Интегральное исчисление

Первообразная и неопределённый интеграл

О. Функция $F(x)$ называется *первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a,b)*, если в каждой точке этого интервала $F'(x)=f(x)$, т.е. это такая функция, производная которой равна $f(x)$.

Свойства первообразных:

1. Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на интервале (a,b), то и функция $F(x)+C$ является первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a,b) при любом постоянном С.

2. Если функции $F(x)$ и $\Phi(x)$ являются первообразными для функции $f(x)$ на интервале (a,b), то их разность $F(x)-\Phi(x)$ постоянна.

О. *<u>Неопределённым интегралом функции</u>* $f(x)$ *<u>в интервале</u>* (a,b) называется множество всех её первообразных на этом интервале.

Обозначение: $\int f(x)dx = F(x)+C$.

$f(x)$ – подынтегральная функция,

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

Теорема существования неопределённого интеграла

Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a,b), то она имеет на этом интервале первообразную, т.е. существует неопределённый интеграл на интервале (a,b) этой функции.

В этом случае функция $f(x)$ называется интегрируемой в интервале (a,b).

Свойства неопределённого интеграла

1. Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

2. Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

3. Интеграл от дифференциала функции равен сумме этой функции и постоянной.

4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на интервале (a,b), то их сумма тоже интегрируема на интервале (a,b), причём $\int\left(f(x)+g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

5. Если $f(x)$ интегрируема в интервале (a,b), то функция $kf(x)$, где $k - const, k \neq 0$, тоже интегрируема в интервале (a,b), причём $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

Таблица интегралов элементарных функций

1. $\int 0\,du = C,$

2. $\int du = u + C,$

3. $\int u^{\alpha}\,du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1,$

4. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C,$

5. $\int e^{u}du = e^{u} + C,$

6. $\int a^{u}du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C,$

7. $\int \sin u\,du = -\cos u + C,$

8. $\int \cos u\,du = \sin u + C,$

9. $\int \operatorname{tg} u\,du = -\ln|\cos u| + C,$

10. $\int \operatorname{ctg} u\,du = \ln|\sin u| + C,$

11. $\int \dfrac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C,$

12. $\int \dfrac{du}{a^2+u^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{a} + C,$

13. $\int \dfrac{du}{u^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C,$

14. $\int \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C,$

15. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C,$

16. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2+A}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2+A}\right| + C,$

17. $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{u}{a} + C,$

18. $\int \sqrt{u^2+A}\,du = \dfrac{u}{2}\sqrt{u^2+A} + \dfrac{A}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+A}\right| + C.$

19. $\int \dfrac{du}{(a^2+u^2)^{n+1}} = \dfrac{u}{2na^2(u^2+a^2)^{n}} + \dfrac{2n-1}{2na^2}\cdot\int\dfrac{du}{(a^2+u^2)^{n}}$

Методы интегрирования

1. *Непосредственное интегрирование* – подынтегральную функцию преобразовывают так, чтобы возникли табличные интегралы.

2. *Метод замены переменной (метод подстановки).*

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на (a,b), а функция $x=\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной на (α,β), причём $\varphi'(t)\neq 0 \;\; \forall t\in(\alpha,\beta)$, и если функция $x=\varphi(t)$ отображает (α,β) на (a,b), то имеет место формула

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

В интеграле справа мыслится t, зависящее от x.

3. Метод интегрирования по частям

Теорема. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в интервале (a,b), то имеет место формула интегрирования по частям $\int udv=uv-\int vdu$, при условии, что оба интеграла существуют.

Рекомендации по выбору u и dv, когда интеграл имеет вид $\int A(x)T(x)dx$, где $A(x)$ - алгебраическая функция, $T(x)$ – трансцендентная:

1. Если $T(x)=\sin x, \cos x, tgx, ctgx, a^x$, то $u=A(x)$, $dv=T(x)dx$.

2. Если $T(x)=\arcsin x, \arccos x, arctgx, arcctgx, \log_a x$, то, $u=T(x)$, $dv=A(x)dx$.

