ЛЕКЦІЯ № 8

з навчальної дисципліни

Теорія кіл і сигналів в інформаційному та кіберпросторах

Тема 4. Частотні характеристики лінійних електричних кіл другого порядку.

Заняття 1. Частотні властивості послідовного коливального контуру.

Л І Т Е Р А Т У Р А

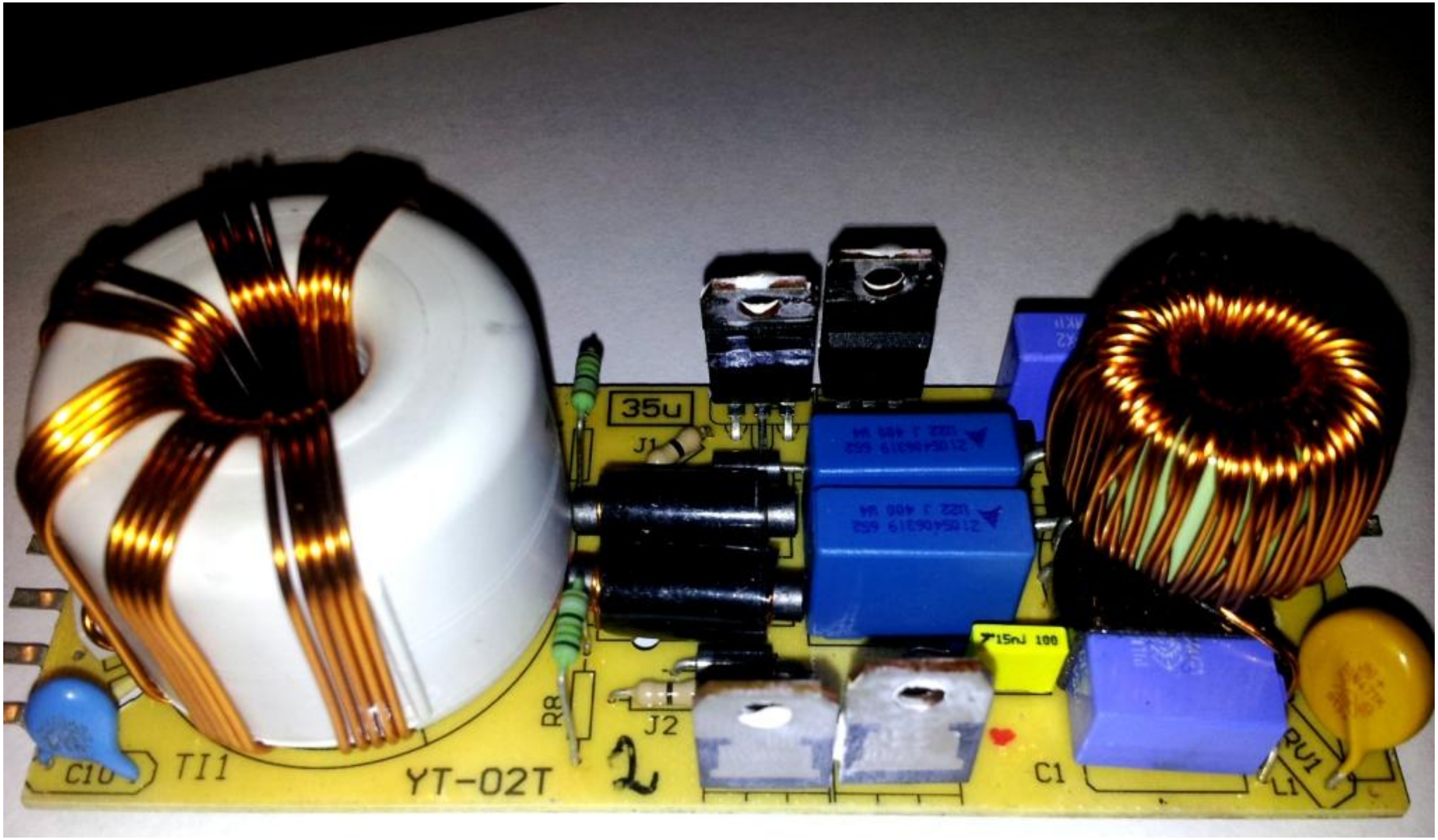
1. Бондаренко В.Н. Основы теории цепей. К.: Институт электродинамики НАН Украины.-2012. с.313-329.

2. Карташов Р.П., Медведев А.П. Теория электрорадиоцепей,.

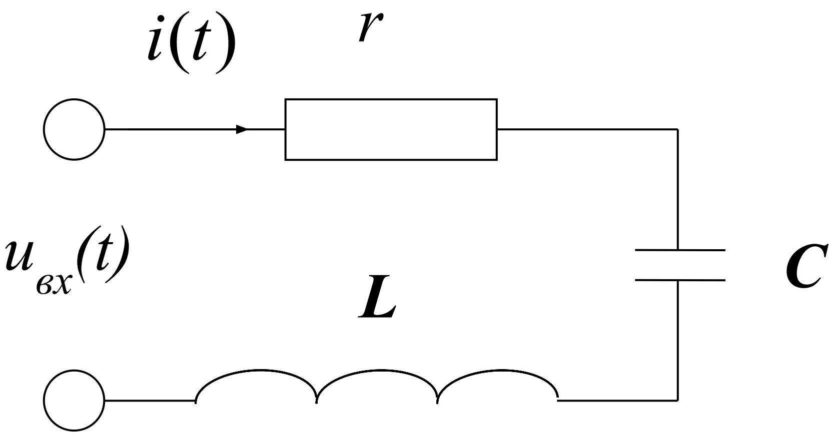
1. Условия и признаки резонанса напряжений.

