

Презентация по
Математическому Анализу
Семинар 36

Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

1. Однородное уравнение.

Линейное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами p и q без правой части имеют вид $y'' + py' + qy = 0$ (1).

Если k_1, k_2 - корни характеристического уравнения $\Phi(k) \equiv k^2 + pk + q = 0$ (2), то общее решение уравнения (1) записывается в одном из следующих трех

видов:

$$1) \quad y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \quad k_1, k_2 \in R, k_1 \neq k_2$$

если

$$2) \quad y = e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x), \quad k_1 = k_2$$

если

$$3) \quad y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \quad k_1 = \alpha + \beta i, k_2 = \alpha - \beta i, (\beta \neq 0)$$

если

2. Неоднородное уравнение

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$ (3) можно записать в виде суммы $y = y_0 + Y$, где y_0 - общее решение соответствующего уравнения (1) без правой части, определяемое по формулам (1)-(3), и Y - частное решение данного уравнения (3).

Функция Y может быть найдена методом неопределенных коэффициентов в следующих простейших случаях:

1. $f(x) = e^{ax} P_n(x)$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n .

Если $\varphi(a \pm bi) \neq 0$, то полагают

$$Y = e^{ax} [S_N(x) \cos bx + T_N(x) \sin bx]$$

где $S_N(x), T_N(x)$ - многочлены степени $N = \max\{n, m\}$.

Если же $\varphi(a \pm bi) = 0$ то полагают

$$Y = x^r e^{ax} [S_N(x) \cos bx + T_N(x) \sin bx]$$

где $S_N(x), T_N(x)$ - многочлены $N = \max\{n, m\}$,

r – кратность корней $a \pm bi$ степени (для уравнений 2-го порядка $r=1$).

В общем случае для решения уравнения (3) применяется **метод вариации произвольных постоянных**.

Этот метод применяется для отыскания частного решения линейного неоднородного уравнения n -го порядка как с переменными, так и с постоянными коэффициентами, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения.

Метод вариации для уравнения второго порядка $y'' + py' + qy = f(x)$ заключается в следующем.

Пусть известна фундаментальная система решений y_1, y_2 .

Тогда общее решение неоднородного уравнения следует искать в виде:

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$$

где
функции

$C_1(x), C_2(x)$ определяются из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

Решение этой системы находим по формулам:

$$C_1(x) = \int \frac{y_2 \cdot f(x) dx}{W(y_1, y_2)}; C_2(x) = \int \frac{y_1 \cdot f(x) dx}{W(y_1, y_2)}$$

в силу чего $y(x)$ можно сразу определить по формуле:

$$y(x) = -y_1 \int \frac{y_2 \cdot f(x) dx}{W(y_1, y_2)} + y_2 \int \frac{y_1 \cdot f(x) dx}{W(y_1, y_2)}$$

здесь $W(y_1, y_2)$ - вронскиан
решений

y_1, y_2

**Примеры с
решениями.**

1. Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 - 5k + 6 = 0$
его корни $k_1 = 2; k_2 = 3$

Следовательно e^{2x}, e^{3x} - частные линейно независимые решения,
но,
а общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

2. Решить уравнение $y'' - 2y' + 2y = x^2$

Решение Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 2 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = 1 \pm i$, а поэтому общее решение однородного уравнения

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

Частное решение следует искать в виде:

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

(в данном случае $\alpha = 0, \beta = 0, \alpha + \beta i = 0$; так как корня $\mathbf{0}$ у характеристического уравнения нет, то $m=n=2$ и $r=0$, имеем:

$$+ \begin{array}{l} 2 \\ -2 \\ 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} y = Ax^2 + Bx + C \\ y' = 2Ax + B \\ y'' = 2A \end{array} \right.$$

$$y'' - 2y' + 2y = 2Ax^2 + (2B - 4A)x + (2C - 2B + 2A) \equiv x^2$$

Решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 2B - 4A = 0 \\ 2C - 2B + 2A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = 1 \\ C = 1/2 \end{cases}$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения:

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{2} (x + 1)^2$$

3. Решить уравнение $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$

Решение Характеристическое уравнение

$$k^2 + 1 = 0 \text{ имеет корни } k_{1,2} = \pm i$$

а общее решение однородного уравнения поэтому

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Пользуясь принципом наложения, частное решение исходного уравнения следует искать в виде:

$$y = y_1 + y_2 = (Ax + B)e^x + Ce^{-x}$$

(имеем для $y_1 : f_1(x) = xe^x, \alpha_1 = 1, \beta_1 = 0; \alpha_1 + \beta_1 i = 1$; поскольку такого корня нет,

то $r_1 = 0; n = m = 1$; для $y_2 : f_2(x) = e^{-x}, \alpha_2 = -1, \beta_2 = 0; \alpha_2 + \beta_2 i = -1; r_2 = n_1 = m_1 = 0$)

Итак,

$$+ \begin{cases} 1 \\ 0 \\ 1 \end{cases} \begin{cases} y = (Ax + B)e^x + Ce^{-x} \\ y' = Ae^x + (Ax + B)e^x - Ce^{-x} \\ y'' = 2Ae^x + (Ax + B)e^x + Ce^{-x} \end{cases}$$

$$y'' + y = 2Axe^x + (2A + 2B)e^x + Ce^{-x} \equiv xe^x + 2e^{-x}$$

Решая систему
уравнений:

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 2A + 2B = 0 \\ 2C = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -1/2 \\ C = 1 \end{cases}$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}(x - 1) + e^{-x}$$

Примеры для самостоятельного

решения

1. Найти общие решения

уравнения:

$$1. y'' - y' - 2 = 0$$

$$3. y'' - y' = 0$$

$$5. y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$2. y'' + 25y = 0$$

$$4. y'' - 4y' + 4y = 0$$

2. Найти решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным или краевым условиям:

$$1. y'' + 5y' + 6y = 0; y(0) = 1; y'(0) = -6$$

$$2. y'' - 10y' + 25 = 0; y(0) = 0; y'(0) = 1$$

$$3. y'' - 3y' + 10y = 0; y(\pi/6) = 0; y'(\pi/6) = e^{\pi/6}$$

$$4. y'' + 3y' = 0; y(0) = 1; y'(0) = 2$$

$$5. y'' + 9y = 0; y(0) = 0; y'(\pi/4) = 1$$

3. Решить

уравнения:

$$1. y'' - 4y' + 3y = e^{5x}; y(0) = 3; y'(0) = 9;$$

$$3. y'' - 6y' + 8y = 3x^2 + 2x + 1$$

$$2. y'' - 6y' + 16y = 2 \sin x + 3 \cos x$$

$$4. y'' + 4y = \cos 2x; y(0) = 0; y'(\pi/4) = 0$$

$$5. y'' + 3y' - 10y = xe^{-2x}$$

$$6. y'' - y = x \cos^2 x$$

$$7. y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$$