

Рассмотрим **пределы применимости классического описания распределения частиц по скоростям.** Для этого воспользуемся **соотношением неопределенностей Гейзенберга.**

Согласно этому соотношению координаты и импульс частицы не могут одновременно иметь определенное значение. Классическое описание возможно, если выполнены условия:

$$\Delta x \Delta P_x \gg h, \quad \Delta y \Delta P_y \gg h, \quad \Delta z \Delta P_z \gg h.$$

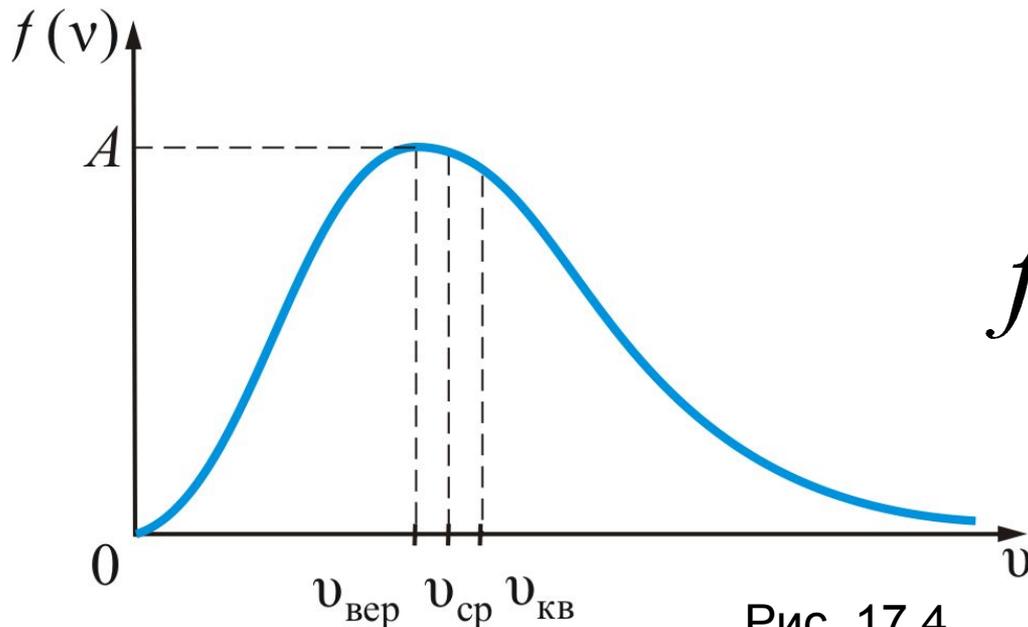
Здесь $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – фундаментальная константа (постоянная Планка), определяющая масштаб квантовых (микроскопических процессов).

Таким образом, **если частица находится в объеме , $\Delta x \Delta y \Delta z \gg h^3 / P^3$ то в этом случае возможно описание ее движения на основе законов классической механики.**

Наиболее вероятная, средне квадратичная и средняя арифметическая скорости молекул газа

Рассмотрим, как изменяется с абсолютной величиной скорости число частиц, приходящихся на единичный интервал скоростей, при единичной концентрации частиц.

График функции распределения Максвелла приведен на рис. 17.4



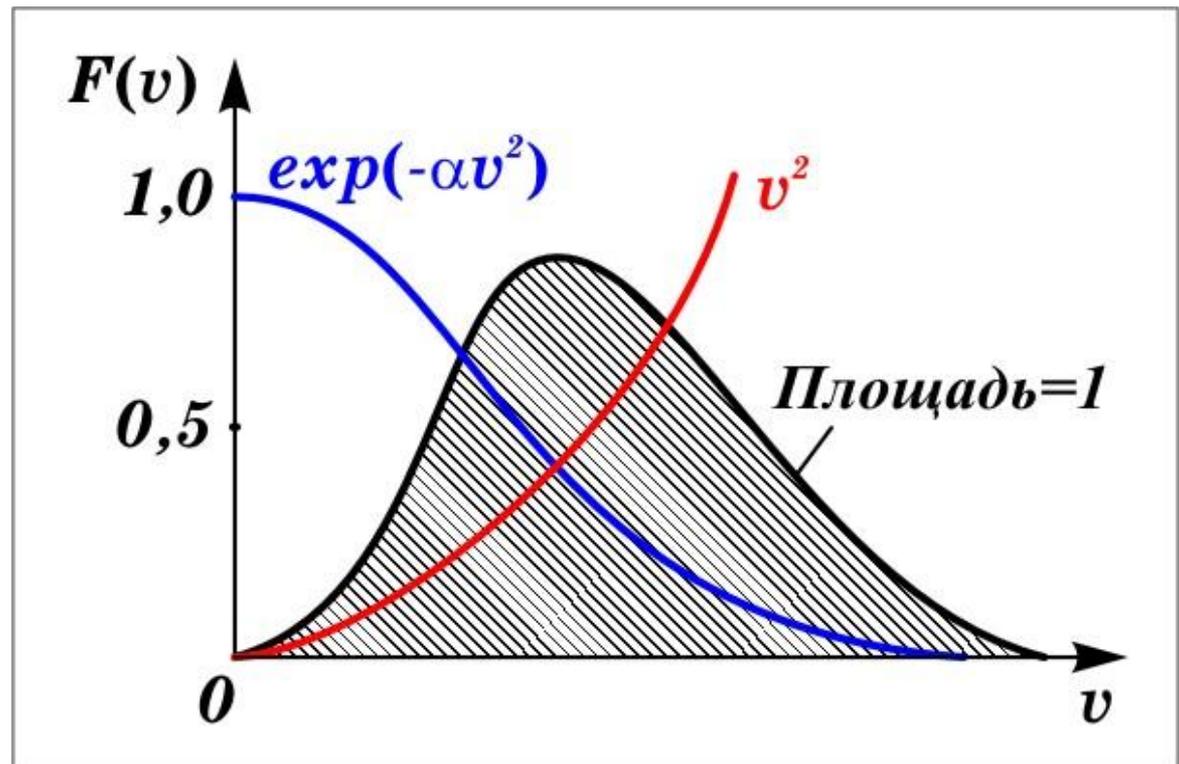
$$f(v) = A e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

Рис. 17.4

Из графика видно, что при «малых» v , т.е. при $\left(\frac{mv^2}{2kT} \ll 1\right)$ имеем $f(v)$ затем $f(v)$

достигает максимума A и далее экспоненциально спадает

$$f(v) \sim e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$



Величина скорости, на которую приходится **максимум** зависимости *называют наиболее вероятной скоростью*. Величину этой скорости найдем из условия равенства нулю производной

$$\frac{df(v)}{dv} = 0$$

$$u_B = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad \text{— для одной молекулы.} \quad (17.17)$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2kN_A T}{mN_A}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} \quad \text{— для одного моля газа.} \quad (17.17)$$

Среднюю квадратичную скорость найдем используя соотношение

$$\frac{m \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} kT,$$

Тогда

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad \text{— для одной молекулы.} \quad (17.18)$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \quad \text{— для одного моля газа.} \quad (17.19)$$

Средняя арифметическая скорость — $v_{\text{ср}}$

$$v_{\text{ср}} = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} v n f(v) dv \quad (17.20)$$

где $n f(v) dv = dn$ — число молекул со скоростью от v до $v + dv$. Если подставить сюда $f(v)$ и вычислить, то:

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \approx \sqrt{\frac{2,25kT}{m}}; \quad (17.21)$$

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \approx \sqrt{\frac{2,25RT}{\mu}}. \quad (17.22)$$

Полезно знать, что $\frac{v_{\text{ср}}}{v_{\text{В}}} = 1,13$; $\frac{v_{\text{КВ}}}{v_{\text{В}}} = 1,22$.

Формула Максвелла для относительных скоростей

Для решения многих задач удобно использовать формулу Максвелла, где скорость выражена в относительных единицах. Относительную

$$U = \frac{v}{v_{\text{в}}} \quad (17.23)$$

где $v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$. Тогда

$$\frac{dn}{ndU} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-U^2} U^2 \quad (17.24)$$

Формула Максвелла для относительных скоростей. Это уравнение универсальное. В таком виде функция распределения не зависит ни от рода газа ни от температуры.

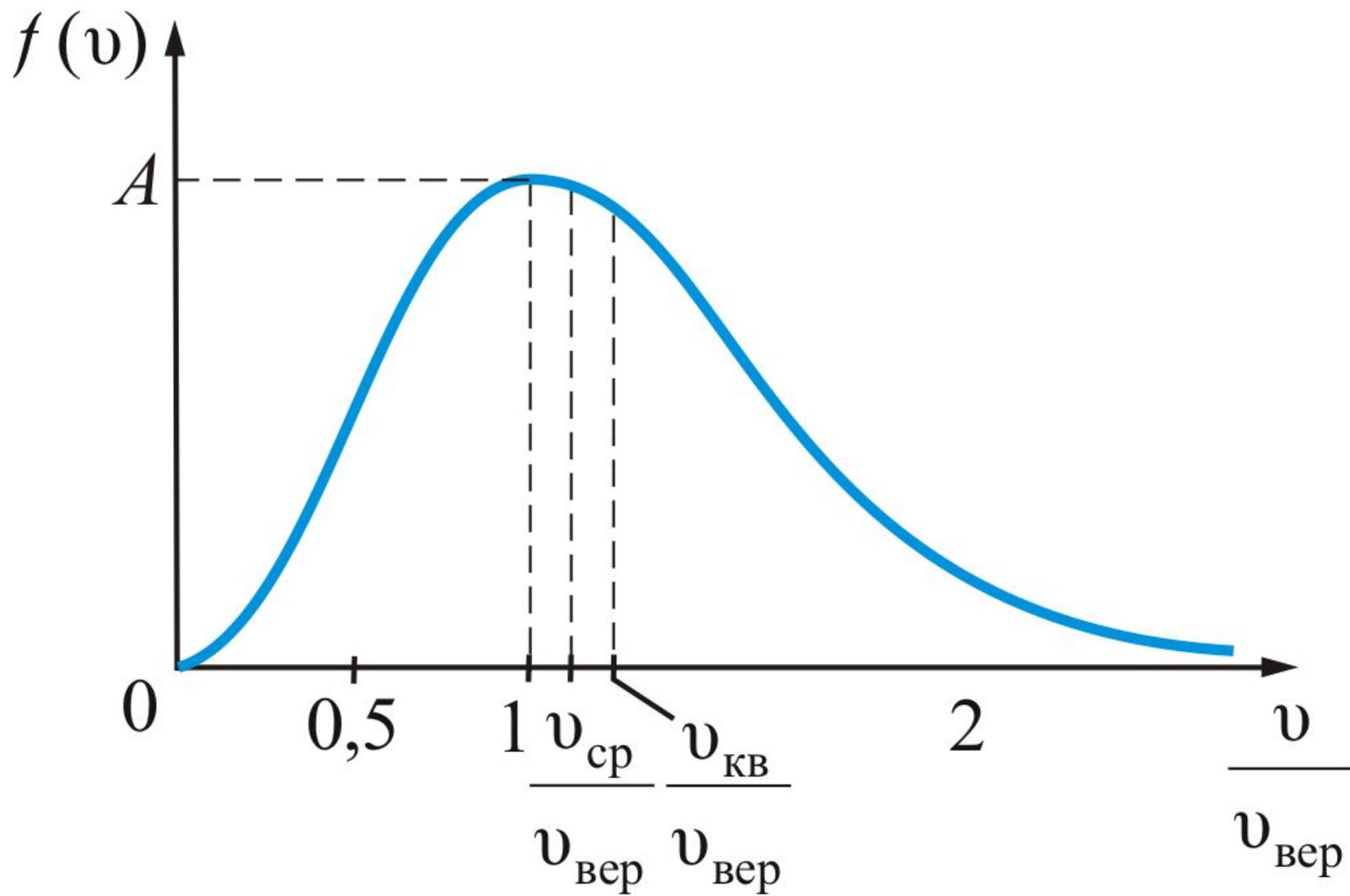


Рис. 17.4,а

На рисунке 17.4,а показано максвелловское распределение частиц $f(v)$ имеющих скорости от v до $v + dv$. За единицу скорости здесь взята наиболее вероятная скорость. Все три скорости незначительно отличаются друг от друга множителем порядка единицы, причем

