

<http://connect.ustu.ru>

МАТЕМАТИКА.

ТЕМА 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Адрес электронной образовательной среды,
системы электронного обучения Гиперметод
learn.urfu.ru

Лектор:
Карицкая Светлана Геннадьевна,
Кандидат технических наук, доцент

ПЛАН ЛЕКЦИИ

1. Определение и виды матриц.
Действия над матрицами
2. Определители
3. Вырожденные и обратные матрицы
4. Решение систем линейных уравнений

1. МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Прямоугольной матрицей размером $m \times n$, где m — число строк, n — число столбцов, называется прямоугольная таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются **элементами матрицы**. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится.

ВИДЫ МАТРИЦ

$$\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -17 & 29 \\ -30 & -36 \end{pmatrix} \text{ Прямоугольная матрица}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 22 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ Матрица-столбец}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \text{ Квадратная матрица}$$

$$(1 \quad -3 \quad 2 \quad 0) \text{ Матрица-строка}$$

ПРИНЦИП НУМЕРАЦИИ СТРОК И СТОЛБЦОВ

СТРОКИ НУМЕРУЮТСЯ СВЕРХУ
ВНИЗ, НАЧИНАЯ С № 1.

СТОЛБЦЫ НУМЕРУЮТСЯ СЛЕВА
НАПРАВО, НАЧИНАЯ С № 1.

СТРОКА И СТОЛБЕЦ

$$\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -17 & 29 \\ -30 & -36 \end{pmatrix} \text{ 3-строка}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -17 & 29 \\ -30 & -36 \end{pmatrix} \text{ 3-столбец}$$

РАЗМЕР МАТРИЦЫ

МАТРИЦА, ИМЕЮЩАЯ m СТРОК И n СТОЛБЦОВ, НАЗЫВАЕТСЯ МАТРИЦЕЙ РАЗМЕРА m НА n .

$$\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -17 & 29 \\ -30 & -36 \end{pmatrix}$$

Матрица размера 3 на 2
(3 строки, 2 столбца)

ОБЩИЙ ВИД МАТРИЦЫ РАЗМЕРА m НА n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A = (a_{ij})$$

ЭЛЕМЕНТ МАТРИЦЫ

$$\begin{pmatrix} \text{Элемент} \\ -17 & 29 \\ -30 & -36 \end{pmatrix}$$

$$a_{31} (\text{стр и-один}) = -30$$

(Ветрока, 1-й столбец)

ДИАГОНАЛИ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Главная диагональ

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Побочная диагональ

ТРЕУГОЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Верхняя треугольная матрица} \\ \text{Подглавной диагональю стоят нули)} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Нижняя треугольная матрица} \\ \text{Надглавной диагональю стоят нули)} \end{array}$$

ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

ЛЮБУЮ МАТРИЦУ МОЖНО УМНОЖИТЬ НА ЧИСЛО

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -5 & 10 \\ 20 & 10 & 0 \\ -25 & 30 & 5 \end{pmatrix}$$

МАТРИЦЫ ОДИНАКОВОГО РАЗМЕРА МОЖНО СКЛАДЫВАТЬ И ВЫЧИТАТЬ

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 8 & -5 & 5 \\ 7 & 3 & 14 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \pm 8 & -1 \pm (-5) & 2 \pm 5 \\ 4 \pm 7 & 2 \pm 3 & 0 \pm 14 \end{pmatrix}$$

ТРАНСПОНИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -17 & 29 \\ -30 & -36 \end{pmatrix}$$

Исходная
матрица (размер 3 на 2)

$$A^T = \begin{pmatrix} 12 & -17 & -30 \\ 4 & 29 & -36 \end{pmatrix}$$

Транспонированная
матрица (размер 2 на 3)

УМНОЖЕНИЕ СТРОКИ НА СТОЛБЕЦ (СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ)

$$(2 \quad -5 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 + (-5) \cdot 0 + 3 \cdot (-4) = 2$$

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦЫ НА СТОЛБЕЦ

КАЖДАЯ СТРОКА МАТРИЦЫ
СКАЛЯРНО УМНОЖАЕТСЯ НА
СТОЛБЕЦ

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 8 + (-1) \cdot 7 + 2 \cdot 2 \\ 4 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 0 \cdot 2 \\ (-5) \cdot 8 + 6 \cdot 7 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 46 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ВОЗМОЖНОСТЬ УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦЫ НА МАТРИЦУ