- Последовательным колебательным контуром называют цепь, состоящую из последовательного соединения индуктивности L и емкости C

Элементы электроники



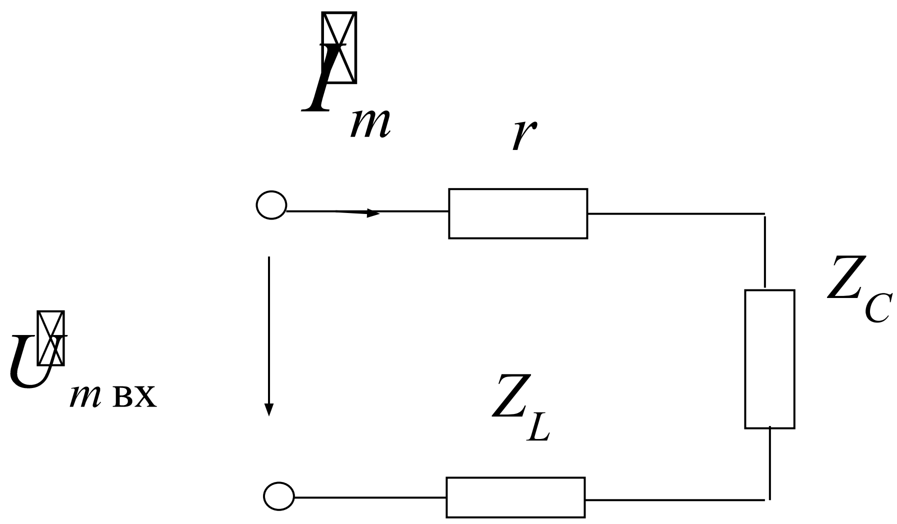
C



Пусть напряжение на зажимах контура изменяется по закону

$$u_{вх}(t) = U_m \sin \omega t.$$

Перейдем к эквивалентной комплексной схеме замещения



По второму закону Кирхгофа составим уравнение электрического равновесия:

$$\dot{U}_{m\,\text{âõ}} = \dot{U}_{mr} + \dot{U}_{mL} + \dot{U}_{mC} =$$

$$= r\dot{I}_m + j\omega L\dot{I}_m - j\frac{1}{\omega C}\dot{I}_m =$$

$$= \dot{I}_m\left(r + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}\right).$$

Комплексное сопротивление цепи

- $Z_{вх}$= $\dfrac{\dot{U}_{m\,\text{âõ}}}{\dot{I}_m} = \dfrac{\dot{I}_m\left(r + j\omega L - j\dfrac{1}{\omega C}\right)}{\dot{I}_m} =$

$$= r + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} =$$

$$= r + jx = ze^{j\varphi},$$

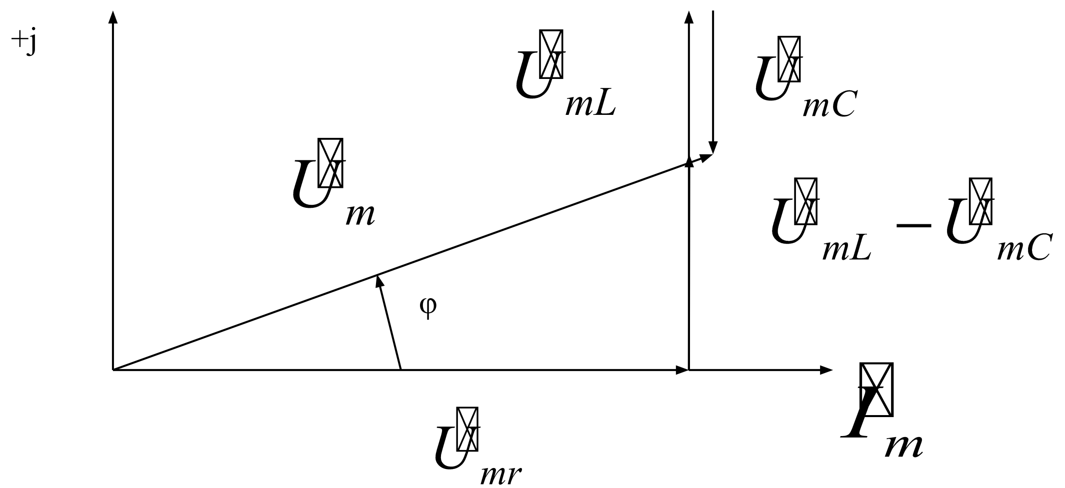
- где

$$x = x_{\mathrm{L}} - x_C = \omega L - \frac{1}{\omega C};$$

$$\varphi = arctg\frac{x}{r}; \quad z = \sqrt{r^2 + x^2}.$$

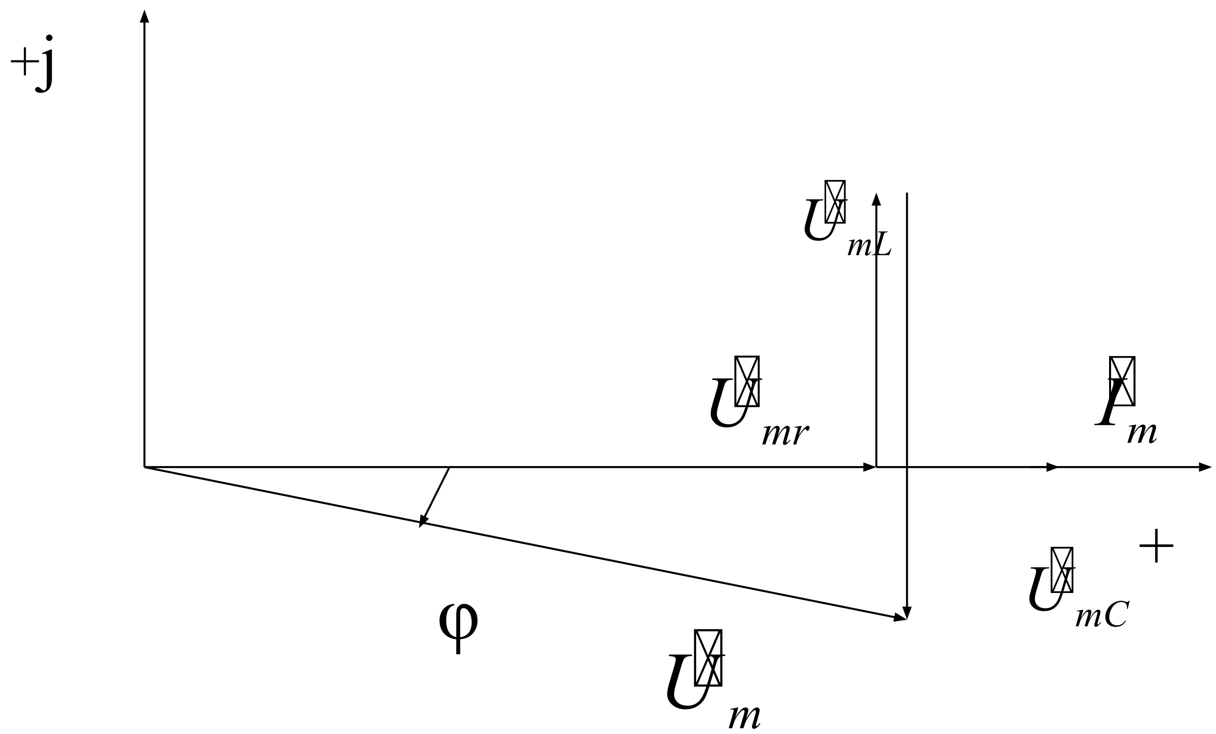
При $x_L > x_C$ сдвиг фаз между приложенным к цепи напряжением и током в цепи φ>0, т.е. будет положительным, ток в цепи отстает от приложенного напряжения, цепь носит индуктивный характер (рис. 7.3)