$$v_{\text{кв}} > v_{\text{ср}} > v_{\text{вер}}.$$

Зависимость функции распределения Максвелла от массы и температуры газа

Если у нас смесь газов, то в пределах каждого сорта газа будет своё распределение со своим m

$$f(v_{\text{в}}) \approx \sqrt{\frac{m}{T}}, \text{ кроме того, } v_{\text{в}} \approx \sqrt{\frac{T}{m}}.$$

Можно проследить за изменением $f(v)$ при изменении m и T : $m_1 > m_2 > m_3$ ($T = \text{const}$) или $T_1 > T_2 > T_3$ ($m = \text{const}$) (рис. 17.5). Площадь под кривой $f(v) = \text{const} = 1$ поэтому важно знать как будет изменяться положение максимума кривой.

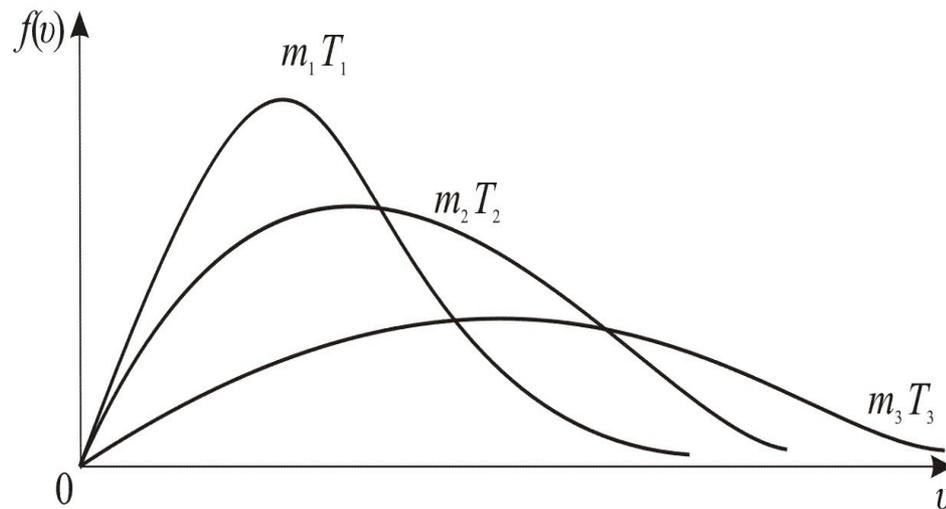


Рис. 17.5

Максвелловский закон распределения по скоростям и все вытекающие следствия справедливы только для газа в равновесной системе. Закон статически выполняется тем лучше, чем больше число молекул.

Лекция 18. Распределение Больцмана

18.1. Барометрическая формула

18.2. *Распределение Больцмана*

18.19. Закон распределения Максвелла-Больцмана

18.4. Распределение Бозе–Эйнштейна, Ферми–Дирака

18.1. Барометрическая формула

Рассмотрим ещё один вероятный закон - очень важный закон.

Атмосферное давление на какой-либо высоте h обусловлено весом выше лежащих слоёв газа. Пусть p – давление на высоте h , $p + \Delta p$ – на высоте $h + \Delta h$ (рис. 18.6). Причём $dh > 0$, $dp < 0$, так как на большой высоте давление меньше. Разность давления $p - (p + dp)$ равна весу газа, заключённого в объёме цилиндра с площадью основания равного единице и высотой dh , $p = \rho qh$, ρ медленно убывает с высотой.

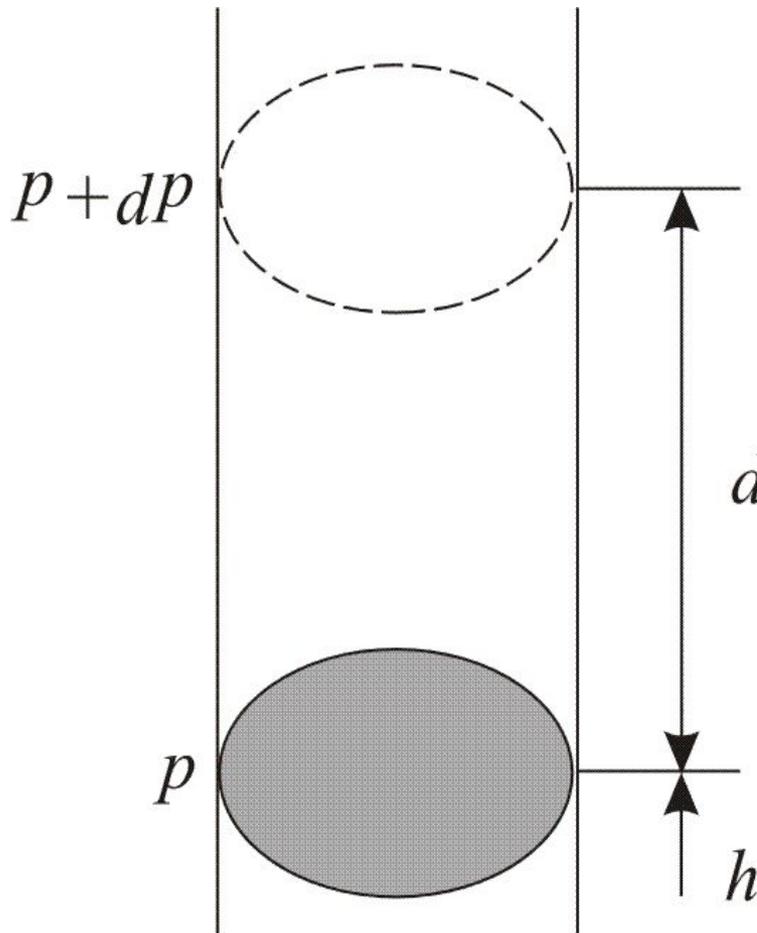


Рис. 18.6

$$p - (p + dp) = \rho g dh, \quad (18.25)$$

ρ – плотность газа на высоте h , которую можно найти из закона М-К

$$pV = (m/\mu)RT, \quad \rho = m/V = \mu p/(RT),$$

Тогда $dp = -\rho g dh = -\mu p g dh/(RT)$.

Входящая в эту формулу величина μ численно равна средней молекулярной массе воздуха, определенной с учетом процентного содержания в воздухе азота, кислорода и других газов.

Следовательно, $dp/p = -\mu g dh/(RT)$.
(18.25,a)

Температура T является некоторой функцией от h . Если вид этой функции известен, уравнение (18.25,a) можно

проинтегрировать и найти зависимость p от h . Для случая, когда температура постоянна, т.е. для изотермической атмосферы, интегрирование уравнения (18.25,а) приводит к соотношению

$$\ln p = - \mu gh / (RT) + \ln C,$$

где C константа (здесь удобно обозначить постоянную интегрирования через $\ln C$). Потенцируя полученное выражение, находим, что

$$p = C e^{-\frac{\mu gh}{RT}}.$$

Подставив сюда $h = 0$? Получим $C = p_0$, где p_0 – давление на высоте $h = 0$.

Таким образом, при сделанном нами допущении о постоянстве температуры зависимость давления от высоты выражается формулой

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}, \quad (18.26)$$

Это барометрическая формула. Из формулы следует, что p убывает с высотой тем быстрее, чем тяжелее газ (чем больше μ) и чем ниже температура.

На больших высотах концентрация He и N₂ гораздо больше чем у поверхности Земли. На (рис. 18.7) изображены две кривые, которые можно трактовать либо как соответствующие разным μ (при одинаковой T) либо как отвечающие разным T (при одинаковых μ), то есть чем тяжелее газ и чем ниже температура, тем быстрее убывает давление.

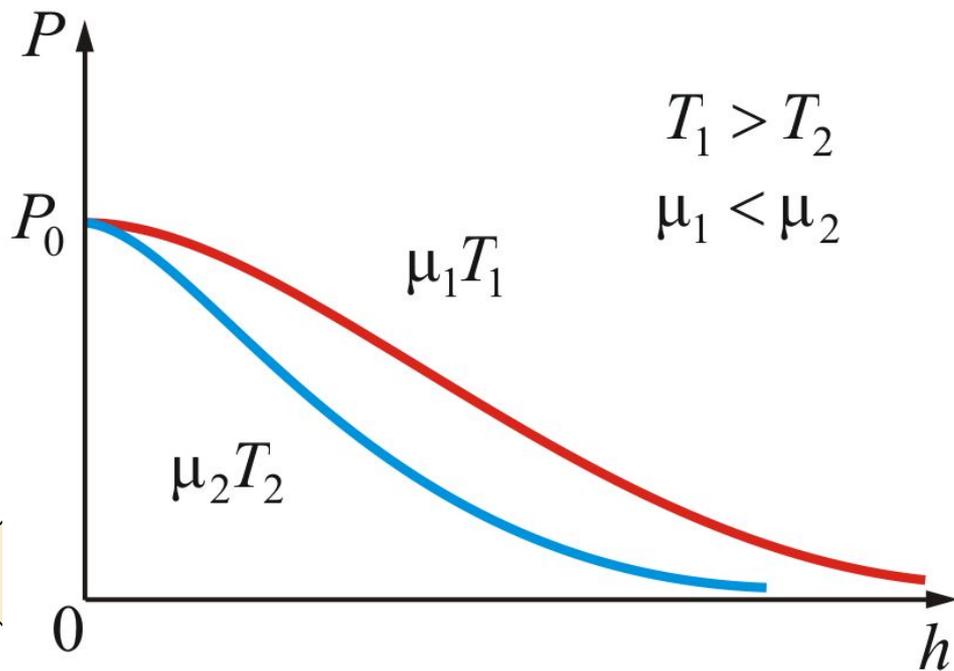


Рис.18.7

18.2. *Распределение Больцмана*

Распределение Больцмана определяет распределение частиц в силовом поле в условиях теплового равновесия.

