Матрицы, их виды. Линейные и нелинейные операции над матрицами

1. Определение и некоторые виды матриц.

2. Линейные операции над матрицами.

3. Нелинейные операции над матрицами.

Определение и некоторые виды матриц

Матрицей размера m×n называется множество чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, состоящей из m-строк и n-столбцов.

Матрицы обозначают обычно большими латинскими буквами алфавита (A, B, C, …) и при записи заключают в круглые или квадратные скобки:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Определение и некоторые виды матриц

Матрицу A называют матрицей *размера* $m \times n$ и пишут $A_{m \times n}$. Числа a_{ij} составляющие матрицу, называются ее *элементами*.

Их обычно обозначают маленькой латинской буквой с нижним индексом из двух цифр. Он указывает положение элемента в матрице: первая цифра индекса – номер строки, в которой стоит элемент, а вторая – номер столбца.

Например, a_{24} – элемент второй строки и четвертого столбца, a_{13} – элемент первой строки и третьего столбца.

Виды матриц

Если число строк матрицы не равно числу столбцов ($m \neq n$), то матрица называется *прямоугольной*. Например, прямоугольными являются матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -17 & 29 \\ -30 & -36 \end{pmatrix}$$ Прямоугольная матрица

Виды матриц

Если число строк равно числу столбцов (m = n), то матрица называется *квадратной*. Например, квадратными являются матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица

Число строк или столбцов квадратной матрицы называется ее *порядком*. Так, в последнем примере порядок матрицы А равен 2, а порядок матрицы В равен 3.

КВАДРАТНАЯ МАТРИЦА

Рассмотрим квадратную матрицу В.

Диагональ, содержащую элементы a_{11}, a_{22}, a_{33} будем называть *главной*, а диагональ, содержащую элементы a_{13}, a_{22}, a_{31} – *побочной* (или *вспомогательной*).

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$ Главная диагональ

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$ Побочная диагональ

Виды матриц

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется *вектором*.

Матрица, состоящая из одной строки, называется *строчной* и имеет вид:

$$B = (b_{11} b_{12} \ldots b_{1n}).$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица-строка

Виды матриц

Матрица, состоящая из одного столбца, называется *столбцовой* и имеет вид:

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \cdots \\ c_{m1} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 22 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$ Матрица-столбец

Виды матриц

Нулевой матрицей называют матрицу, все элементы которой равны нулю. Ее обозначают обычно буквой O, т.е.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Нулевая матрица (размер 3 на 3)

Виды матриц

Квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной*.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Виды матриц

Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, называется *единичной*. Единичную матрицу принято обозначать буквой E.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Единичная матрица (размер 3 на 3)

Виды матриц

Квадратные матрицы, у которых все элемента выше (ниже) главной или побочной диагонали равны нулю, называются *треугольными*.

1. Верхняя треугольная

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2. Нижняя треугольная

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Виды матриц

Прямоугольную матрицу размера m×n будем называть *трапециевидной*, если все ее элементы ниже главной диагонали равны нулю, т.е. если она имеет вид

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots a_{1m} \dots a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots a_{2m} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \; \dots \; \dots \; \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots a_{mm} \quad a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Равенство матриц

Две матрицы А и В считаются *равными*, если они одинакового размера, и элементы, стоящие в А и В на одинаковых местах, равны между собой, т.е. $a_{ij}=b_{ij}$. Например, матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$ равны, если $a_{11}=b_{11}$, $a_{12}=b_{12}$, $a_{13}=b_{13}$,

$a_{21}=b_{21}$, $a_{22}=b_{22}$, $a_{23}=b_{23}$.

Линейные операции над матрицами

Линейными операциями над матрицами называются **умножение матрицы на число** и сложение (вычитание) матриц.

Линейные операции над матрицами

Произведением матрицы A =(a_{ij}) на число k называется такая матрица B= (b_{ij}), элементы которой равны произведениям соответствующих элементов матрицы A на число k, т.е. b_{ij} = k×a$_{ij}$.

Произведение матрицы A на число k обозначается kA.

Например, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \text{ то } kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{pmatrix}.$$

Линейные операции над матрицами

ЗАДАНИЕ 1. Умножить матрицу $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ на число $k = 2$.

Решение. Умножаем каждый элемент матрицы A на 2, получим

$$2A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 6 \\ 0 & 12 & -6 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Линейные операции над матрицами

Частным случаем произведения матрицы А на число является произведение (-1)А. Так как все элементы этой матрицы противоположны соответствующим элементам матрицы А, то матрицу (-1)А называют *противоположной* матрице А и обозначают –А.

Например, если

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 6 \\ 0 & 12 & -6 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ то } -A = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -6 \\ 0 & -12 & 6 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Линейные операции над матрицами

Суммой двух матриц А $=(a_{ij})$ и В= (b_{ij}) одинакового размера, называется такая матрица С=(c_{ij}), элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц А и В, т.е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Сумму матриц А и В обозначают А+В.

Например, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}.$$

Линейные операции над матрицами

<u>ЗАДАНИЕ 2.</u> Сложить матрицы А и В, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$;

а) В данном примере А и В – матрицы одинакового размера (квадратные матрицы второго порядка), значит можно их сложить. Получим:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2-1 & 4+3 \\ -1+1 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Линейные операции над матрицами

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

б) В данном примере A и B – матрицы одинакового размера (прямоугольные матрицы размера 2×3), значит можно их сложить. Получим:.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Линейные операции над матрицами

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

в) В данном примере A и B – матрицы разного размера (матрица A размера 3×2, а матрица B размера 2×3), поэтому матрицы складывать нельзя.