+j



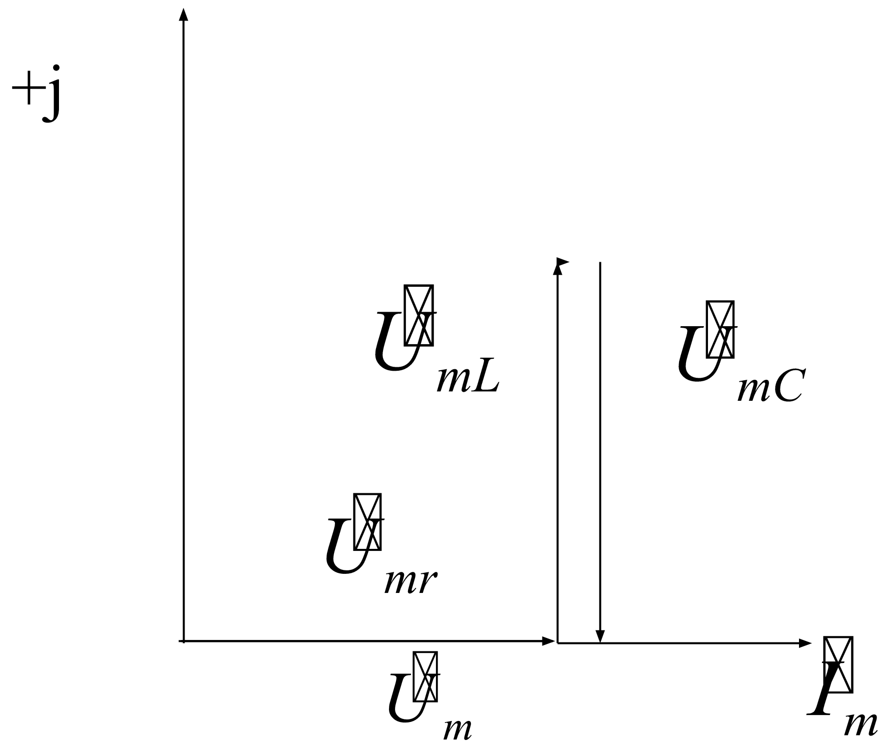
- При $x_L < x_C$ сдвиг фаз между приложенным к цепи напряжением и током в цепи φ<0, т.е. будет отрицательным, ток в цепи опережает приложенное к ней напряжение. Цепь носит емкостной характер

+j



- Наибольший интерес представляет случай равенства $x_L = x_C$. При этом реактивное сопротивление контура равно нулю, комплексное сопротивление $Z = r + j(x_L - x_C) = r$, цепь носит характер только активного сопротивления, ток в цепи совпадает по фазе с приложенным к ней напряжением.

+j



- Уменьшение комплексного сопротивления контура до минимального приводит к возрастанию до максимума тока в контуре, что свидетельствует о наступлении явления **электрического резонанса.** Существуют различные определения резонанса, взаимно дополняющие друг друга. Одно из них: **резонансом (**от латинского resono – откликаюсь**) называется явление, при котором сопротивление контура становится только активным.**

- Другое определение: **резонансом называется резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты внешнего гармонического воздействия к частоте собственных колебаний контура. Равенство $x_L = x_C$ является условием возникновения резонанса в последовательном колебательном контуре**.

- При $x_L = x_C$ сдвиг фаз между током и напряжением φ=0. В этом случае $x_L = x_{Lp}$; $x_C = x_{Cp}$. По отношению к входным зажимам контур при резонансе эквивалентен цепи, состоящей из одного активного сопротивления ***r*** .

- **Первый признак резонанса в последовательном колебательном контуре.** Амплитуда тока в цепи при резонансе принимает максимальное значение $I_m = U_m / r$. В остальных случаях амплитуда тока равна $I_m = U_m / \sqrt{r^2 + x^2}$

- **Второй признак резонанса напряжений** в последовательном колебательном контуре. Напряжения на реактивных элементах при резонансе равны по амплитуде и противоположны по фазе.

Учитывая то, что при резонансе $x_L = x_c$, можно записать, что

$$\dot{U}_{mL} = jx_{Lp}\dot{I}_m; \qquad \dot{U}_{mC} = -jx_{Cp}\dot{I}_m$$

Учитывая то, что при резонансе $x_L = x_c$, можно записать, что

$$\dot{U}_{mL} = \dot{U}_{mC}e^{j\pi}$$

2. **Первичные и вторичные параметры последовательного колебательного контура.**

- Первичными параметрами последовательного колебательного контура являются величина индуктивности ***L***, величина емкости ***C*** и величина активного сопротивления ***r***. Они характеризуют данный контур как совокупность конкретных элементов и позволяют отличить его от других контуров.

Рассмотрим, какие параметры относятся к вторичным

Резонансная частота контура - это частота, при которой реактивное сопротивление контура равно нулю. Определим ее из равенства *xL* = *xC* :

Отсюда

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C};$$

$$\omega_0{}^2 LC = 1; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

- Это резонансная   частота контура или частота собственных колебаний, которая определяется только параметрами контура.

Волновое или характеристическое сопротивление контура.

- Модули реактивных сопротивлений контура на резонансной частоте равны и определяются как

$$x_L = \omega_0 L = \frac{1}{\sqrt{LC}} L = \sqrt{\frac{L}{C}};$$

$$x_C = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{LC}} C} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Величина

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$$

называется **волновым** или **характеристическим** сопротивлением контура.

Добротность контура

- Резонансные свойства контура характеризуются добротностью контура. **Добротностью контура называют отношение напряжения на реактивном элементе (индуктивности или емкости) при резонансе к напряжению, действующему на входе контура** отношение волнового сопротивления контура к активному сопротивлению.

$$Q = \frac{U_{mLp}}{U_{m\text{вх}}} = \frac{U_{mCp}}{U_{m\text{вх}}} = \frac{\omega_0 L}{r} = \frac{1}{\omega_0 r C} = \frac{\rho}{r}$$

отношение волнового сопротивления контура к активному сопротивлению.

- Добротность определяет эффективность или качество контура, является безразмерной величиной.
- Чем меньше активное сопротивление контура, тем выше его добротность. Для радиотехнических контуров характерны значения добротности от 100 до 500. Свойство контура усиливать приложенное напряжение широко используется на практике.
- **Величина, обратная добротности, носит название затухание контура**

Это наименование параметра связано с тем, что оно характеризует скорость затухания колебаний в контуре при отключении от него источника энергии.