Пусть идеальный газ находится в поле консервативных сил, в условиях теплового равновесия. При этом, концентрация газа будет различной в точках с различной потенциальной энергией, что необходимо для соблюдения условий механического равновесия.

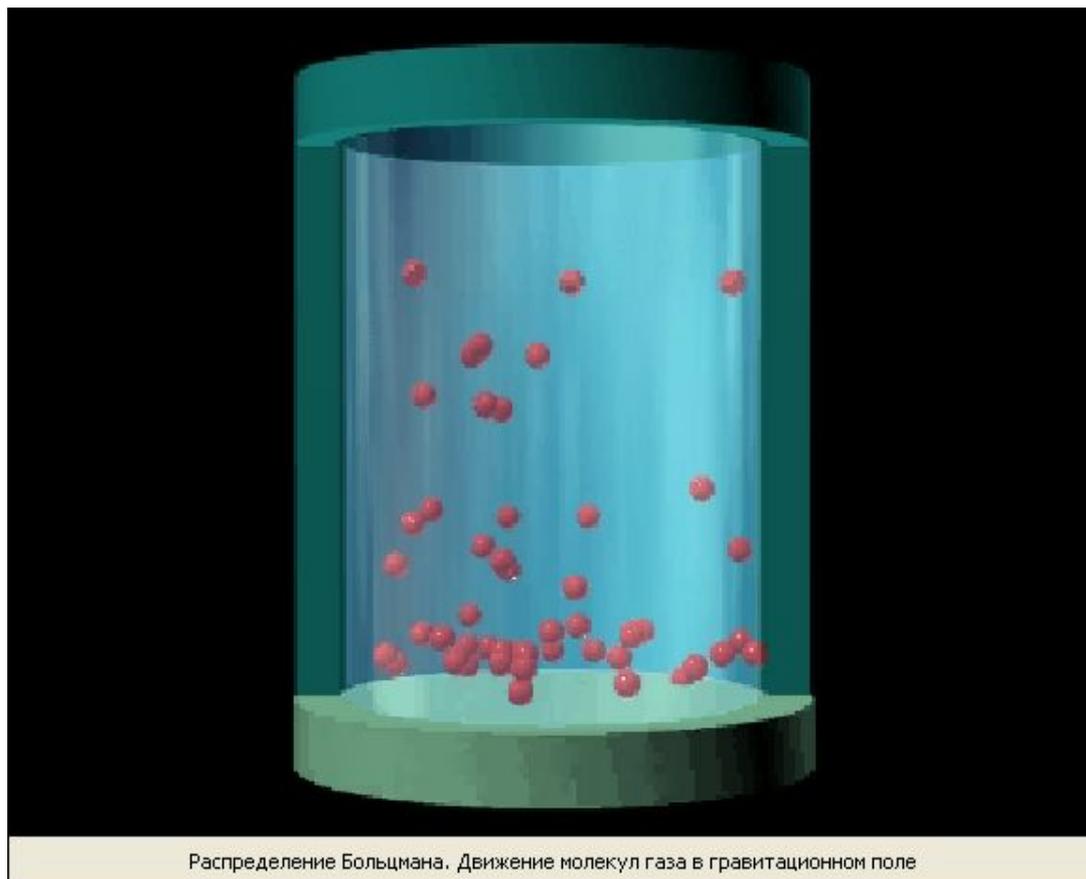
Число молекул в единичном объеме n убывает с удалением от поверхности Земли, и *давление*, в силу соотношения $p = nkT$ тоже *убывает*.

Если известно число молекул в единичном объеме, то известно и давление, и наоборот. Давление и плотность пропорциональны друг другу, поскольку температура в нашем случае постоянна. Давление с уменьшением высоты должно возрастать, потому что нижнему слою приходится выдерживать вес всех расположенных сверху атомов.

Исходя из основного уравнения молекулярно-кинетической теории: $p = nkT$, заменим p и p_0 в барометрической формуле (18.26) на n и n_0 и получим **распределение Больцмана** для молярной массы газа:

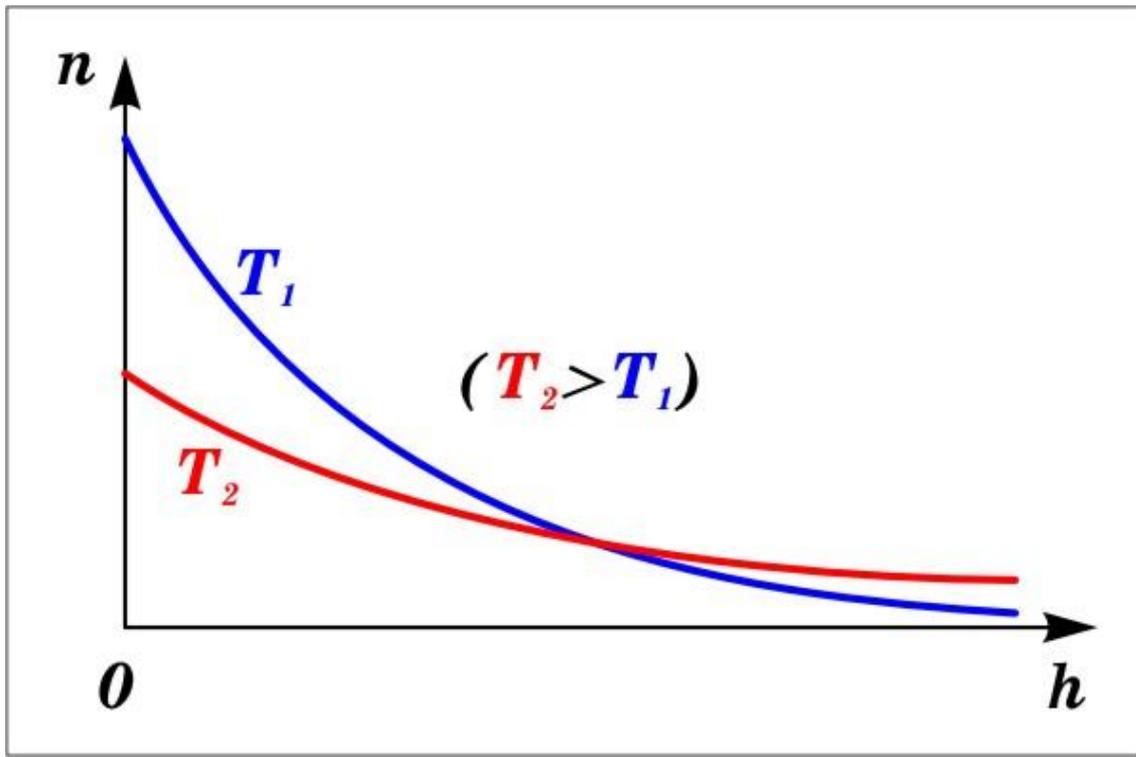
$$n = n_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}, \quad (18.27)$$

где n_0 и n – число молекул в единичном объёме на высоте $h = 0$ и h , соответственно.



Так как $\mu = mN_A$, $R = N_A k$, то **распределение Больцмана** можно представить в виде:

$$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} \quad (18.28)$$



С уменьшением температуры число молекул на высотах, отличных от нуля, убывает. При $T \rightarrow 0$ тепловое движение прекращается, все молекулы расположились бы на земной поверхности.

При высоких температурах, наоборот, молекулы оказываются распределёнными по высоте почти равномерно, а плотность молекул медленно убывает с высотой.

Так как $U = mgh$ – потенциальная энергия, следовательно, **распределение Больцмана** характеризует распределение частиц по значениям потенциальной энергии:

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}} \quad (18.29)$$

– это закон распределения частиц по потенциальным энергиям – **распределение Больцмана**. Здесь n_0 – число молекул в единице объёма в там, где $U = 0$.

На рис. 18.8 показана **зависимость концентрации различных газов от высоты.** Видно, что **число более тяжелых молекул с высотой убывает быстрее, чем легких.**

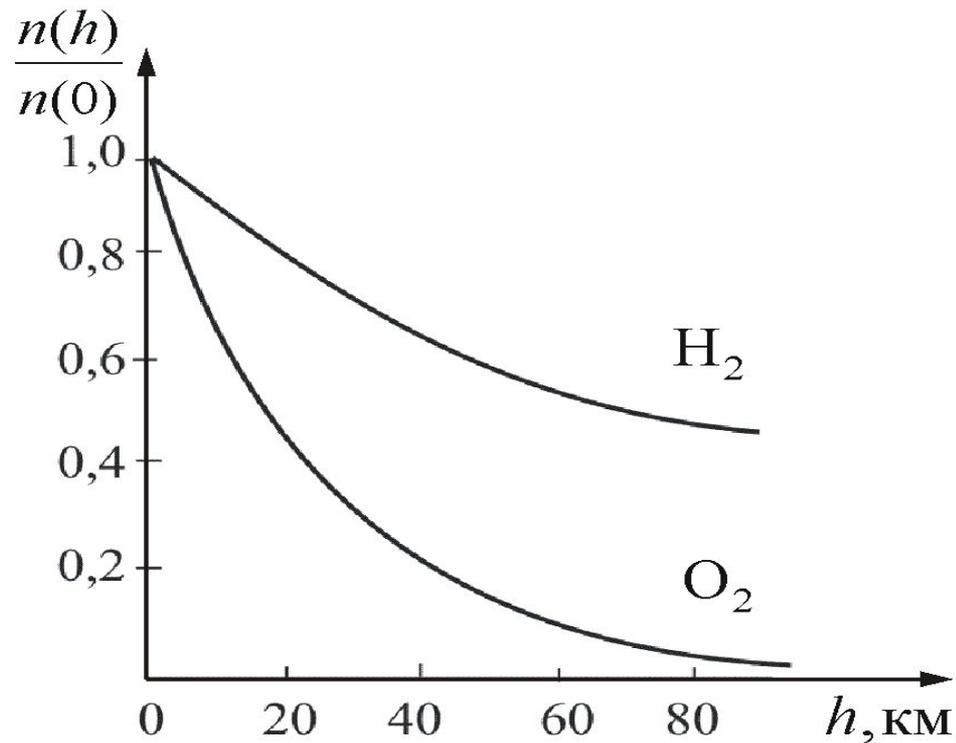


Рис. 18.8

Из (18.29) можно получить, что отношение концентраций молекул в точках с U_1 и U_2 обладающих именно таким значением

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{-\frac{U_1 - U_2}{kT}} \quad (18.30)$$

Больцман доказал, что соотношение (18.29) справедливо не только в потенциальном поле сил гравитации, но и в любом потенциальном поле, для совокупности любых одинаковых частиц, находящихся в состоянии хаотического теплового движения.