МАТРИЦУ A , ЗАПИСАННУЮ СЛЕВА,
МОЖНО УМНОЖИТЬ НА
МАТРИЦУ B , ЗАПИСАННУЮ СПРАВА,
ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА
ЧИСЛО СТОЛБЦОВ МАТРИЦЫ A
РАВНО ЧИСЛУ СТРОК МАТРИЦЫ B

ПРАВИЛО УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦЫ НА МАТРИЦУ

КАЖДАЯ СТРОКА ЛЕВОЙ
МАТРИЦЫ СКАЛЯРНО
УМНОЖАЕТСЯ НА КАЖДЫЙ
СТОЛБЕЦ ПРАВОЙ МАТРИЦЫ

$$C = A \cdot B$$

A — левая матрица, B — правая матрица

ПРИМЕР УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 8 + (-1) \cdot 7 + 2 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-3) \\ 4 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 0 \cdot 2 & 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) \\ (-5) \cdot 8 + 6 \cdot 7 + 1 \cdot 2 & (-5) \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -5 \\ 46 & 8 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

УМНОЖЕНИЕ СТОЛБЦА НА СТРОКУ

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot (2 \quad -5 \quad 3) = \begin{pmatrix} 7 \cdot 2 & 7 \cdot (-5) & 7 \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 & 0 \cdot (-5) & 0 \cdot 3 \\ (-4) \cdot 2 & (-4) \cdot (-5) & (-4) \cdot 3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 14 & -35 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & 20 & -12 \end{pmatrix}$$

ВАЖНЫЕ ТИПЫ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Единичная матрица
(размер 3 на 3)

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Нулевая матрица
(размер 3 на 3)

СВОЙСТВО ЕДИНИЧНОЙ МАТРИЦЫ: $A \cdot E = E \cdot A = A$

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & -6 & 8 \\ 11 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & -6 & 8 \\ 11 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & -6 & 8 \\ 11 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & -6 & 8 \\ 11 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

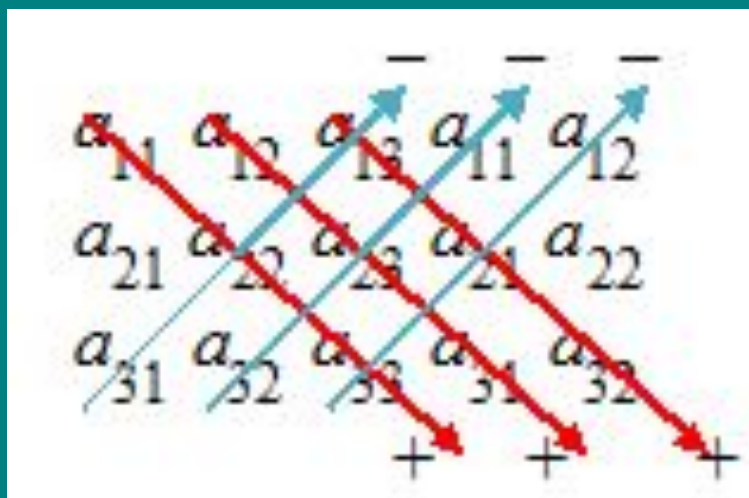
ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ второго порядка

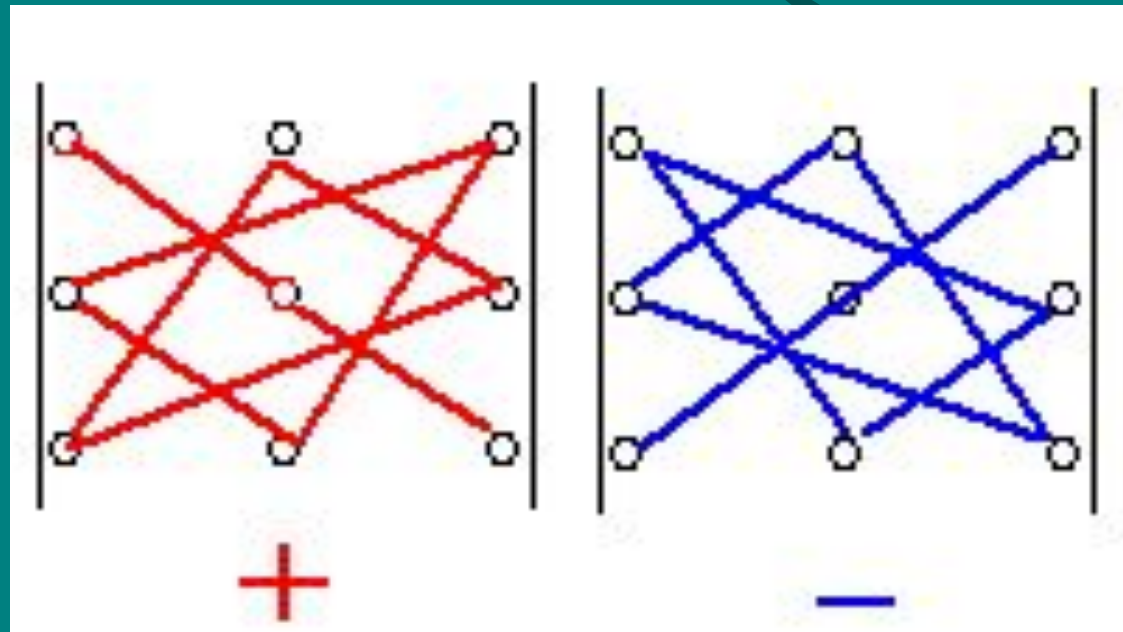
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Правило Саррюса