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{r}{\rho}.$$

Это наименование параметра связано с тем, что оно характеризует скорость затухания колебаний в контуре при отключении от него источника энергии.

3. **Комплексні функції та частотні характеристики ПКК**

- Для анализа и описания частотно-избирательных свойств колебательных контуров используют комплексные входные и передаточные функции. Наибольший интерес при изучении последовательных контуров представляют комплексная входная проводимость и комплексная передаточная функция по напряжению .

Комплексная входная проводимость:

- **Комплексной входной функцией цепи называется отношение комплексных амплитуд тока и напряжения, действующих на входных зажимах**.

Комплексная входная проводимость:

$$Y_{вх}(j\omega) = \frac{\dot{I}_{mвх}}{\dot{U}_{mвх}} = \frac{1}{Z_{вх}(j\omega)}$$

3.1 Комплексная входная проводимость последовательного колебательного контура

- Комплексная входная проводимость последовательного колебательного контура рассчитывается через его параметры:

$$Y_{вх}(j\omega) = \frac{1}{Z(j\omega)} = \frac{1}{r + jx} = \frac{1}{r(1 + j\dfrac{x}{r})}$$

$$\frac{x}{r}=\frac{1}{r}(\omega L-\frac{1}{\omega C})=\frac{1}{r}(\omega L\frac{\omega_0}{\omega_0}-\frac{1}{\omega C}\frac{\omega_0}{\omega_0}\frac{L}{L})=$$

$$=\frac{\omega_0 L}{r}(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{1}{\omega\omega_0 LC})=Q(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{r\left[1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]} =$$

$$= \frac{1}{r\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} e^{-j\,\mathrm{arctg}\,Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = Y(\omega)e^{j\varphi(\omega)}.$$

Нормированная комплексная входная проводимость получается путем отношения $Y(j\omega)$ к ее же значению при $\omega = \omega_0$.

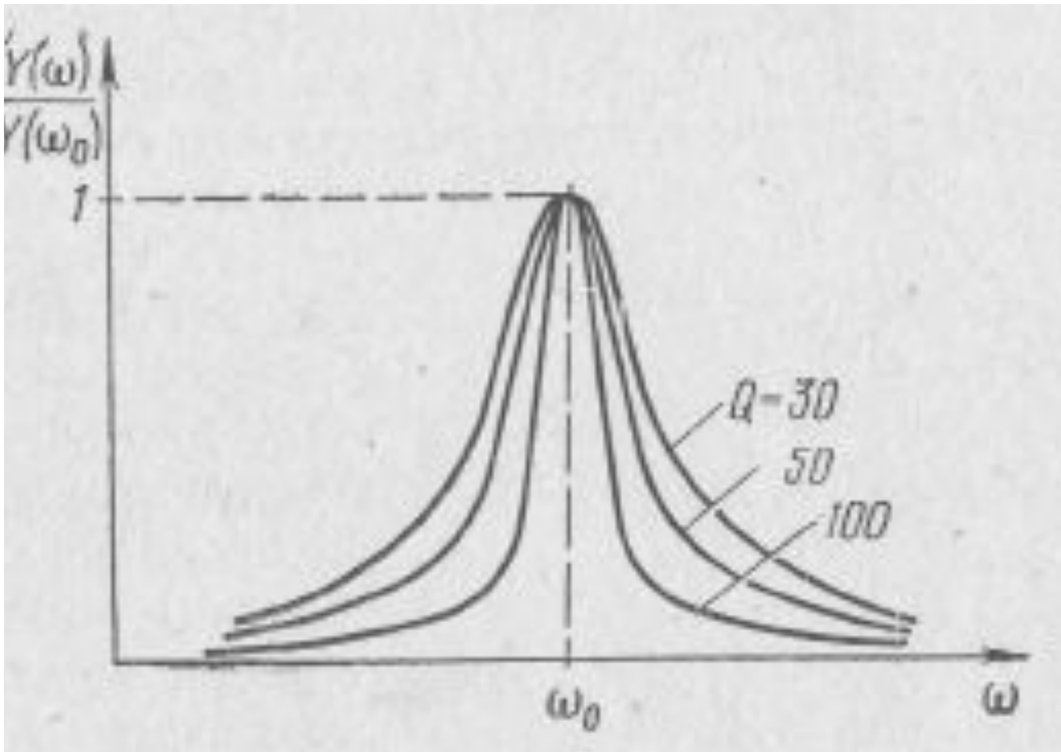
Так как $Y(j\omega_0) = \dfrac{1}{r}$, то

$$Y_n(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{Y(j\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} e^{-jarctgQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{Y(\omega)}{Y(\omega_0)} e^{j\varphi(\omega)}.$$

- Нормированная входная АЧХ описывается выражением

$$Y_n(\omega) = \frac{Y(\omega)}{Y(\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

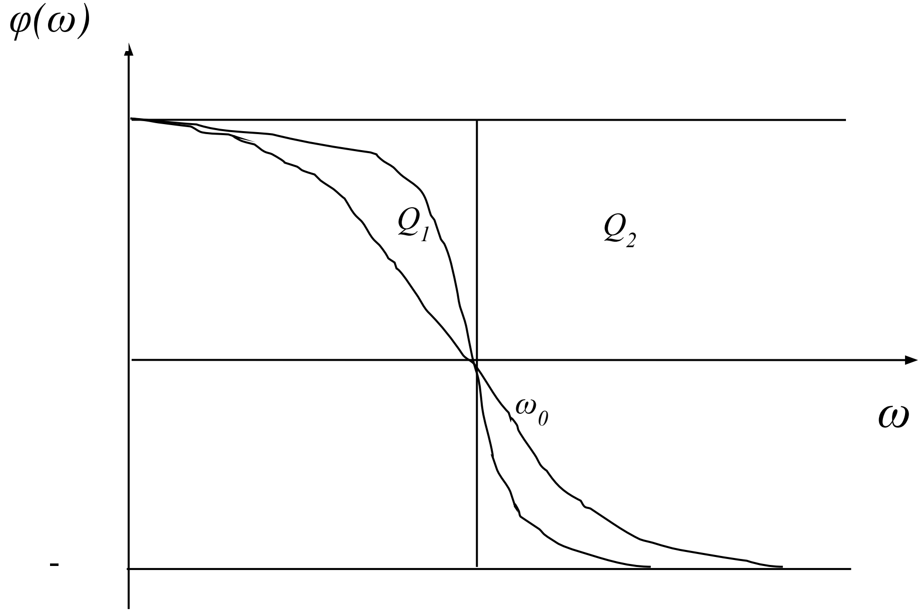
График нормированной входной АЧХ имеет следующий вид:



Увеличению добротности контура соответствуют более острые резонансные кривые или усиление его частотно-избирательных свойств.