Итак, Максвелл дал распределение частиц по значениям кинетической энергии, а Больцман – по значениям потенциальной энергии. Оба распределения можно объединить в один закон – **распределение Максвелла–Больцмана.**

18.19. Закон распределения Максвелла-Больцмана

В начале лекции мы с вами получили выражение для распределения молекул по скоростям (распределение Максвелла):

$$dn(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv. \quad (18.30)$$

Из этого выражения легко найти распределение молекул газа по значениям кинетической энергии $W_{\text{к}}$. Для этого перейдём от переменной v к переменной $W_{\text{к}} = mv^2/2$, то есть, подставим в предыдущее выражение $v = \sqrt{\frac{2W_{\text{к}}}{m}}$ и $dv = \frac{1}{\sqrt{2m}} dW_{\text{к}}$:

$$dn(W_K) = \frac{2n}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} W_K^{1/2} e^{-\frac{W_K}{kT}} dW_K = nf(W_K) dW_K, \quad (18.31)$$

где $dn(W_K)$ – число молекул имеющих кинетическую энергию поступательного движения, заключённую в интервале от W_K до $W_K + dW_K$. То есть функция распределения молекул по энергиям теплового движения:

$$f(W_K) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} W_K^{1/2} e^{-\frac{W_K}{kT}}. \quad (18.32)$$

Средняя кинетическая энергия молекулы идеального

газа: $\langle W_K \rangle = \int_0^{\infty} W_K f(W_K) dW_K = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{3/2} \int_0^{\infty} W^{3/2} e^{-\frac{W}{kT}} = \frac{3}{2} kT,$

то есть получим результат совпадающий с прежним результатом.

Итак, закон Максвелла даёт распределение частиц по значениям кинетической энергии, а закон Больцмана – даёт распределение частиц по значениям потенциальной энергии. Оба распределения можно объединить в один закон Максвелла–Больцмана, согласно которому, число молекул в единице объёма, скорости которых лежат в пределах от v до $v+dv$ равно

$$dn_{W_n, W_k} = n_0 \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{U + \frac{mv^2}{2}}{kT}} v^2 dv. \quad (18.33)$$

Обозначим W – полная энергия равна $U + W_{\text{к}}$

$$dn = n_0 A e^{-\frac{W}{kT}} v^2 dv. \quad (18.34)$$

Это и есть закон распределения Максвелла-Больцмана, где n_0 – число молекул в единице объёма в той точке, где $W_{\text{п}}=0$, $mv^2/2=W_{\text{к}}$;

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2; A = \left(\frac{m}{\pi 2kT} \right)^{3/2}.$$

В последнем выражении, потенциальная и кинетическая энергии, а следовательно и полная энергия W могут принимать непрерывный ряд значений. Если же энергия частицы может принимать лишь дискретный ряд значений $W_1, W_2 \dots$ (как это имеет место, например, для внутренней энергии атома), то в этом случае распределение Больцмана имеет вид:

$$N_i = ANe^{-\frac{W_i}{kT}} \quad (18.35)$$

где N_i – число частиц, находящихся в состоянии с энергией W_i , а A – коэффициент пропорциональности, который должен удовлетворять условию:

$$\sum N_i = A \sum e^{-\frac{W_i}{kT}} = N, \quad (18.36)$$

В (18.36) N – полное число частиц в рассматриваемой системе.

Тогда окончательное выражение распределения Больцмана для случая дискретных значений

$$N_i = \frac{N e^{-W_i/kT}}{\sum e^{-W_i/kT}}. \quad (18.37)$$

18.4. Распределение Бозе–Эйнштейна, Ферми–Дирака

Если у нас имеется термодинамическая система состоящая из N частиц, энергии которых могут принимать дискретные значения ($W_1, W_2 \dots W_n$), то говорят о системе квантовых чисел.

Поведение такой системы описывается квантовой статистикой, в основе которой лежит принцип неразличимости тождественных частиц. Основная задача этой статистики состоит в определении среднего числа частиц, находящихся в ячейке фазового пространства: «координаты–проекции импульса» (x, y, z и P_x, P_y, P_z) частиц. При этом имеют место два закона распределения частиц по энергиям (две статистики).

1. Распределение Бозе – Эйнштейна:

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{e^{(W_i - \mu)/kT} - 1} \quad (18.38)$$

2. Распределение Ферми – Дирака:

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{e^{(W_i - \mu)/kT} + 1} \quad (18.39)$$

Первая формула описывает квантовые частицы с целым спином (собственный момент движения). Их называют **бозоны** (например фотоны). Вторая формула описывает квантовые частицы с полуцелым спином. Их называют **фермионы**, например: электроны, протоны, нейтроны).

Лекция 19. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

- 19.1. Явления переноса в газах
- 19.2. Число столкновений и средняя длина свободного пробега молекул в газах
- 19.3. Диффузия газов
- 19.4. Внутреннее трение. Вязкость газов
- 19.5. Теплопроводность газов
- 19.6. Коэффициенты переноса и их зависимость от давления
- 19.7. Понятие о вакууме

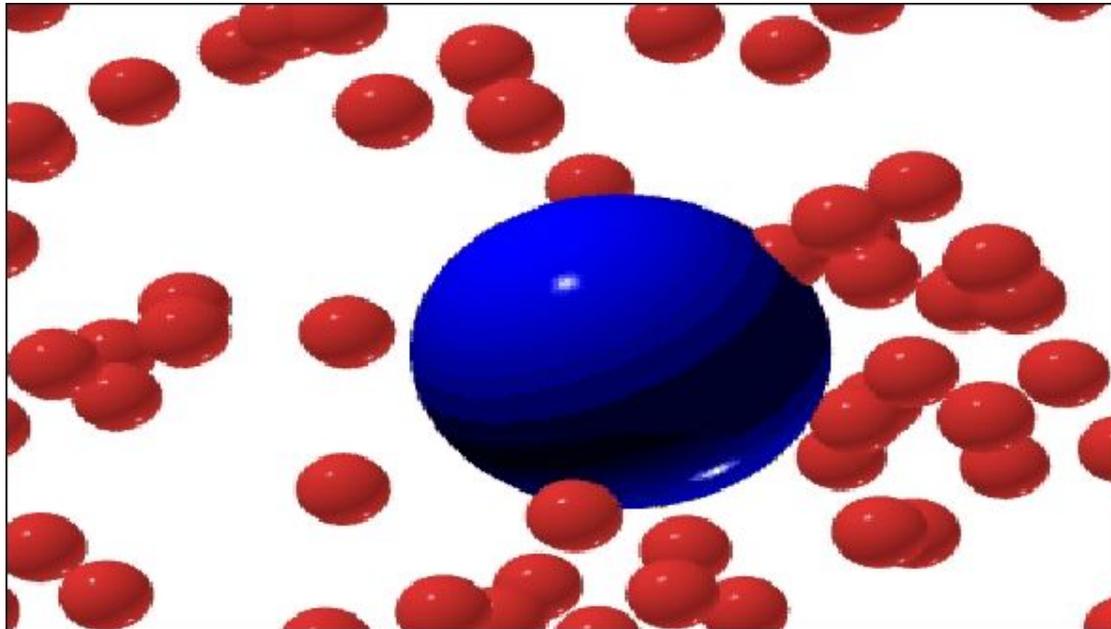
19.1. Явления переноса в газах

Из л. 16 мы знаем, что молекулы в газе движутся со скоростью звука, с такой же скоростью движется пуля. Однако, находясь в противоположном конце комнаты, запах разлитой пахучей жидкости мы почувствуем через сравнительно большой промежуток времени. Это происходит потому, что молекулы движутся хаотически, сталкиваются друг с другом, траектория движения у них ломанная.

Рассмотрим некоторые явления, происходящие в газах.

Распространение молекул примеси в газе от источника называется диффузией.

В состоянии равновесия температура T и концентрация n во всех точках системы одинакова. При отклонении плотности от равновесного значения в некоторой части системы возникает движение компонент вещества в направлениях, приводящих к выравниванию концентрации по всему объему системы.



Хаотическое движение миниатюрной частицы, подвешенной в жидкости или газе (Броуновское движение)

Связанный с этим движением перенос вещества обусловлен *диффузией*.
Диффузионный поток будет пропорционален градиенту концентрации:

$$J \sim \frac{dn}{dx}$$

Если какое либо тело движется в газе, то оно сталкивается с молекулами газа и сообщает им импульс. С другой стороны, тело тоже будет испытывать соударения со стороны молекул, и получать собственный импульс, но направленный в противоположную сторону. Газ ускоряется, тело тормозится, то есть, ***на тело действуют силы трения***. Такая же сила трения будет действовать и между двумя соседними слоями газа, движущимися с разными скоростями.



Это явление носит название *внутреннее трение* или *вязкость газа*, причём *сила трения пропорциональна градиенту скорости*:

$$F_{\text{тр}} \sim \frac{dv}{dx} \quad (19.1.1)$$

Если в соседних слоях газа создана и поддерживается разность температур, то между ними будет происходить обмен теплом. Благодаря хаотическому движению, молекулы в соседних слоях будут перемешиваться и их средние энергии будут выравниваться. Происходит *перенос энергии от более нагретых слоев к более холодным телам.*

Перенос энергии от более нагретых слоев к более холодным телам.

называется теплопроводностью.

Поток тепла пропорционален градиенту температуры:

$$Q \sim \frac{dT}{dx} \quad (19.1.2)$$

В состоянии равновесия в среде, содержащей заряженные частицы, потенциал электрического поля в каждой точке соответствует минимуму энергии системы. При наложении внешнего электрического поля возникает неравновесное движение электрических зарядов в таком направлении, чтобы минимизировать энергию системы в новых условиях.

Связанный с этим движением **перенос** электрического заряда называется ***электропроводностью***, а само направленное движение зарядов — **электрическим током**.

В процессе диффузии, происходит перенос вещества, при теплопроводности и электропроводности происходит перенос энергии, а при внутреннем трении – перенос импульса. В основе этих явлений лежит один и тот же механизм – хаотическое движение молекул. Общность механизма, обуславливающего все эти явления переноса, приводит к тому, что их закономерности должны быть похожи друг на друга.

19.2. Число столкновений и средняя длина свободного пробега молекул в газах

Обозначим λ_i – длина свободного пробега молекулы.

Медленность явлений переноса, например диффузии ароматических веществ – «распространение запаха», – при относительно высокой скорости теплового движения молекул (м/с) объясняется столкновениями молекул.

Расстояние, проходимое молекулой в среднем без столкновений, называется *средней длиной свободного пробега*. Средняя длина свободного пробега равна:

$$\langle \lambda \rangle = v_{\text{ср}} \tau,$$

где $v_{\text{ср}}$ – средняя скорость теплового движения, τ – среднее время между двумя столкновениями. Именно – средняя длина свободного пробега, нас и интересует (рис. 19.1).