Интегрирование рациональных функций

Интегрирование целой рациональной функции осуществляется с применением двух основных свойств неопределённого интеграла (4 и 5).

Интегрирование простейших рациональных дробей

Простейшими рациональными дробями называются дроби вида

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}, \quad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^n}\ (n\geq 2), \quad \text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad \text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\ (n\geq 2),$$

где a, A, p, q, M, N – рациональные числа, $p^2-4q<0$.

Интегрирование простейших рациональных дробей:

1. $\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{dx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C$.

2. $\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=A\int(x-a)^{-n}dx=A\int(x-a)^{-n}d(x-a)=\frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C$.

III. $$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{(2x+p)\frac{M}{2} - \frac{pM}{2} + N}{x^2+px+q}dx =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} + \left(N - \frac{pM}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

В последнем интеграле в знаменателе выделить полный квадрат

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q} + \left(N - \frac{pM}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} =$$

Первый интеграл вида $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$, где $u = x^2 + px + q$,

а второй – вида $\int \frac{du}{u^2+a^2}$, т.к. $a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$, $u = x + \frac{p}{2}, du = dx$.

$$= \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \left(N - \frac{pM}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} arctg \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

IV. План вычисления интеграла $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$:

– в числителе записать производную основания знаменателя – многочлена $\left(x^2+px+q\right)' = 2x+p$,

– уравнять записанное выражение с первоначальным числителем:

$$Mx+N = \frac{M}{2}(2x+p) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right),$$

– разбить интеграл на сумму двух интегралов вида

$$\int \frac{du}{u^n} \text{ и } \int \frac{du}{(u^2+a^2)^n}.$$

– для вычисления интеграла $\int \frac{du}{(u^2+a^2)^n}$ использовать рекуррентную формулу:

$$\int \frac{du}{(u^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2} \cdot \frac{u}{(u^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} \int \frac{du}{(u^2+a^2)^{n-1}}.$$

Интегрирование дробно-рациональной функции в общем случае

Выражение $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены m-й и n-й степени соответственно, называется рациональной дробью. Чтобы найти интеграл от правильной рациональной дроби, нужно разложить её на сумму простейших дробей.

Практическое правило разложения правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей по методу неопределённых коэффициентов

Если дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная, то надо:

1. разложить знаменатель на простейшие множители;
2. записать разложение дроби на сумму простейших дробей с неопределёнными коэффициентами;
3. найти эти коэффициенты.

План нахождения неопределённых коэффициентов:

– в правой части равенства привести дроби к общему знаменателю $Q(x)$,

– приравнять числители обеих частей полученного равенства;

– в равенстве двух многочленов приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x;

– из полученных равенств найти неопределённые коэффициенты.

2 способ нахождения неопределённых коэффициентов

Т.к. многочлены должны быть равны тождественно, то равенство должно выполняться при любых действительных x, тогда, подставляя вместо x произвольные значения, приходим к n равенствам, откуда и находим неопределённые коэффициенты.

Интегрирование иррациональных функций

Эти функции обычно интегрируют путём замены переменной, которая сводит интеграл от иррациональной функции к интегралу от рациональной функции относительно новой переменной.

I. $\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$, где $m_1, m_2, \ldots, m_k \in Z$, $n_1, n_2, \ldots, n_k \in N$.

Символ R означает, что над величинами, перечисленными в скобках, выполняются рациональные действия. Для вычисления интеграла от иррациональной функции вида I необходимо выполнить замену $x = z^n$, где $n = \text{НОК}(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

II. $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$, где $a,b,c,d\in R$, $m_1,m_2,\ldots,m_k\in Z$, $n_1,n_2,\ldots,n_k\in N$

Для вычисления интеграла от иррациональной функции вида II, нужно выполнить замену $\frac{ax+b}{cx+d}=z^n$, где $n=\text{НОК}(n_1,n_2,\ldots,n_k)$.