Зависимость аргумента проводимости контура от частоты называется фазо-частотной характеристикой

$$\varphi(\omega) = -arctgQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right).$$



- Из этого графика следует, что на частотах ниже резонансной контур имеет емкостной характер, при резонансе – резистивный, а на частотах выше резонансной – индуктивный.

При исследовании частотных характеристик колебательного контура в качестве независимой переменной удобно использовать величину, характеризующую <u>расстройку контура</u>, <u>т.е. степень отклонения его резонансной частоты от частоты сигнала.</u>

- Разность между частотой сигнала и резонансной частотой контура
- называют абсолютной расстройкой. Она может быть как положительной, так и отрицательной.

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0$$

Отношение абсолютной расстройки к резонансной частоте называется относительной расстройкой.

$$\delta = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$$

Фактором расстройки называют величину, описываемую выражением

$$\nu = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$$

Обобщенной расстройкой называют преобразованное отношение реактивного сопротивления контура к активному

$$\xi = \frac{x}{r} = Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = Q\nu$$

так как

При малых расстройках в области частот, близких к резонансной $(\omega \approx \omega_0)$

$$\nu = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 \omega} = \frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega \omega_0} \approx \frac{2\Delta\omega}{\omega_0},$$

так как $\omega + \omega_0 \approx 2\omega.$

- Поэтому вблизи резонанса

$$\nu \approx 2\delta$$

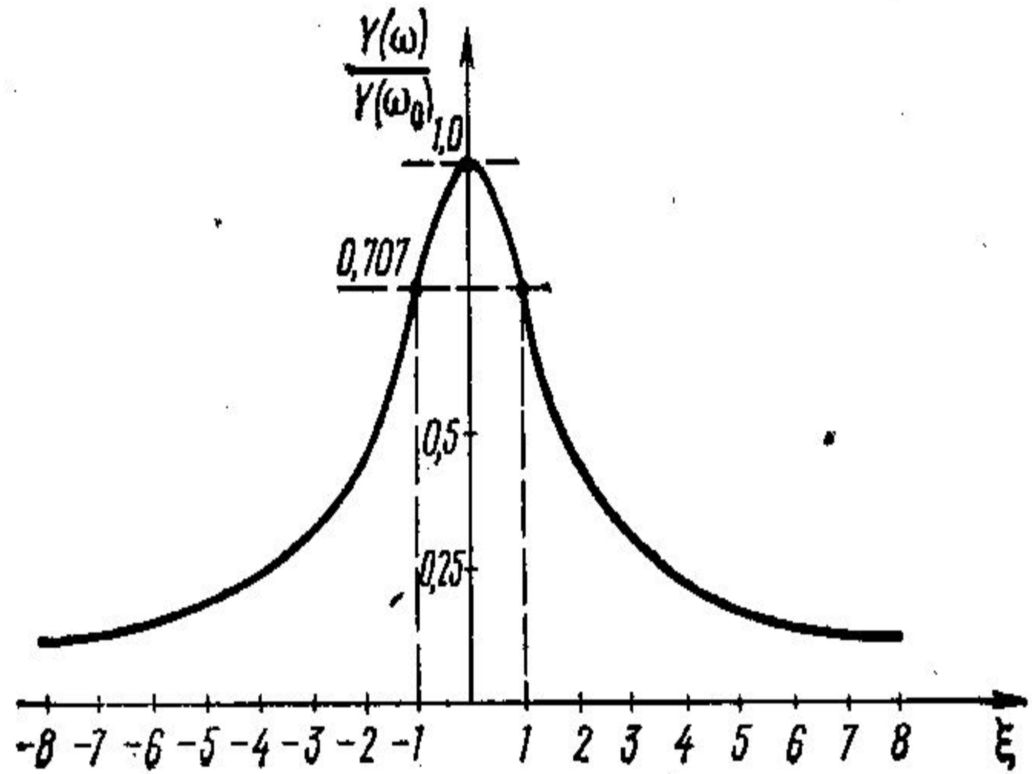
$$\xi = Q\nu \approx 2Q\delta .$$

- Относительная и обобщенная расстройки, как и фактор расстройки, безразмерные величины. **Все виды расстроек при резонансе равны нулю.**
- Преобразуя полученные формулы, получим выражения для нормированных частотных характеристик контура в функции расстройки:

$$Y_n(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{Y(j\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} e^{-arctg\xi};$$

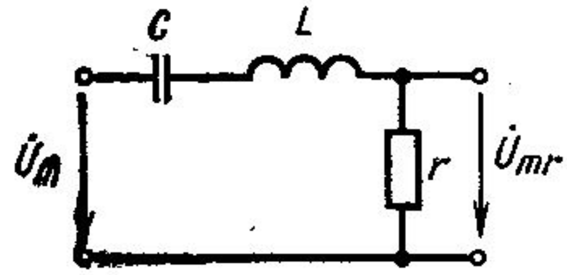
$$Y_n(\omega) = \frac{Y(\omega)}{Y(\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}};$$

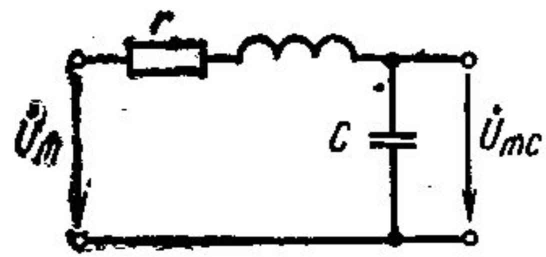
$$\varphi(\omega) = -arctg\xi$$

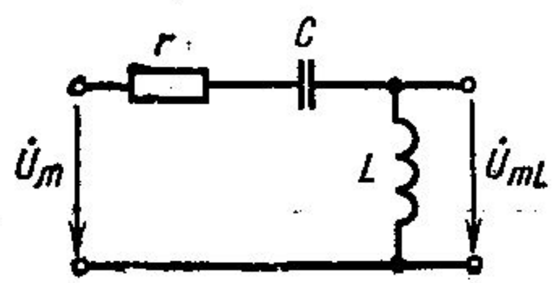

$\frac{Y(\omega)}{Y(\omega_0)}$
1,0
0,707
0,5
0,25
-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8
ξ

3.2 Комплексная передаточная функция по напряжению .

