Типичные ошибки в решении задания С1
ЕГЭ по математике
(потеря корней, появление «посторонних» корней)

Учитель математики МБОУ СОШ № 143 г.Красноярска
Князькина Т. В.

Первое задание:

а) **Решите уравнение:**

$$tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1=2\left(\sqrt{2}+1\right)ctgx$$

б) **Найдите все корни на промежутке** $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4}\right]$

При решении уравнения попытаемся представить тангенс суммы двух углов по формуле $tg\left(\alpha+\beta\right)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$

Получилось: $tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{tg x+tg\frac{\pi}{4}}{1-tg x tg\frac{\pi}{4}}$

И – **внимание!** – потеря корня!

Смотрите внимательно: после этого преобразования мы получили отдельно стоящий tgx. Но tgx не определен при $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$. А в исходном уравнении x вполне мог быть равен $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

То есть, выполняя это невинное преобразование, мы сузили ОДЗ. Поэтому, **выполняя преобразование нужно следить за тем, что происходит с областью допустимых значений.**

Итак, мы идем другим путем.

Запишем tgx и ctgx через sin и cos:

$$\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}+1=\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)cosx}{sinx}$$

Используем формулы синуса и косинуса суммы:

$$\frac{sinxcos\frac{\pi}{4}+cosxsin\frac{\pi}{4}}{cosxcos\frac{\pi}{4}-sinxsin\frac{\pi}{4}}+1=\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)cosx}{sinx}$$

$$\frac{sinx\frac{\sqrt{2}}{2}+cosx\frac{\sqrt{2}}{2}}{cosx\frac{\sqrt{2}}{2}-sinx\frac{\sqrt{2}}{2}}+1=\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)cosx}{sinx}$$

Разделим числитель и знаменатель дроби в левой части уравнения на $\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\frac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}+1=\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)\cos x}{\sin x}$$

Приведем левую часть уравнения к общему знаменателю:

$$\frac{\sin x+\cos x+\cos x-\sin x}{\cos x-\sin x}=\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{2\cos x}{\cos x-\sin x}=\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)\cos x}{\sin x}$$

Перенесем все влево:

$$\frac{2\cos x}{\cos x - \sin x} - \frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)\cos x}{\sin x} = 0$$

Вынесем за скобку общий множитель:

$$2\cos x\left(\frac{1}{\cos x - \sin x} - \frac{\sqrt{2}+1}{\sin x}\right) = 0$$

Приведем выражение в скобках к общему знаменателю:

$$2\cos x\left(\frac{\sin x - \left(\sqrt{2}+1\right)(\cos x - \sin x)}{\sin x\,(\cos x - \sin x)}\right) = 0$$

Знаменатель дроби не равен нулю, то есть

$\cos x - \sin x \neq 0$ и $\sin x \neq 0$

Произведение двух множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю:

$\cos x = 0$ или $\sin x - \left(\sqrt{2}+1\right)\left(\cos x - \sin x\right) = 0$

1. $\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ - вот он, потерянный корень!

2. $\sin x - \left(\sqrt{2}+1\right)\left(\cos x - \sin x\right) = 0$

Раскроем скобки, приведем подобные члены:

$$\sin x - \sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x - \cos x + \sin x = 0$$

$$\left(\sqrt{2}+2\right)\sin x - \left(\sqrt{2}+1\right)\cos x = 0$$

$$\left(\sqrt{2}+2\right) sinx=\left(\sqrt{2}+1\right) cosx$$

$$\frac{sinx}{cosx}=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}+2}$$

$$tgx=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}$$

$$tgx=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

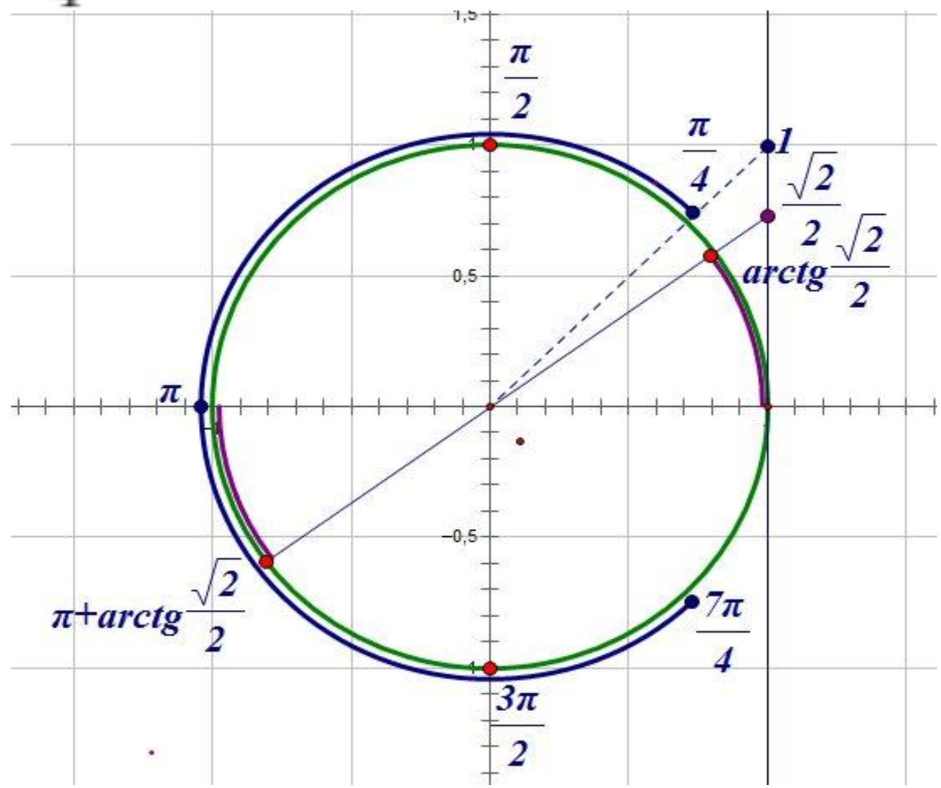
$$x=arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k, k\in\mathbb{Z}$$