III. $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, где $a,b,c,d\in R$. Для вычисления интеграла такого вида применяют подстановки Эйлера:

1) если $a>0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c}=z\pm\sqrt{a}x$,

2) если $c>0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c}=zx\pm\sqrt{c}$, знак можно выбирать любой

3) если многочлен ax^2+bx+c имеет различные действительные корни α,β, то $\sqrt{ax^2+bx+c}=z(x-\alpha)$, α - любой корень.

<u>*Частные случаи интеграла III*</u>

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ и $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$.

Для вычисления интегралов под корнем выделяют полный квадрат и сводят к табличным интегралам

$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+A}}$ или $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$ - для первого;

$\int \sqrt{u^2+A}\,du$ или $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du$ - для второго.

2. $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ и $\int (Mx+N)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$, $M, N \in R$.

Для вычисления интегралов применяется алгоритм, аналогичный алгоритму вычисления интеграла от простейшей дроби третьего типа, т.е. на месте $Mx+N$ создают производную подкоренного выражения $2ax+b$ и разбивают на сумму двух интегралов.

Интегрирование тригонометрических функций

I. В случае интеграла вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ можно применить универсальную подстановку

$$tg\frac{x}{2}=z\,,\;x=2arctgz\,,\;dx=\frac{2dz}{1+z^2}\,,$$

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2z}{1+z^2}\,,\;\cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-z^2}{1+z^2}\,.$$

Частные случаи

1. $\int \sin^n x \cos^m x dx$, $\int \sin^n x\,dx$, $\int \cos^m x\,dx$, где $n,m \in N$.

1.1. Если n или m – нечётное, то эта ситуация называется случаем лёгкой интегрируемости. В этом случае от функции, стоящей в нечётной степени отделить первую степень и присоединить к dx. Оставшееся выражение заменяют через другую функцию, используя формулы $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$.

1.2. Если n и m – оба чётные, тогда произведение одинаковых степеней заменяют по формуле $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{2}$ и последовательно применяют формулы понижения степени $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

2. $\int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}dx$ или $\int \frac{\cos^n x}{\sin^m x}dx$, где $n, m \in N$.

2.1. Если n – нечётное, то это случай лёгкой интегрируемости (1.1).

2.2. Если n и m – оба чётные (оба нечётные), причём $n < m$, то выделить

$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$ (для 1-го интеграла) или

$\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x)$ (для 2-го интеграла),

к оставшемуся выражению применить формулы $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$, $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, $\frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$, $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$ соответственно.

2.3. В случае других n и m используют формулу интегрирования по частям, при этом в первом интеграле обозначают $u = \sin^{n-1} x$, а во втором $u = \cos^{n-1} x$.

3. $\int \frac{dx}{\sin^n x \cos^m x}$, $\int \frac{dx}{\sin^n x}$, $\int \frac{dx}{\cos^n x}$, где $n, m \in N$.

В этом случае в числителе записать тригонометрическую единицу $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и разбить интеграл на сумму двух интегралов.

Если n и m – оба чётные, можно выразить подынтегральное выражение либо через $tg\,x$ и его дифференциал, либо через $ctg\,x$ и его дифференциал.

II. $\int tg^n x dx$, $\int ctg^n x dx$.

Если $n=1$ $\int tgx dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$,

$\int ctgx dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\cos x} = \ln|\sin x| + C$.

Пусть $n \geq 2$. В этом случае выделяют $\mathrm{tg}^2 x$ или $\mathrm{ctg}^2 x$ и расписывают по формуле $\mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ или $\mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$, затем интеграл разбивают на сумму двух интегралов. Этот приём применяется, пока не придём к табличному интегралу.

III. $\int \sin ax \cdot \cos bx\, dx$, $\int \sin ax \cdot \sin bx\, dx$, $\int \cos ax \cdot \cos bx\, dx$.

Произведение тригонометрических функций раскладывается в сумму:

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right].$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right].$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\right].$$