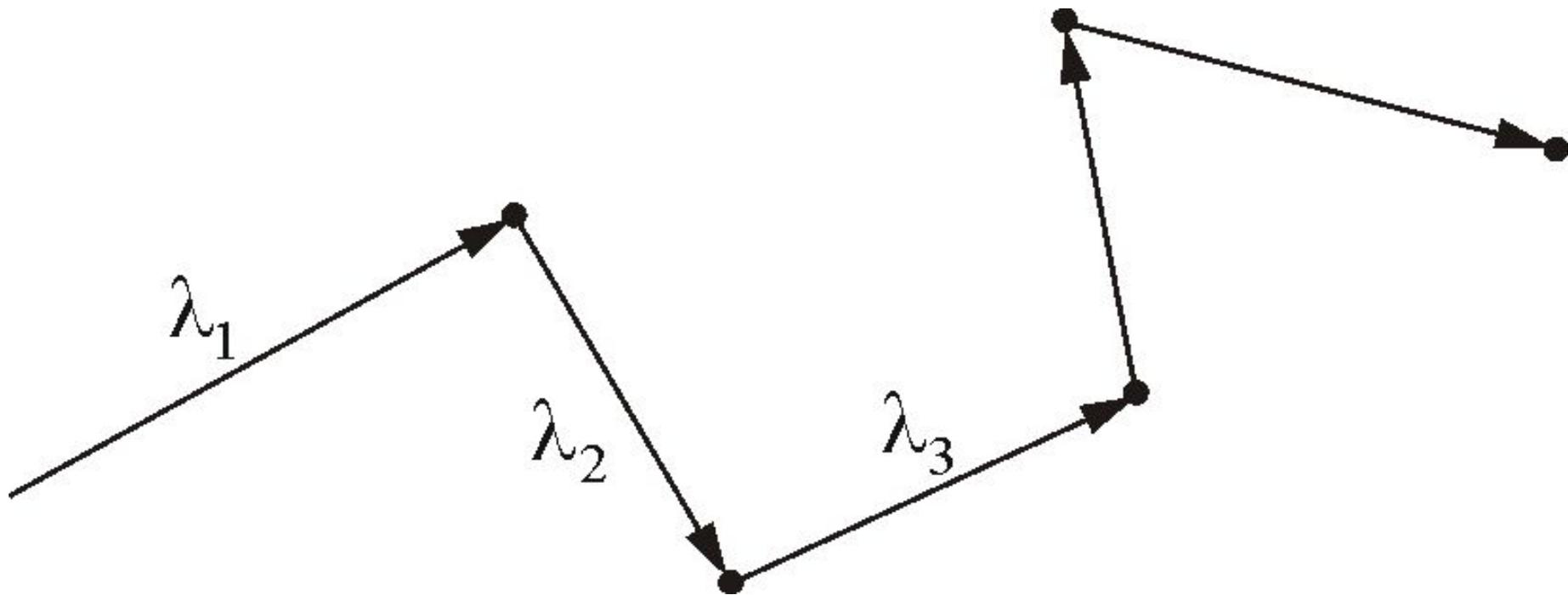


Рис. 19.1

Модель идеального газа – твёрдые шарики одного диаметра, взаимодействующие между собой только при столкновении.

Обозначим σ – *эффективное сечение* молекулы – *полное поперечное сечение рассеяния*, характеризующее столкновение между двумя молекулами (рис. 19.2).

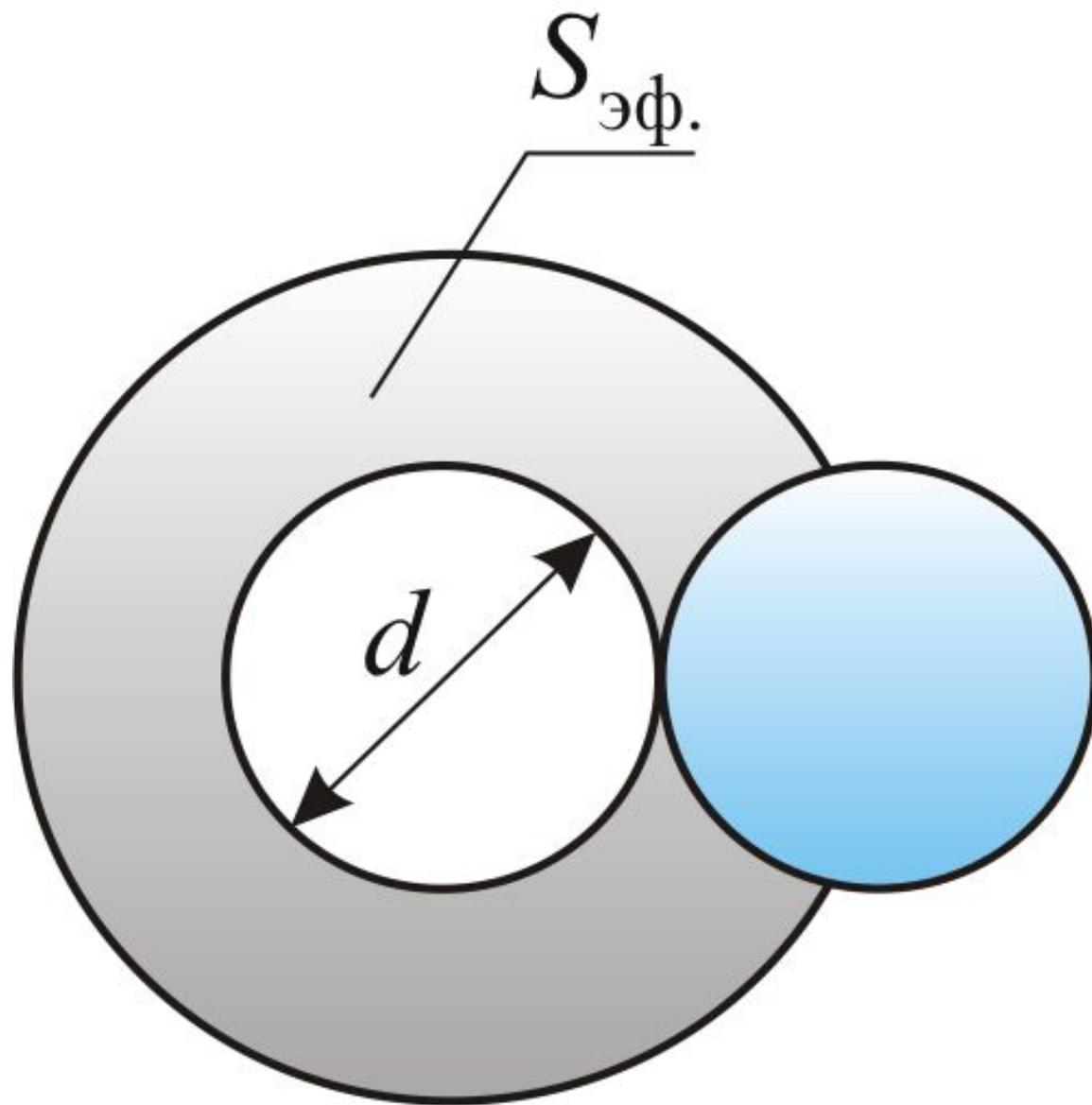


Рис. 19.2

$\sigma = \pi d^2$ – площадь в которую не может проникнуть центр любой другой молекулы.

Здесь $d = 2r$ – диаметр молекулы.

За одну секунду молекула проходит путь, равный средней арифметической скорости $\langle v \rangle$. За ту же секунду молекула

претерпевает V столкновений.

Следовательно,

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\langle v \rangle}{V}. \quad (19.2.1)$$

Подсчитаем число столкновений ν .

Вероятность столкновения трех и более молекул бесконечно мала.

Предположим, что все молекулы застыли, кроме одной. Её траектория будет представлять собой ломаную линию. Столкновения будут только с теми молекулами, центры которых лежат внутри цилиндра радиусом d (рисунок 19.3).

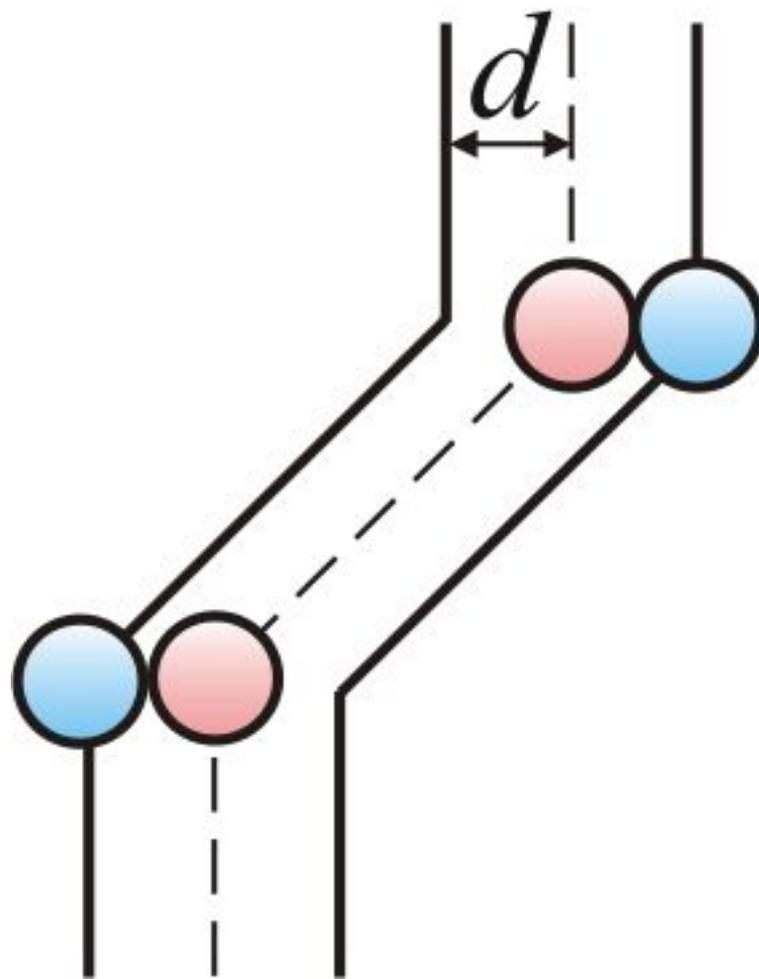


Рис. 19.3

Путь, который пройдет молекула за одну секунду, равен длине цилиндра $\langle v' \rangle$. Умножим объём цилиндра $\langle v' \rangle \sigma$ на число молекул в единице объёма n , получим среднее **число столкновений в одну секунду**:

$$v = \pi d^2 \langle v' \rangle n.$$

На самом деле, все молекулы движутся (и в сторону и навстречу друг другу), поэтому число соударений определяется средней скоростью движения молекул относительно друг друга.