- Комплексные передаточные функции по напряжению последовательного колебательного контура различают в зависимости от того, напряжение на каком из его элементов является выходным


C
L
r
U̇m
U̇mr


r
C
U̇m
U̇mc


r
C
L
U̇m
U̇mL

Для передаточной функции по напряжению на активном сопротивлении с учетом

$$Y(j\omega_0) = \frac{1}{r}$$

получаем

$$K_{Ur}(j\omega)=\frac{\dot{U}_{mr}}{\dot{U}_{m}}=\frac{r\dot{I}_{m}}{\dot{U}_{m}}=rY(j\omega)=$$

$$=\frac{Y(j\omega)}{Y(j\omega_{0})}=\frac{1}{\sqrt{1+\xi^{2}}}e^{-j\,arctg\,\xi}$$

Этому соответствует амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики:

$$K_{Ur}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$$

$$\varphi_r(\omega) = -arctg\xi$$

Передаточная функция по напряжению на емкости

$$K_{UC}(j\omega)=\frac{\dot{U}_{mC}}{\dot{U}_{m}}=\frac{1}{j\omega C}\frac{\dot{I}_{m}}{\dot{U}_{m}}=\frac{1}{j\omega C}Y(j\omega)=$$

$$=\frac{1}{j\omega rC}\frac{1}{\sqrt{1+\xi^{2}}}e^{-jarctg\xi}=\frac{1}{j\omega_{0}rC}\frac{\omega_{0}}{\omega}\frac{1}{\sqrt{1+\xi^{2}}}e^{-arctg\xi}=$$

$$=\frac{Q}{\sqrt{1+\xi^{2}}}\frac{\omega_{0}}{\omega}e^{jarctg(-\pi/2-arctg\xi)}$$

Ей соответствуют частотные характеристики:

$$K_{UC}(\omega) = \frac{Q}{\sqrt{1+\xi^2}} \frac{\omega_0}{\omega}$$

$$\varphi_C(\omega) = -\frac{\pi}{2} - arctg\xi$$

Для передаточной функции по напряжению на индуктивности

$$K_{UL}(j\omega) = \frac{\dot{U}_{mL}}{\dot{U}_m} = j\omega L \frac{\dot{I}_m}{\dot{U}_m} = j\omega L Y(j\omega) = \frac{j\omega L}{r\sqrt{1+\xi^2}} e^{-jarctg\,\xi} =$$

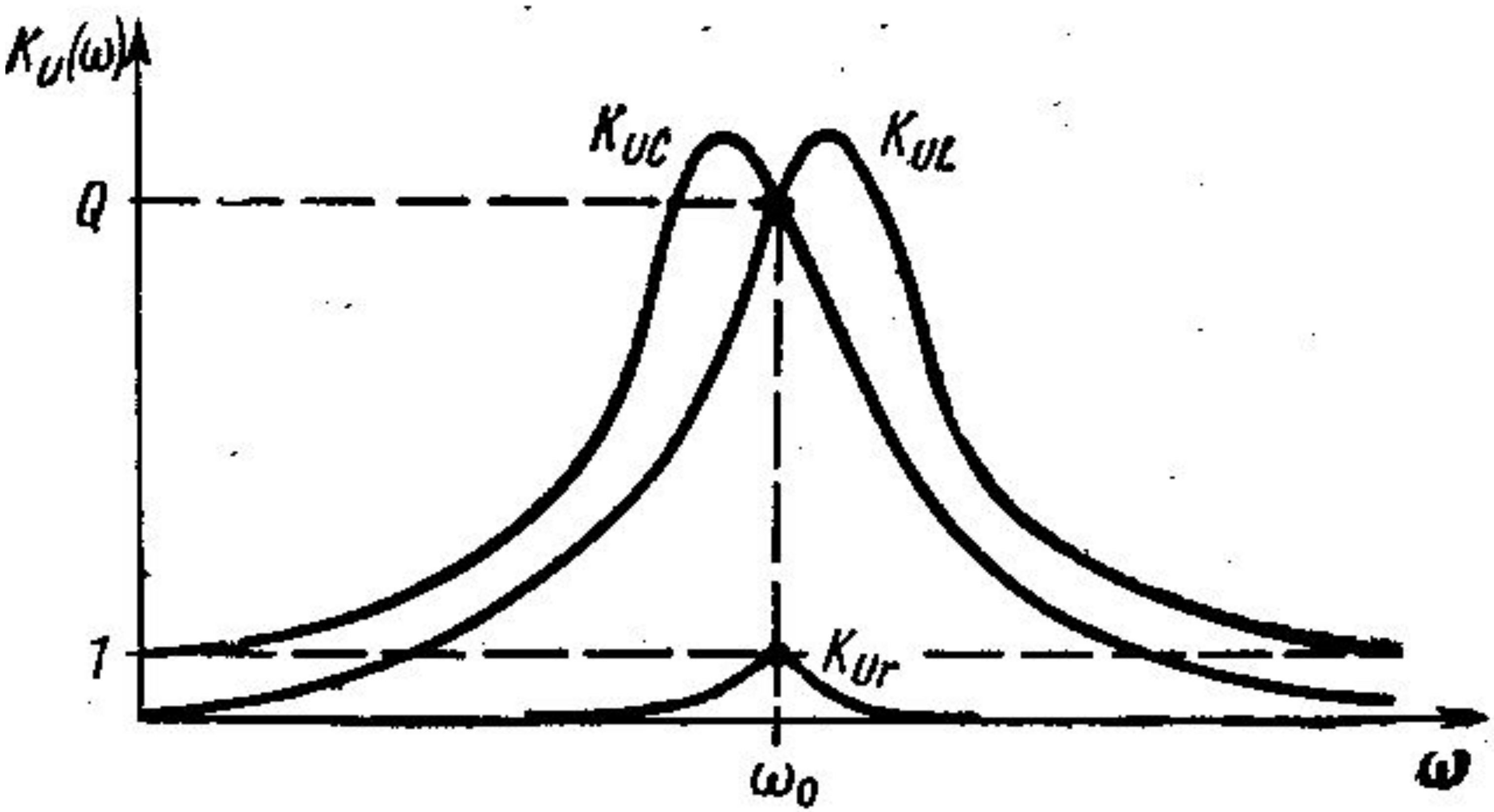
$$= \frac{j\omega_0 L}{r\sqrt{1+\xi^2}} \frac{\omega}{\omega_0} e^{-jarctg\,\xi} = \frac{Q}{\sqrt{1+\xi^2}} \frac{\omega}{\omega_0} e^{j(\frac{\pi}{2}-arctg\,\xi)}$$

Частотные характеристики в этом случае:

$$K_{UL}(j\omega)=\frac{Q}{\sqrt{1+\xi^{2}}}\frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\varphi_L(\omega)=\frac{\pi}{2}-arctg\xi$$

Покажем графики соответствующих характеристик.