Линейные операции над матрицами

Частным случаем суммы двух матриц является сумма A+ (-B). Так как все элементы этой матрицы равны разностям соответствующих элементов матрицы A и матрицы B, то матрицу A+ (-B) называют *разностью матриц* A и B и обозначают A–B.

Например, если

A= $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ и B=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, то

C=A-B= $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Линейные операции над матрицами

Легко проверить, что введенные таким образом линейные операции над матрицами обладают следующими свойствами:

1) $A+B=B+A$ (коммутативность сложения матриц);

2) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (ассоциативность сложения матриц);

3) $A+O=A$;

4) $A+(-A)=O$;

5) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$ (ассоциативность относительно умножения чисел);

6) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$ (дистрибутивность умножения на матрицу относительно сложения чисел);

7) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения матриц);

8) $1A=A$.

Нелинейные операции над матрицами

Нелинейными операциями над матрицами называются **умножение матриц** и **транспонирование матриц**.

Нелинейные операции над матрицами

Пусть A $=(a_{ij})$ и B= (b_{ij}) – матрица-строка и матрица-столбец одинаковой длины n. Произведением матрицы-строки A на матрицу-столбец B называется число c, равное сумме произведений их соответствующих элементов, т.е.

$$c = a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + \ldots + a_{1n} \times b_{n1}.$$

ЗАДАНИЕ 3. Найти произведение матриц A и B, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Нелинейные операции над матрицами

Решение.

- В данном примере А и В – матрицы одинаковой длины, значит можно найти произведение этих матриц. Получим:
- $C = AB = 1\times(-5)+2\times3+(-3)\times4 = -11.$

Нелинейные операции над матрицами

Пусть А =(a_{ij}) – матрица размера m×n, В= (b_{ij}) – матрица размера n×k (т.е. количество столбцов в матрице А совпадает с количеством строк матрицы В). Произведением матрицы А на матрицу В называется матрица С=(c_{ij}) размера m×k такая, что каждый ее элемент c_{ij} является произведением i-й строки матрицы А на j-й столбец матрицы В, т.е.

$$c_{ij}= a_{i1}\times b_{1j}+a_{i2}\times b_{2j}+a_{i3}\times b_{3j}+\dots+a_{in}\times b_{nj}\ .$$

Произведение матрицы А на матрицу В обозначают А×В или АВ.

Например, если

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$C=AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Нелинейные операции над матрицами

Например, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$C = AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$; $c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$; $c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}$;

$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$; $c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$; $c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}$;

$c_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31}$; $c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}$; $c_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}$ и

т.д.

Нелинейные операции над матрицами

ЗАДАНИЕ 4. Найти произведение матриц А и В, если

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Нелинейные операции над матрицами

Решение.

а) В данном примере число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, то A можно умножить на B. Получим:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+2\cdot 2 & 1\cdot 3+2\cdot(-4) & 1\cdot 1+2\cdot(-2) \\ 0\cdot(-1)+(-1)\cdot 2 & 0\cdot 3+(-1)\cdot(-4) & 0\cdot 1+(-1)\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

б) В данном примере число столбцов матрицы A неравно числу строк матрицы B, поэтому A нельзя умножать на B.

Нелинейные операции над матрицами

Таким образом, для прямоугольных матриц справедливы следующие правила:

1) умножение матрицы A на матрицу B имеет смысл только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B;

2) в результате умножения двух прямоугольных матриц получается матрица, содержащая столько строк, сколько строк в первой матрице, и столько столбцов, сколько столбцов во второй матрице.

Нелинейные операции над матрицами

ЗАДАНИЕ 5. Найти произведение матриц: а) А и В; б) В и А, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нелинейные операции над матрицами

Решение.

а) В данном примере число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В, то А можно умножить на В. Получим:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-6+0 & 7-8+0 \\ 3-3-5 & 21-4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -5 & 17 \end{pmatrix}.$$

Нелинейные операции над матрицами

б) В данном примере число столбцов матрицы В равно числу строк матрицы А, то В можно умножить на А. Получим:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+21 & -2-7 & 0+35 \\ 3+12 & -6-4 & 0+20 \\ -1+0 & 2+0 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -9 & 35 \\ 15 & -10 & 20 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последний пример показывает, что если произведение АВ и ВА существует, то в общем случае АВ≠ВА **(умножение матриц некоммутативно)**. Но для некоторых матриц равенство АВ=ВА возможно.

Нелинейные операции над матрицами

Например, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$\mathbf{AB=BA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A и B, для которых AB=BA, называются *перестановочными*.

Нелинейные операции над матрицами

Операции умножения матриц обладают следующими свойствами (при условии, что записанные произведения имеют смысл):

1) AE=EA=A, AO=OA=O;
2) (AB)C=A(BC) (ассоциативность умножения матриц);
3) (A+B)C=AC+BC (дистрибутивность умножения матриц справа относительно сложения матриц);
4) C(A+B)=CA+CB (дистрибутивность умножения матриц слева относительно сложения матриц).

Нелинейные операции над матрицами

Пусть A – матрица размера $m \times n$. Матрица размера $m \times n$, полученная из A заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется *транспонированной* к A и обозначается A^T. Операция нахождения матрицы A^T называется *транспонированием* матрицы A.

Например, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Нелинейные операции над матрицами

Операции транспонирования матриц обладает следующими свойствами:

1) $(A^T)^T = A$;
2) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;
4) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Домашняя работа

1. Выучить конспект по теме занятия.
2. Решить задания:

I. Найти линейные комбинации заданных матриц:

1) $2A+3B$, где $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

II. Найти произведение матриц $A\cdot B$ и $B\cdot A$, если это возможно:

1) $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$.

IV. Транспонировать матрицу:

1) $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$.