По закону сложения случайных величин

$$\langle v' \rangle = \sqrt{\langle v^2 \rangle + \langle v^2 \rangle} = \sqrt{2 \langle v^2 \rangle} = \langle v \rangle \sqrt{2}.$$

А так как средняя длина свободного пробега

то получим:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\langle v \rangle}{v},$$

$$(19.2.2) \quad \langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} n \pi d^2} = \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma}.$$

Уравнение состояния идеального газа

позволяет нам выразить n через давление P и

термодинамическую температуру T :

Так как $P = nkT$, то есть $n = \frac{P}{kT}$, тогда

$$\langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 P} = \frac{kT}{\sqrt{2} \sigma P}.$$

(19.2.3)

Таким образом, при заданной температуре, средняя длина свободного пробега обратно пропорциональна давлению P :

$$\langle \lambda \rangle \sim \frac{1}{P}$$

Например, при $d = 3 \text{ \AA} = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, $P = 1 \text{ атм.}$, $T = 300 \text{ К}$, $\langle \lambda \rangle = 10^{-7} \text{ м}$, а т.к. $\langle v \rangle = 10^3 \text{ м/с}$, то

$$v = \frac{10^3}{10^{-7}} = 10^{10} \text{ СТОЛКНОВЕНИЙ.}$$

19.3. Диффузия газов

Диффузия от латинского *diffusio* – распространение, растекание – взаимное проникновение соприкасающихся веществ друг в друга, вследствие теплового движения частиц вещества. Диффузия происходит в направлении уменьшения концентрации вещества и ведет к его равномерному распределению по занимаемому объему.

Диффузия имеет место в газах, жидкостях и твердых телах. Наиболее быстро диффузия происходит в газах, медленнее в жидкостях, еще медленнее в твердых телах, что обусловлено характером движения частиц в этих средах.

Для газа *диффузия – это распределение молекул примеси от источника* (или взаимная диффузия газа).

Решаем одномерную задачу. Пусть в газе присутствует примесь с концентрацией n в точке с координатой x . Концентрация примеси зависит от координаты x (рисунок 19.4).

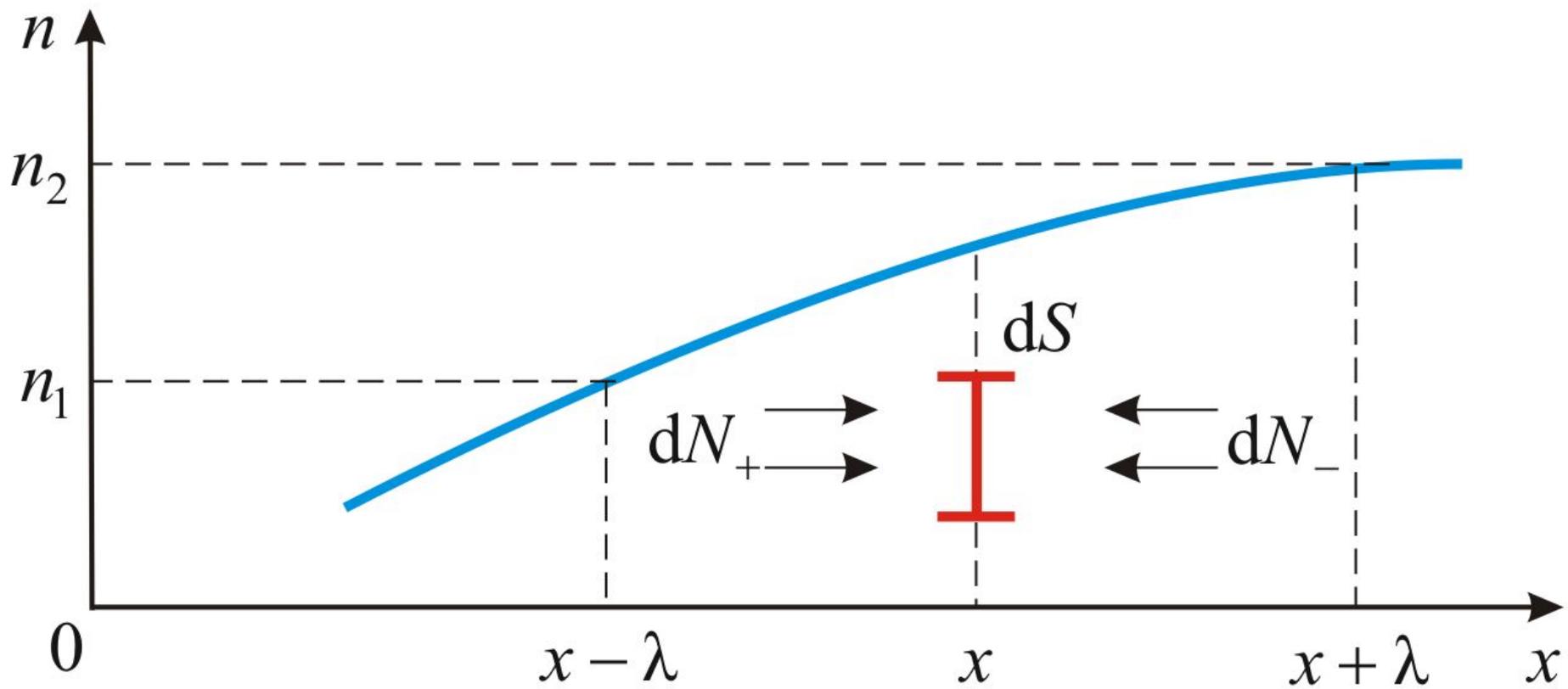


Рисунок 19.4

Градиент концентрации, в общем случае равен

$$\text{grad } n = \frac{dn}{dx} \mathbf{i} + \frac{dn}{dy} \mathbf{j} + \frac{dn}{dz} \mathbf{k} \quad (19.19.1)$$

Так

как у нас одномерная задача, то $\text{grad } n = \frac{dn}{dx}$.

При наличии $\text{grad } n$, хаотическое движение будет более направленным и возникнет поток молекул примеси, направленный от мест с большей концентрацией к местам с меньшей концентрацией. Найдём этот поток.

находится единичная площадку dS , перпендикулярная оси x . Подсчитаем число молекул, проходящих через площадку в направлении слева направо и справа налево dN , за время dt (рисунок 19.4).

$$dN_+ = \frac{1}{6} n_1 \langle v \rangle dS dt$$

$$dN_- = \frac{1}{6} n_2 \langle v \rangle dS dt,$$

где n_1 – концентрация молекул слева от площади, а n_2 – концентрация молекул

Тогда $dN = dN_+ - dN_-$.

Результирующий диффузионный поток через единицу площади в единицу времени:

$$J = \frac{dN}{dSdt} = \frac{1}{6} (n_1 - n_2) \langle v \rangle$$

$$J = -\frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle \frac{n_2 - n_1}{2\lambda},$$

но $n_2 - n_1 = dn$; $2\lambda = dx$, из этого следует,
что

$$\frac{n_2 - n_1}{2\lambda} = \frac{dn}{dx}.$$

Обозначим: $D = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle$ – *коэффициент диффузии.*

Тогда *диффузионный поток* будет равен:

$$J = -D \frac{dn}{dx}, \quad (19.19.2)$$

или в общем случае (в трёхмерной системе)

$$J = -D \operatorname{grad} n \quad (19.19.3)$$

– *уравнение Фика.*

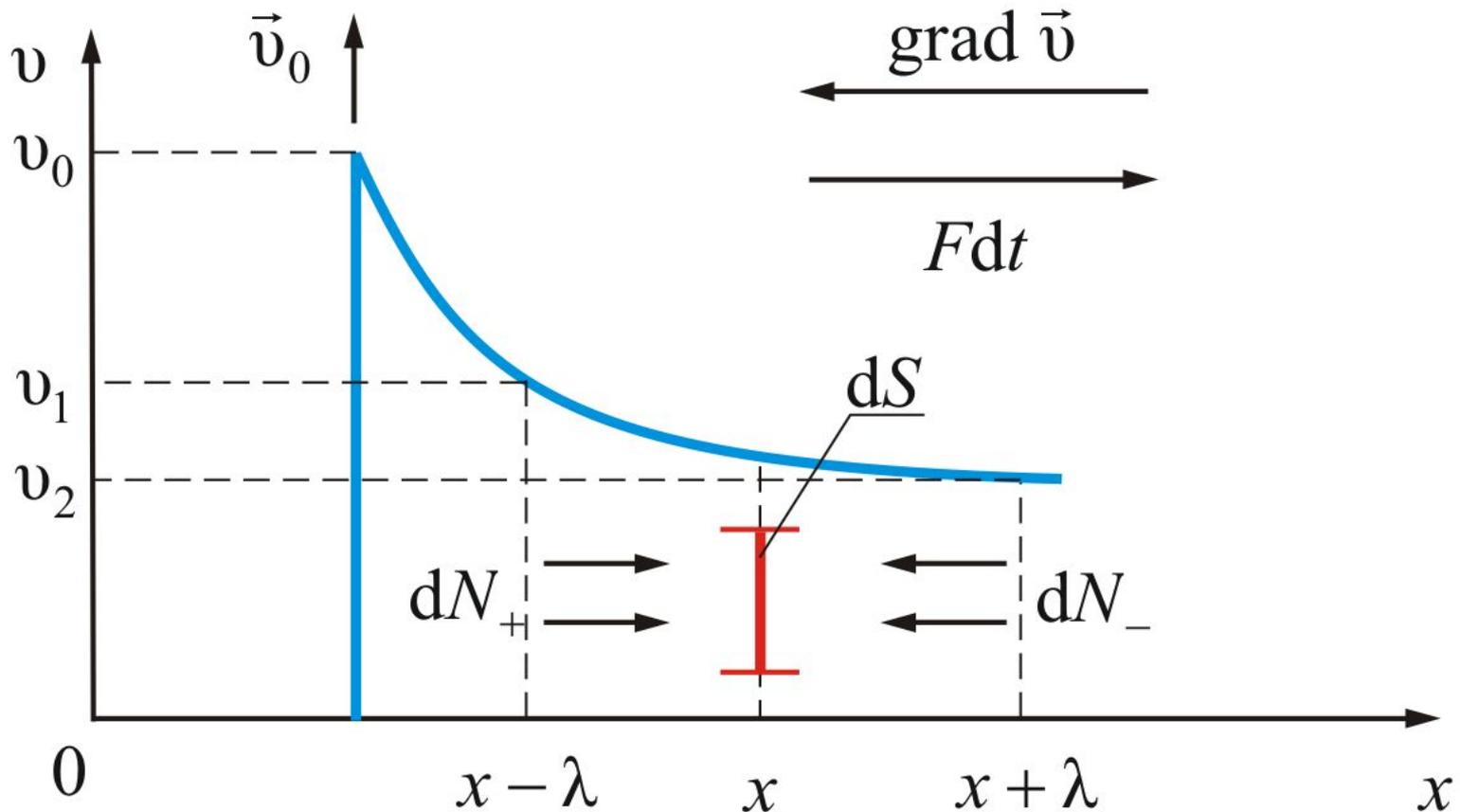
Из уравнения Фика видно, что *диффузионный поток, направлен в сторону уменьшения концентрации.*

При этом коэффициент диффузии D численно равен диффузионному потоку через единицу площади в единицу времени при $\text{grad } n = 1$

Измеряется коэффициент диффузии в м/с^2 .