Численно передаточные функции, или коэффициенты передачи по напряжению, показывают, во сколько раз напряжение на соответствующем элементе больше напряжения, действующего на входе контура. Из полученных соотношений, в частности, следует, что при резонансе напряжения на реактивных элементах в Q раз превышают входное напряжение, а напряжение на активном элементе равно ему.

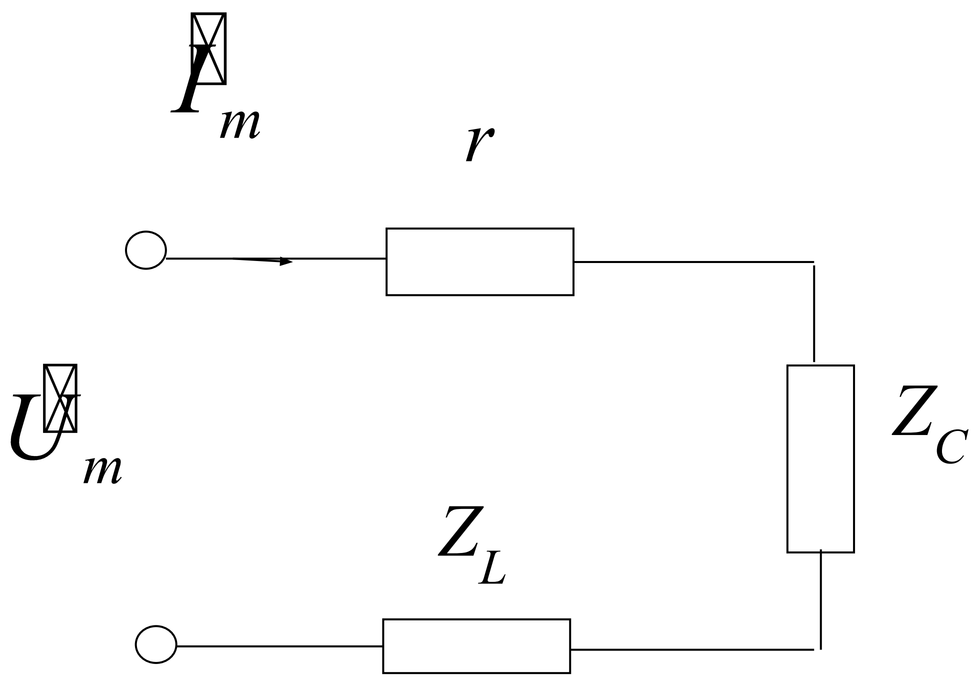
Напряжение на реактивнх элементах достигает своего максимального значения в стороне от резонанса, а максимальные значения этих функций одинаковы.

Из всех комплексных коэффициентов передачи последовательного колебательного контура практический интерес представляет передаточная функция по напряжению на емкости, так как обычно выходное напряжение снимается с емкости.

4. Резонансні характеристики ПКК

- Резонансными характеристиками ПКК называют зависимость амплитуды тока в контуре или напряжений на его элементах от частоты.

Рассмотрим эквивалентную комплексную схему замещения последовательного колебательного контура.



Зависимость амплитуды тока от частоты имеет следующий вид:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Проанализируем это уравнение, для чего воспользуемся случаями предельных значений частоты:

$$\omega = 0 \rightarrow z = \infty \rightarrow I_m = 0$$

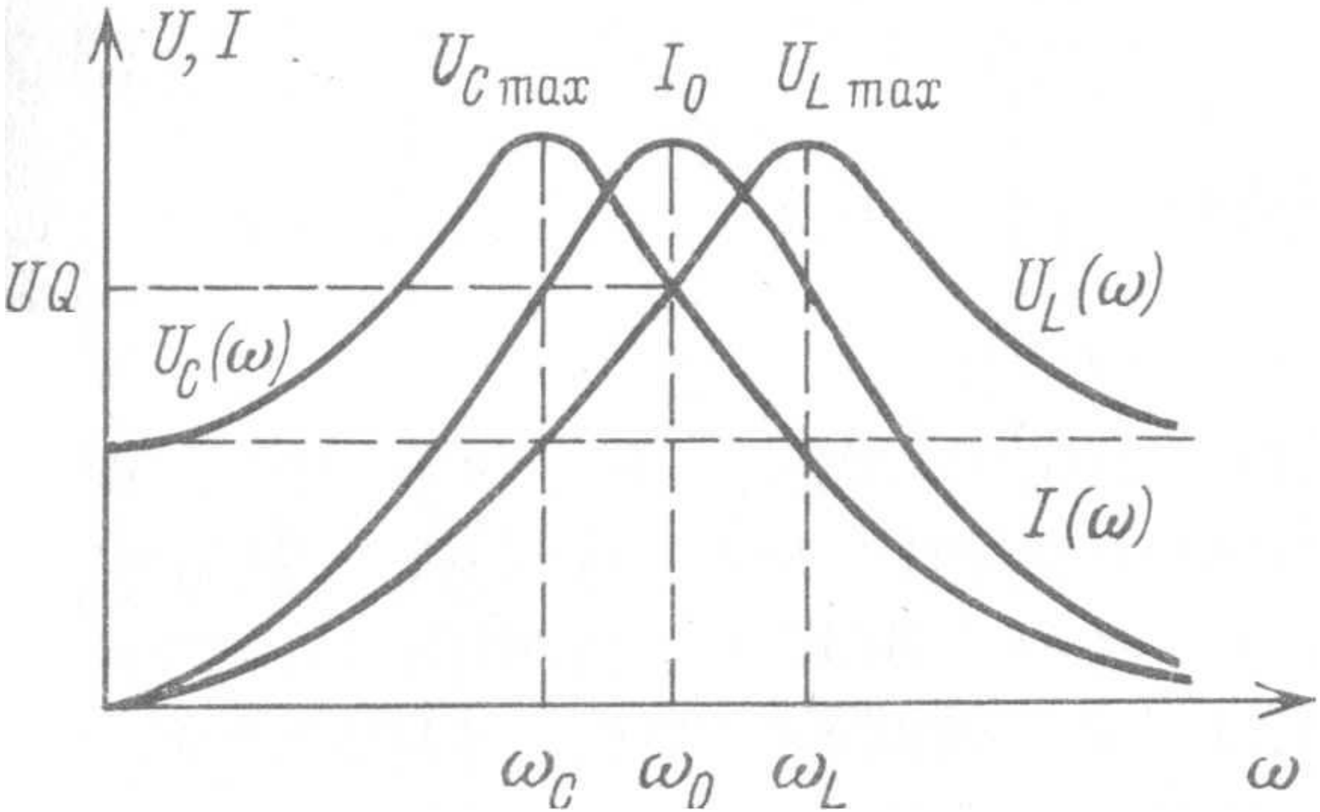
$$\omega = \omega_0 \rightarrow z = r \rightarrow I_m = \frac{U_m}{r}$$

$$\omega = \infty \rightarrow z = \infty \rightarrow I_m = 0$$

Амплитуды напряжений на реактивных элементах можно найти согласно закону Ома:

$$U_{mL}(\omega) = I_m(\omega) X_L(\omega) = \frac{U_m \omega L}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$U_{mC}(\omega) = I_m(\omega) X_C(\omega) = \frac{U_m}{\omega C \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$$