Правило треугольников для вычисления определителя

Минор элемента квадратной матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \Rightarrow M_{ij}$$

Алгебраическое дополнение элемента квадратной матрицы

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Свойства определителей

- **Свойство 1.** При транспонировании матрицы ее определитель не меняется: $\det A = \det A^T$.
- **Свойство 2.** $\det (A \pm B) = \det A \pm \det B$.
- **Свойство 3.** $\det (AB) = \det A \cdot \det B$
- **Свойство 4.** Перестановка любых двух строк (или столбцов) меняет знак определителя.
- **Свойство 5.** Общий множитель строки (столбца) можно выносить за знак определителя.
- **Свойство 6.** Определитель с двумя равными строками (или столбцами) равен нулю.

- **Свойство 7.** Определитель с двумя пропорциональными строками (или столбцами) равен нулю.
- **Свойство 8.** Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю. (Данное утверждение очевидно, т.к. считать определитель можно именно по нулевой строке или столбцу.)
- **Свойство 9.** Величина определителя не изменится, если к элементам одной из его строк(столбца) прибавить (вычесть) соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на какое-либо число k , не равное нулю.

■ **Свойство 10.** Если для элементов какой-либо строки (или столбца) матрицы верно соотношение $d = d_1 \pm d_2$, $e = e_1 \pm e_2$, $f = f_1 \pm f_2$, то верно

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ k & l & m \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ k & l & m \end{vmatrix}$$

Свойство 11. Величина определителя треугольной матрицы равна произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

- **Свойство 12. Теорема аннулирования.**
Сумма произведений элементов некоторой строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю.
- **Свойство 13. Теорема разложения.**
Величина определителя равна сумме произведений элементов некоторой строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

ВЫРОЖДЕННЫЕ И ОБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ

Вырожденная матрица

Если определитель квадратной матрицы A не равен нулю, матрицу называют **невырожденной**, в противном случае A называют **вырожденной** матрицей.

Матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов исходной матрицы A , называется **присоединенной** матрицей

$$A^V = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^V)^T = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