19.4. Внутреннее трение. Вязкость газов

Рассмотрим ещё одну систему координат: u от x (рисунок 19.5).



Пусть в покоящемся газе вверх, перпендикулярно оси x движется пластинка со скоростью v_0 , причём $v_0 \ll v_T$ (v_T – скорость теплового движения молекул).
Пластинка увлекает за собой прилегающий слой газа, тот слой – соседний и так далее. Весь газ делится, как бы на тончайшие слои, скользящие вверх тем медленнее, чем дальше они от пластинки. Раз слои газа движутся с разными скоростями, возникает трение.
Выясним причину трения в газе.

Каждая молекула газа в слое принимает участие в двух движениях: тепловом и направленном.

Так как направление теплового движения хаотически меняется, то в среднем вектор тепловой скорости равен нулю ($\vec{u}_T = 0$). При направленном движении вся совокупность молекул будет дрейфовать с постоянной скоростью u .

Таким образом, средний импульс отдельной молекулы в слое определяется только дрейфовой скоростью v :

$$p_0 = m_0 v.$$

Но так как молекулы участвуют в тепловом движении, они будут переходить из слоя в слой. При этом они будут переносить с собой добавочный импульс, который будет определяться молекулами того слоя, куда перешла молекула.

Перемешивание молекул разных слоёв приводит к выравниванию дрейфовых скоростей разных слоёв, что и проявляется макроскопически как действие сил трения между слоями.

Вернёмся к рисунку 19.5 и рассмотрим элементарную площадку dS перпендикулярно оси x . Через эту площадку за время dt влево и вправо переходят потоки молекул. Как мы уже говорили

$$dN_+ = dN_- = \frac{1}{6} n \langle v \rangle dS dt.$$

Но эти потоки переносят разный импульс:

$$m_0 v_1 dN_+ \quad \text{и} \quad m_0 v_2 dN_- .$$

При переносе импульса от слоя к слою происходит изменение импульса этих слоёв.

Это значит, что на каждый из этих слоёв действует сила, равная изменению импульса.

Сила эта есть не что другое, как *сила трения*

между слоями газа, движущимися с

различными скоростями. Отсюда и название

– *внутреннее трение*.

Закон вязкости был открыт И. Ньютоном в 1687 г.

Переносимый за время dt импульс равен: $d(m_0 v)$

Или
$$F dt = \frac{1}{6} n \langle v \rangle m_0 (v_1 - v_2) dS$$

Отсюда получим силу, действующую на единицу площади поверхности, разделяющей два соседних слоя газа:

$$\frac{F}{dS} = f = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle n m_0 \left(\frac{v_1 - v_2}{2\lambda} \right) = -\frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle m_0 n \frac{v_2 - v_1}{2\lambda}.$$

Сила, действующая на единицу площади поверхности, разделяющей два соседних слоя газа:

$$f = -\eta \frac{dv}{dx}.$$

Или, в общем виде

$$f = -\eta \operatorname{grad} \overset{\nabla}{v}. \quad (19.4.2)$$

Это уравнение называют – *уравнением Ньютона*, здесь η – *коэффициент вязкости*, равный:

$$\eta = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle n m_0 = D \rho, \quad (19.4.3)$$

где D – коэффициент диффузии; ρ – плотность газа.

Физический смысл η в том, что он численно равен импульсу, переносимому в единицу времени через единицу площади при градиенте скорости равном единице.

19.5. Теплопроводность газов

Учение о теплопроводности начало развиваться в XVIII в. и получило свое завершение в работах французского ученого Ж. Фурье (1768 – 1830), опубликовавшего в 1822 г. книгу «Аналитическая теория теплоты».

Рассмотрим газ, заключённый между двумя параллельными стенками, имеющими разную температуру T_a и T_b (рисунок 19.6).

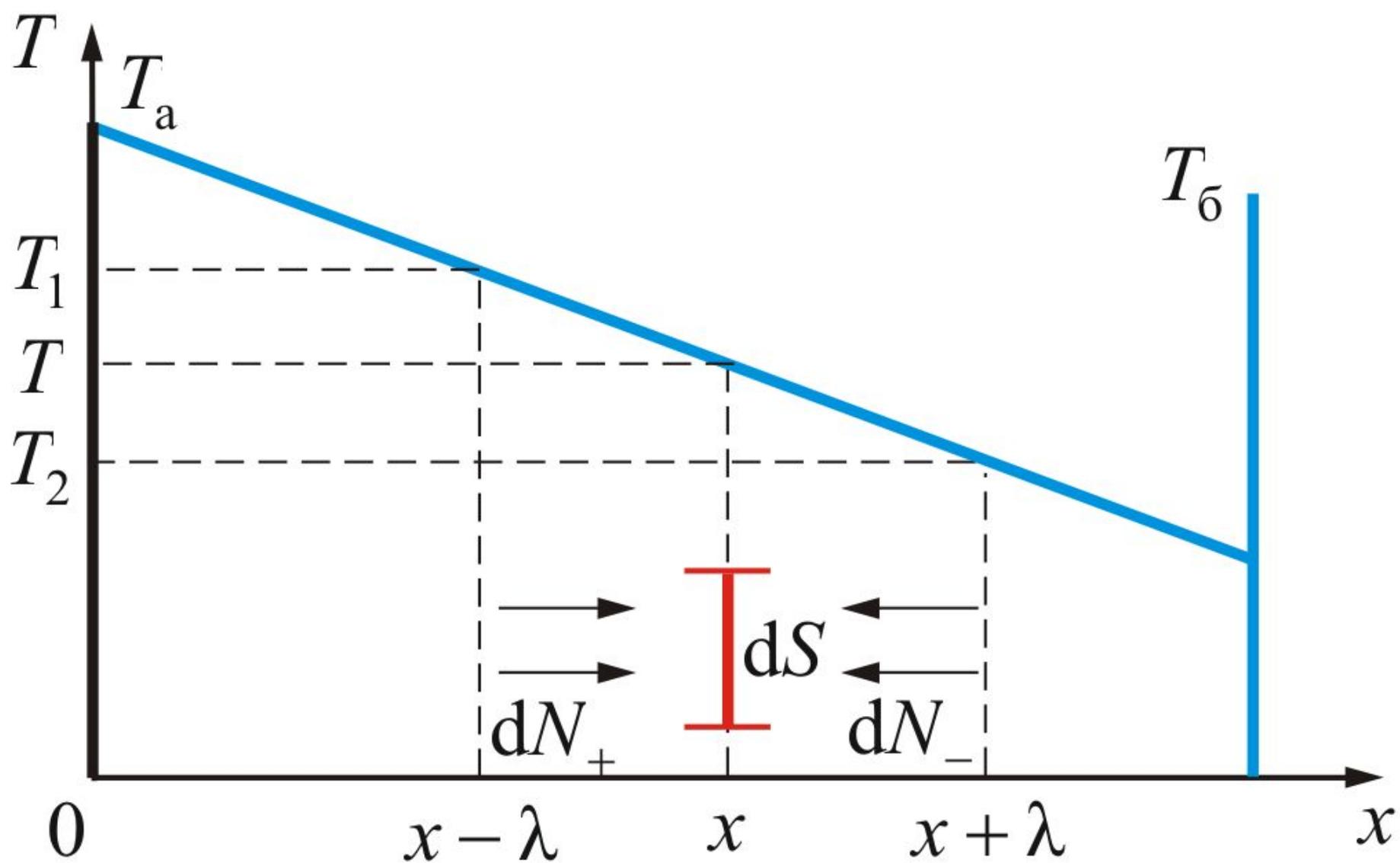


Рисунок
19.6

Итак, у нас имеется градиент температуры $\left(\frac{dT}{dx} \neq 0 \right)$, тогда через газ в направлении оси x будет идти поток тепла. Хаотично двигаясь, молекулы будут переходить из одного слоя газа в другой, перенося с собой энергию. Это движение молекул приводит к перемешиванию молекул, имеющих различную кинетическую энергию,

$$K = \frac{m_0 \langle v \rangle^2}{2} = \frac{i}{2} kT$$

здесь i – число степеней свободы молекулы.

При подсчёте потока тепла введём следующие упрощения:

среднеарифметическая скорость теплового движения молекул $\langle v_T \rangle = \text{const}$.

Концентрация молекул в соседних слоях одинакова, (хотя на самом деле она различается, что даёт ошибку $\approx 10\%$).

Снова вернёмся к рисунку 19.6. Через площадку dS за время dt слева проходит

$$dN_+ = \frac{1}{6} \langle v_T \rangle n dS dt \quad \text{молекул.}$$

Средняя энергия этих молекул K – соответствует значению энергии в том месте, где они испытывают последний раз столкновение. Для одной молекулы газа:

$$K_1 = \frac{i}{2} kT_1.$$

Соответственно, справа проходит $dN_- = \frac{1}{6} n \langle v_T \rangle dSdt$ молекул.

Каждая из этих молекул перенесёт энергию

$$K_2 = \frac{i}{2} kT_2.$$

Результирующий поток энергии через dS равен разности потоков dQ_+ и dQ_- , то есть

$$dQ = \frac{1}{6} n \langle v_T \rangle dS dt \frac{i}{2} k (T_1 - T_2)$$

Применяя те же рассуждения, получим: результирующий поток через единичную площадку в единицу времени равен q и направлен он в сторону противоположную направлению градиента:

$$\frac{dQ}{dS dt} = q = -\frac{1}{3} \lambda \langle v_T \rangle n \frac{i}{2} k \frac{dT}{dx},$$
$$q = -\chi \frac{dT}{dx}$$

ИЛИ

$$q = -\chi \operatorname{grad} T \quad (19.5.1)$$

– *уравнение теплопроводности Ж. Фурье.*

Здесь q – *тепловой поток*;

χ – *коэффициент теплопроводности*,

равный:

$$\chi = \frac{1}{3} \lambda \langle v_T \rangle n \frac{i}{2} k, \quad \text{ИЛИ} \quad (19.5.2)$$

$$\chi = \frac{1}{3} \lambda \langle v_T \rangle \rho C_{V_{\text{уд}}}, \quad (19.5.3)$$

где v_T – тепловая скорость движения молекул; $C_{V\text{уд}}$ – удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Найдем размерность коэффициента теплопроводности:

$$[\chi] = \frac{q dx}{dT} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{К} \cdot \text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^3 \cdot \text{К}} \cdot$$

19.6. Уравнения и коэффициенты переноса

Сопоставим уравнения переноса

$$J = -D \text{grad } n$$

$$J = -D \frac{dn}{dx}$$

Уравнение Фика для диффузии.