Итак, мы получили два решения:

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$$

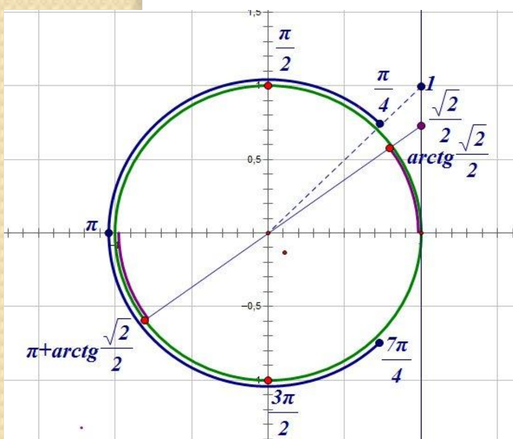
$$x=arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k, k\in\mathbb{Z}$$

б) Найдем корни, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right]$:



На рисунке красными точками обозначены решения уравнения;

синей дугой обозначен промежуток, которому принадлежат корни;



вая величина сиреневой

дуги равна $arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

гаясь из точки , мы $\frac{\pi}{4}$

на пути , $\frac{\pi}{2}$ $\pi+arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\frac{3\pi}{2}$

Это и есть корни уравнения, принадлежащие промежутку [$\frac{\pi}{4}$;$\frac{7\pi}{4}$].

Мы видим, что корень $arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ не принадлежит заданному промежутку.

Ответ: а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$

$$x=arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k, k\in\mathbb{Z}$$

б) $\frac{\pi}{2}$, $\pi+arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\frac{3\pi}{2}$,

И второе задание:

а) Решите уравнение: $\frac{1}{tg^2 x}+\frac{3}{sinx}+3=0$

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие промежутку

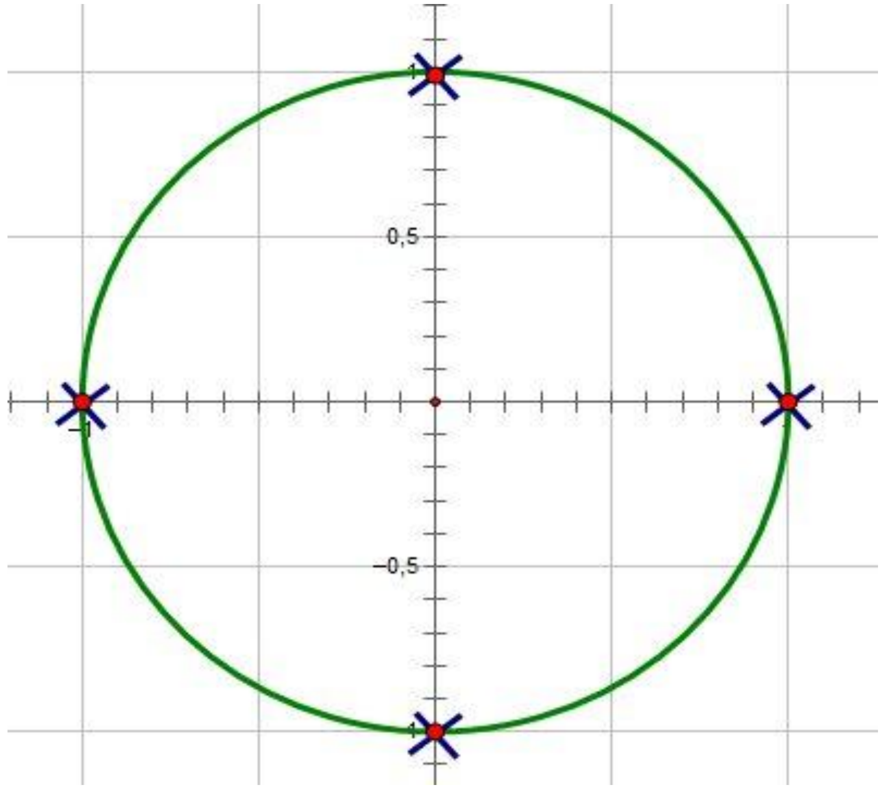
$[\frac{-5\pi}{2};-\pi]$

Засада в этом уравнении такая: когда мы ищем ОДЗ, то записываем $tgx\neq 0$ и $sinx\neq 0$