U, I
U_C max
I_0
U_L max
UQ
U_L(ω)
U_C(ω)
I(ω)
ω_C
ω_0
ω_L
ω

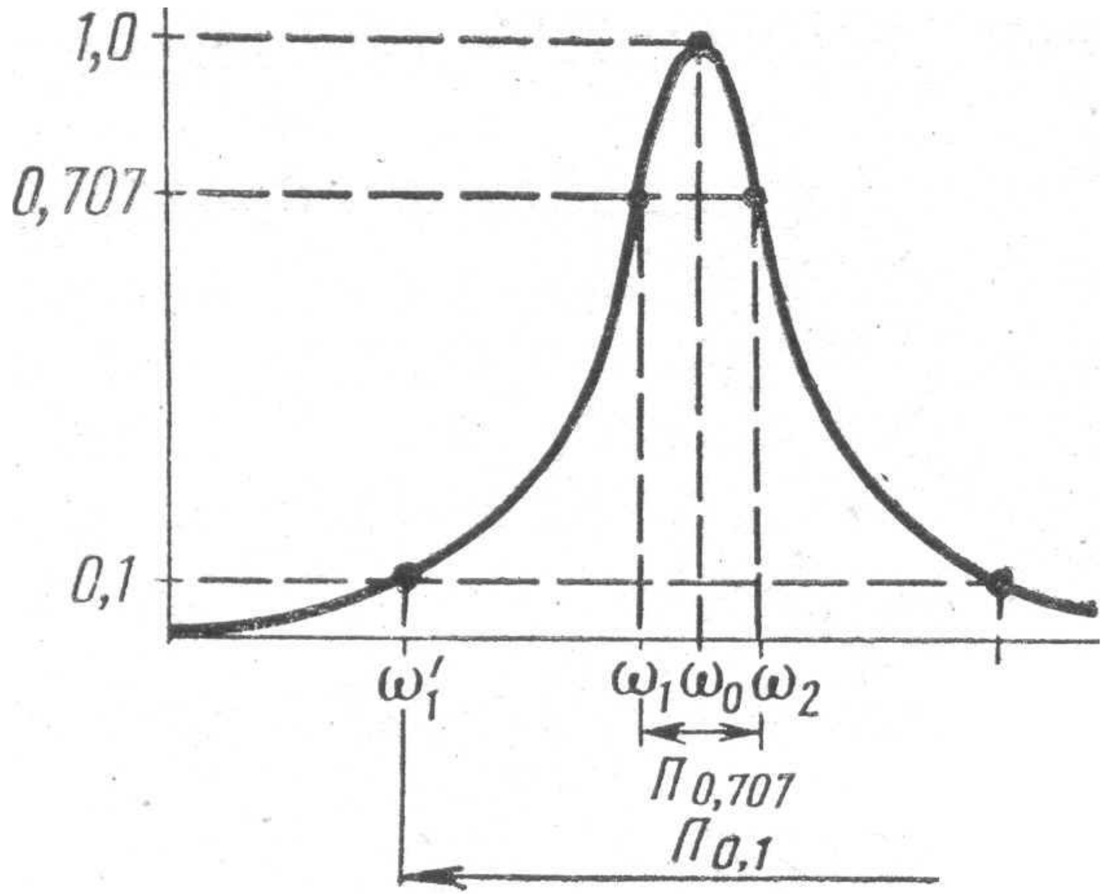
- При $\omega = 0$ ток в цепи равен нулю и напряжение на активном сопротивлении также равно нулю. Учитывая, что $X_L = \omega L$, при $\omega = 0$ эта величина также равна нулю и амплитуда напряжения $U_{mL}(0)$ =0. Напряжение, приложенное к контуру, выделится на емкости, и $U_{mC}(0) = U_{m\text{вх}}$.

- При частоте, равной резонансной, наблюдается равенство напряжений на реактивных элементах, однако эти значения не максимальны. При изменении частоты в сторону уменьшения или увеличения от резонансной происходит незначительное вначале уменьшение тока, но за счет увеличения реактивных сопротивлений происходит рост напряжения на них.

- При $\omega = \infty$ ток в цепи также равен нулю и напряжение на активном сопротивлении также равно нулю. Учитывая, что $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$, при $\omega = \infty$ эта величина также равна нулю и амплитуда напряжения $U_{mC}(0)$ =0. Напряжение, приложенное к контуру, выделится на индуктивности, и $U_{mL}(\infty) = U_{m\text{вх}}$
.

5. Полоса пропускания ПКК

- **Полосой пропускания последовательного колебательного контура называется диапазон частот вблизи резонансной, на границах которого амплитуда тока в контуре снижается до уровня 0,707 своего максимального значения.**



1,0
0,707
0,1
ω'1
ω1 ω0 ω2
П 0,707
П 0,1

- Разность граничных частот называется абсолютной полосой пропускания:

$$\Pi = \omega_2 - \omega_1$$

Отношение разности граничных частот к резонансной частоте называется относительной полосой пропускания:

$$\Pi_0 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{\Pi}{\omega_0}$$

$$\Pi = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} = \omega_0 d$$

$$\Pi_0 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{Q} = d$$

6. Коэффициент прямоугольности амплитудно-частотной характеристики

- Коэффициентом прямоугольности резонансной кривой контура называется отношение полосы пропускания контура, отсчитанной на
- уровне $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$, к полосе пропускания, отсчитанной на уровне $\frac{1}{10} = 0{,}1$:

$$K_{\Pi} = \frac{\Pi_{0,707}}{\Pi_{0,1}}$$

- коэффициент прямоугольности для последовательного колебательного контура является постоянной величиной, не зависящей от его параметров:

$$K_{П} = \frac{\omega_0 d}{10\omega_0 d} = 0{,}1$$