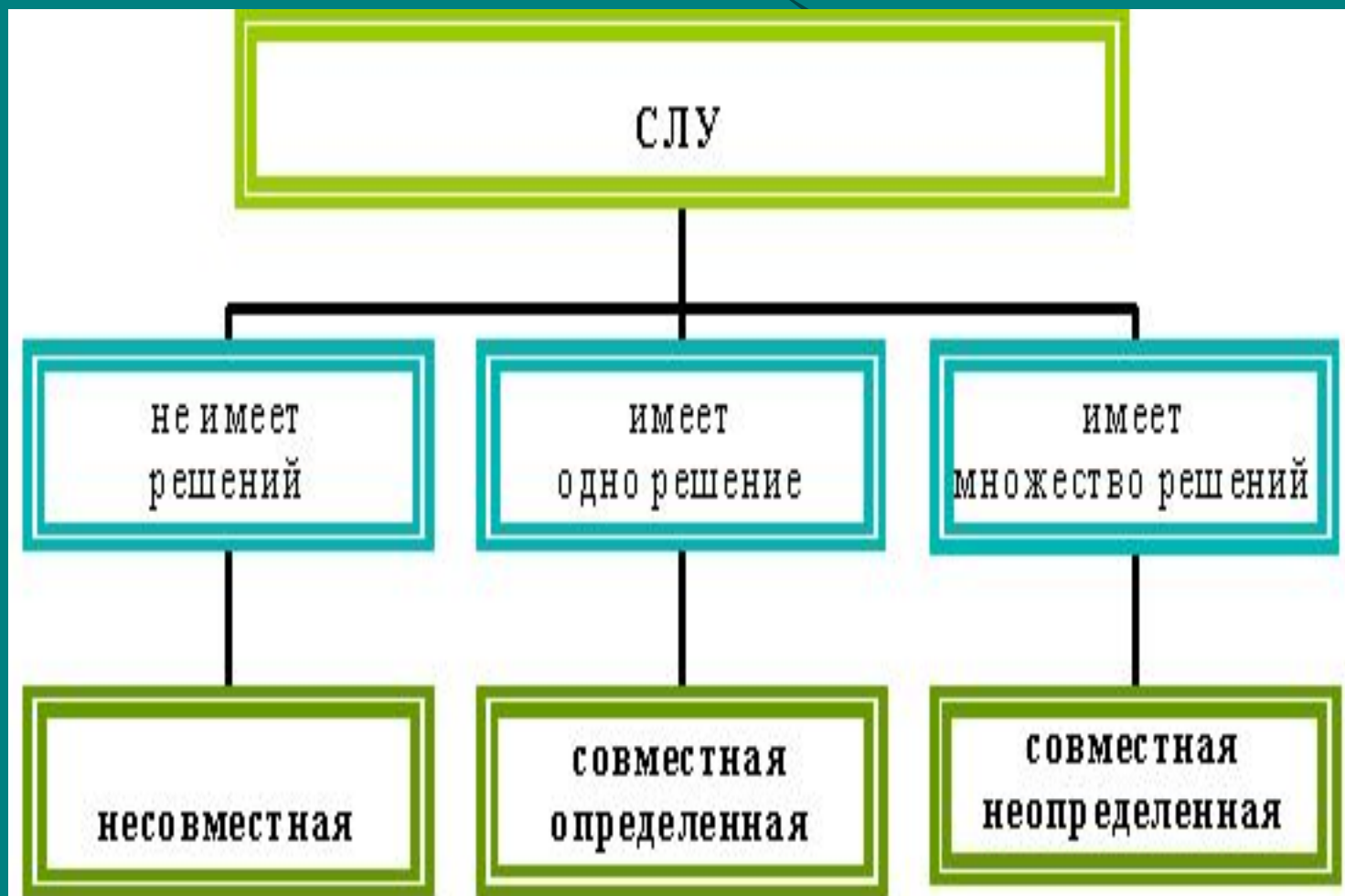
Алгоритм вычисления обратной матрицы по формуле (метод присоединенной матрицы)

- Если матрица не квадратная, то обратной матрицы не существует.
- Вычисляем определитель исходной матрицы. Если он равен нулю, обратной матрицы не существует. Если нет, переходим к следующему пункту.
- Находим алгебраические дополнения элементов исходной матрицы и составляем из них транспонированную присоединенную матрицу.
- Вычисляем обратную матрицу по формуле
- Проверяем правильность вычисления обратной матрицы, исходя из ее определения.

Ступенчатая матрица

$$A = \left(\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{array} \right)$$

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ



Сводная таблица по векторной алгебре

	$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}; \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}; \vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}; (\vec{a}, \vec{b}) = \varphi$		
Обозначение	Скалярное	Векторное	Смешанное
	$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$ - число	$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$ - вектор	$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$ - число
Определение	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cos \varphi$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$	1) $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ и $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$ 2) $ \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \sin \varphi$ 3) $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$ - правая тройка $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$	$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$ $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$
Линейность по всем сомножителям			
Свойства	Критерий ортогональности ненулевых векторов: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$	Критерий коллинеарности ненулевых векторов: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$	Критерий компланарности ненулевых векторов: $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = 0$
	$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a} ^2;$ $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$	Геометрический смысл: вектор $\vec{a} \times \vec{b} \perp$ параллелограмму со сторонами $\vec{a}, \vec{b}$ и его модуль $ \vec{a} \times \vec{b} = S$ - площадь этого параллелограмма	Геометрический смысл: $ \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = V$ - объем параллелепипеда с ребрами $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$
В координатах	$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$	$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$