Будет ошибкой записать ОДЗ: $x\neq\pi k, k\in\mathbb{Z}$

Нельзя забывать, что tgx не определен при $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$,

то есть в конечном итоге мы получаем такую ОДЗ: $x\neq\frac{\pi k}{2}, k\in\mathbb{Z}$



Собственно, больше никаких сложностей в этом уравнении нет.

$$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{3}{sinx} + 3 = 0$$

Умножим обе части на $\sin^2 x$

:

$$\cos^2 x + 3\sin x + 3\sin^2 x = 0$$

$$\cos^2 x + 3\sin x + 3\sin^2 x = 0$$

$$\left(1 - \sin^2 x\right) + 3\sin x + 3\sin^2 x = 0$$

$$2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$$

Отсюда: $\sin x = -1$ или $\sin x = -\frac{1}{2}$

И вот в этом месте **важно** не пропустить, что корень уравнения $\sin x = -1$ – посторонний корень, так как не входит в ОДЗ исходного уравнения!

$\sin x = -\frac{1}{2}$

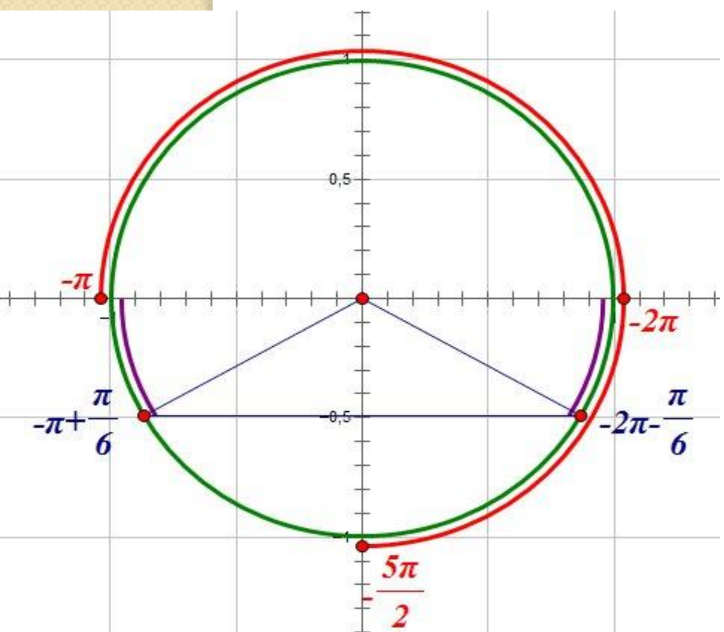
Но у нас еще есть корни уравнения

$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ или $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Осталось выбрать корни, принадлежащие промежутку $[\frac{-5\pi}{2}; -\pi]$

На рисунке красными точками на зеленой окружности обозначены решения уравнения;

красной дугой обозначен промежуток, которому принадлежат корни;



угловая величина сиреневой дуги $\frac{\pi}{6}$

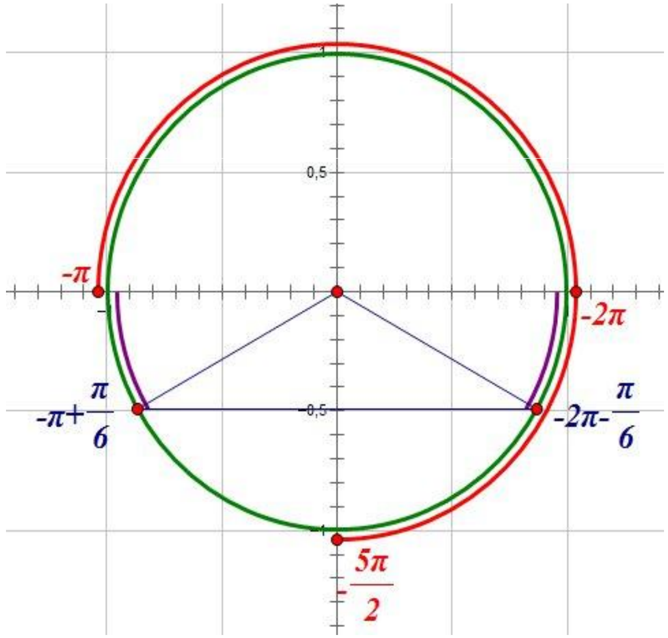
Двигаясь из точки $\frac{-5\pi}{2}$

мы встречаем на пути

$$-2\pi-\frac{\pi}{6}=-\frac{13\pi}{6}$$

– это и есть корень уравнения, принадлежащий промежутку

$$\left[\frac{-5\pi}{2};-\pi\right]$$



Ответ: а) $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$ или $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

б) $-\frac{13\pi}{6}$