Коэффициент диффузии

$$D = \frac{1}{3} \lambda \langle v_T \rangle$$

$$f_{\text{тр}} = -\eta \operatorname{grad} v$$

или

$$f_{\text{тр}} = -\eta \frac{dv}{dx}$$

для трения.

уравнение Ньютона

Коэффициент вязкости:

$$\eta = \frac{1}{3} \lambda \langle v_T \rangle n m_0 = D\rho.$$

$$q = -\chi \text{ grad}T$$

ИЛИ

$$q = -\chi \frac{dT}{dx}$$

Уравнение

Фурье для теплопроводности.

Коэффициент

теплопроводности:

$$\chi = \frac{1}{3} \lambda \langle v_T \rangle \rho C_{\text{уд}} = D \rho C_{\text{уд}}$$

Все эти законы были установлены опытно, задолго до обоснования молекулярно-кинетической теорией. Эта теория позволила установить, что внешнее сходство уравнений обусловлено общностью лежащих в их основе молекулярного механизма перемешивания молекул в процессе их теплового хаотического движения.

Однако к концу XIX века, несмотря на блестящие успехи молекулярно-кинетической теории ей недоставало твёрдой опоры – прямых экспериментов, доказывающих существование атомов и молекул. Это дало возможность некоторым, философам, проповедовавшим субъективный идеализм заявлять, что схожесть формул – это произвол учёных, упрощённое математическое описание явлений.

Но это конечно не так. Все выше указанные коэффициенты связаны между собой и все выводы молекулярно – кинетической теории подтверждены опытно.

Зависимость коэффициентов переноса от давления P

Так как скорость теплового движения молекул $v_T \sim \sqrt{T}$ и не зависит от давления P , а коэффициент диффузии $D \sim \lambda$, то и зависимость D от P должна быть подобна зависимости $\lambda(P)$. При обычных давлениях и в разряженных газах $D \sim \frac{1}{P}$; в высоком вакууме $D = \text{const.}$

С ростом давления λ уменьшается и затрудняется диффузия ($D \rightarrow 0$).

В вакууме и при обычных давлениях отсюда,
и $\eta \sim P$ $\chi \sim P$

С увеличением P и ρ , повышается число молекул переносящих импульс из слоя в слой, но зато уменьшается расстояние свободного пробега λ . Поэтому, вязкость η и теплопроводность χ , при высоких давлениях, не зависят от P (η и $\chi - \text{const}$). Все эти результаты подтверждены экспериментально.

На рисунке 19.7 показаны зависимости коэффициентов переноса и λ от давления P . Эти зависимости широко используют в технике (например, при измерении вакуума).

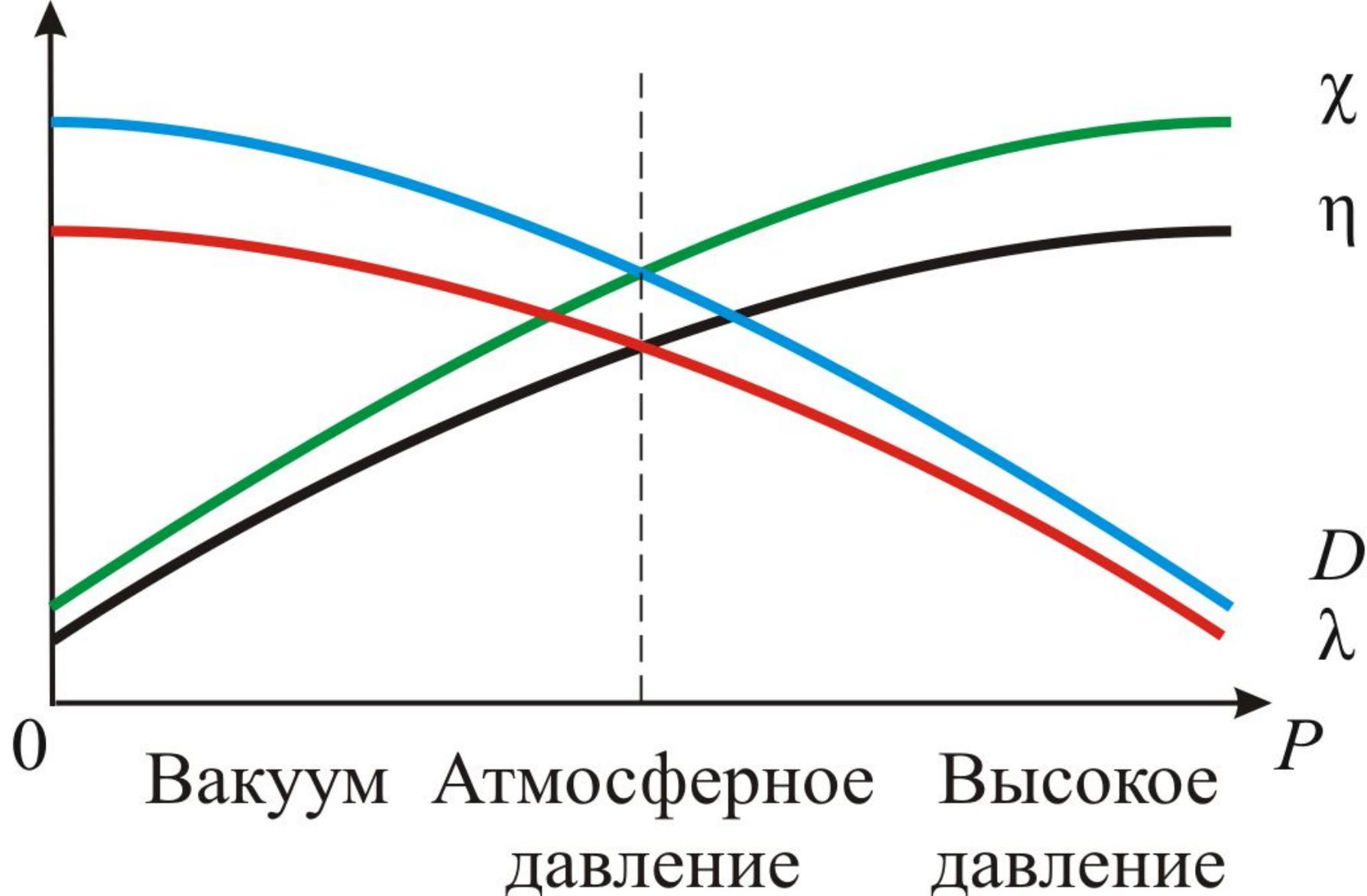


Рисунок 19.7

Молекулярное течение. Эффузия газов

Молекулярное течение – течение газов в условиях вакуума, то есть когда молекулы не сталкиваются друг с другом.

В вакууме происходит передача импульса непосредственно стенкам сосуда, то есть, происходит трение газа о стенки сосуда. Трение перестаёт быть внутренним, и понятие вязкости теряет свой прежний смысл (как трение одного слоя газа о другой).

Течение газа в условиях вакуума через отверстие (под действием разности давлений) называется *эффузией газа*.

Как при молекулярном течении, так и при эффузии, количество протекающего в единицу времени газа обратно пропорционально корню квадратному из молярной массы:

$$n \sim \frac{1}{\sqrt{\mu}}. \quad (19.6.1)$$

Эту зависимость тоже широко используют в технике, например – для разделения изотопов газа U^{235} (отделяют от U^{238} , используя газ UF_6).

19.7. Понятие о вакууме

*Газ называется разреженным, если его плотность столь мала, что средняя длина свободного пробега молекул $\langle \lambda \rangle$ может быть сравнима с линейными размерами l сосуда, в котором находится газ. Такое состояние газа называется **вакуумом**.*

Различают следующие степени вакуума: сверхвысокий ($\langle \lambda \rangle \gg l$), высокий ($\langle \lambda \rangle > l$), средний ($\langle \lambda \rangle \approx l$) и низкий вакуум.

Свойства разряженных газов отличаются от свойств неразряженных газов. Это видно из таблицы, где приведены некоторые характеристики различных степеней вакуума.

| Характеристика | Вакуум | | | |
|--|------------------------|---|------------------------------------|---|
| | низкий | средний | высокий | сверхвысокий |
| | $\lambda < l$ | $\lambda \approx l$ | $\lambda > l$ | $\lambda \gg l$ |
| Давление в мм рт.ст | 760 – 1 | 1 – 10^{-3} | 10^{-3} – 10^{-7} | 10^{-8} и менее |
| Число молекул в ед. объема (в м^{-3}) | 10^{25} – 10^{22} | 10^{22} – 10^{19} | 10^{19} – 10^{13} | 10^{13} и менее |
| Зависимость от давления коэффициентов χ и η | Не зависят от давления | Определяется параметром $\frac{\langle \lambda \rangle}{l}$ | Прямая пропорциональность давлению | Теплопроводность и вязкость практически отсутствуют |

Если из сосуда откачивать газ, то по мере понижения давления число столкновений молекул друг с другом уменьшается, что приводит к увеличению их длины свободного пробега. При достаточно большом разрежении столкновения между молекулами относительно редки, поэтому основную роль играют столкновения молекул со стенками сосуда.

В состоянии высокого вакуума уменьшение плотности разряженного газа приводит к соответствующей убыли частиц без изменения $\langle \lambda \rangle$. Следовательно, уменьшается число носителей импульса или внутренней энергии в явлениях вязкости и теплопроводности. Коэффициент переноса в этих явлениях прямо пропорциональны плотности газа. В сильно разряженных газах внутреннее трение по существу отсутствует.

Удельный тепловой поток в сильно разреженных газах пропорционален разности температур и плотности газа.

Стационарное состояние разреженного газа, находящегося в двух сосудах, соединенных узкой трубкой, возможно при *условии* равенства встречных потоков частиц, перемещающихся из одного сосуда в другой:

$n_1 \langle v_1 \rangle = n_2 \langle v_2 \rangle$, где n_1 и n_2 – число молекул в 1 см^3 в обоих сосудах; $\langle v_1 \rangle$ и $\langle v_2 \rangle$ – их средние арифметические

СКОРОСТИ

Если T_1 и T_2 – температуры газа в сосудах, то предыдущее условие стационарности можно переписать в виде уравнения, выражающего эффект Кнудсена:

$$\frac{P_1}{P_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}},$$

где P_1 и P_2 – давления разреженного газа в обоих сосудах.

Вопросы создания вакуума имеют большое значение в технике, так как например, во многих современных электронных приборах используются электронные пучки, формирование которых возможно лишь в условиях вакуума. Для получения различных степеней разряжения применяются вакуумные насосы, позволяющие получить предварительное разряжение (форвакуум) до $\approx 0,13$ Па, а также вакуумные насосы и лабораторные приспособления, позволяющие получить давление до $13,3$ мкПа – $1,33$ пПа (10^{-7} – 10^{-14} мм рт.ст.).