляризации дается статистической теорией (см. когерентность)

Неполяризованный свет – случайные фазовые соотношения между компонентами (не может быть описан вектором Джонса)

Степень поляризации

$$DOP = \frac{I_p}{I_p + I_u} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

Отражение и преломление



Самостоятельно вывести формулы Френеля (Домашнее задание)

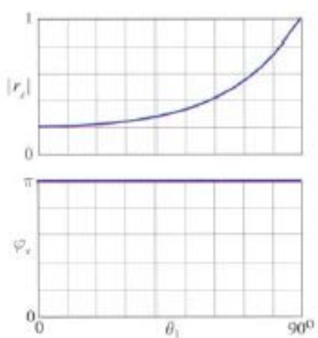
Fresnel equations

$$r_x = \frac{n_1 \cos\theta_1 - n_2 \cos\theta_2}{n_1 \cos\theta_1 + n_2 \cos\theta_2}, \quad t_x = 1 + r_x \qquad \text{TE polarization}$$

$$r_y = \frac{n_1 \sec\theta_1 - n_2 \sec\theta_2}{n_1 \sec\theta_1 + n_2 \sec\theta_2}, \quad t_y = (1 + r_y)\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} \qquad \text{TM polarization}$$

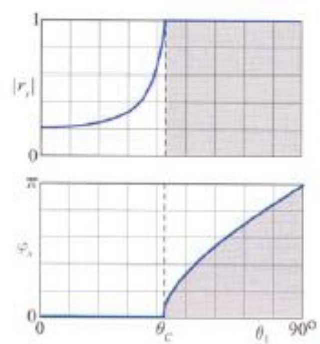
Note that $r_{x,y}$ and $t_{x,y}$ may take on complex values (marked by grey areas in the diagrams below)!

TE polarization: external reflection ($n_1<n_2$)



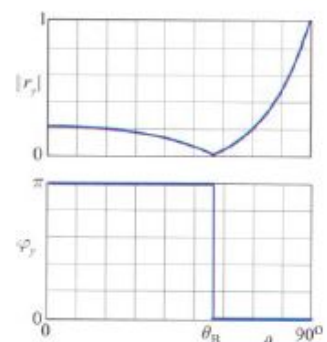
r_x is real and negative for all angles of incidence θ_1.

TE polarization: internal reflection ($n_1>n_2$)



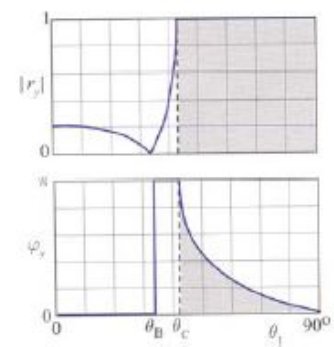
r_x is real and positive up to the critical angle $\theta_c=sin^{-1}(n_2/n_1)$ of "total internal reflection", after which a phase-shift is introduced on the reflected wave.

TM polarization: external reflection ($n_1<n_2$)



r_y is real for all θ_1, negative below the *Brewster angle* $\theta_B=tan^{-1}(n_2/n_1)$, and positive above.

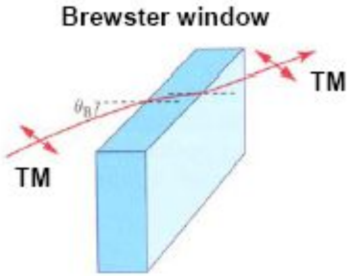
TM polarization: internal reflection ($n_1>n_2$)



r_y is real and positive up to θ_B, negative up to θ_c. After this a phase-shift is introduced on the reflected wave.

Отражение и преломление

- A new feature here is the **Brewster angle**, $\theta_B = tan^{-1}(n_2/n_1)$, at which no TM polarized light will be reflected, but all is transmitted. This is used in polarization devices, and to obtain linearly polarized light from e.g. unpolarized light.

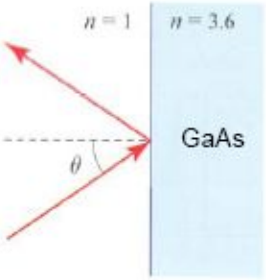


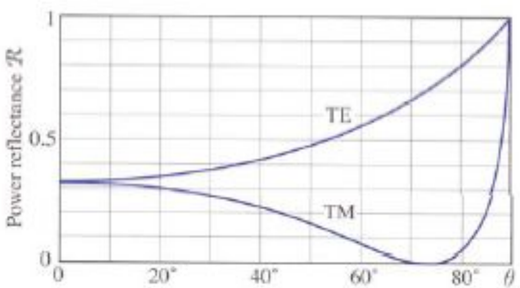
- The **power reflectance** R and **power transmittance** T are defined as the ratios of power flow (normal to the boundary) of the reflected and transmitted waves, respectively, to that of the incident wave. Since the reflected and incident waves propagate in the same medium and make the same angle with the normal to the surface,

$$R = |r|^2 \quad \rightarrow \quad R(\theta_1 = 0) = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$$

(for both TE and TM polarizations)

$$\begin{cases} R_{Air/Glass}(\theta_1 = 0) = 4\% & (n_{Glass} = 1.5) \\ R_{Air/GaAs}(\theta_1 = 0) = 32\% & (n_{GaAs} = 3.6) \end{cases}$$





Conservation of energy requires that:

$$T = 1 - R \qquad T \neq |t|^2$$

(since the waves have different propagation angles and impedances)