Теорема о вероятности суммы событий

Теория вероятностей и математическая статистика

Сумма событий

- **A + B** – событие, которое происходит ⇔ происходит хотя бы одно из событий A или B

$$\mathbf{A + B = A \cup B}$$

Сумма событий =

= объединение событий

Несовместные события

- Одновременное появление в опыте невозможно

$$A \times B = \varnothing$$

В противном случае– **совместные события**

Теорема

- Вероятность суммы ***N*** несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_N) = P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_N)$$

Пример

- В ящике **10** белых, **5** черных, **7** синих и **12** серых пар носков. Вынули одну пару .
- Какова вероятность того, что она белая, чёрная или синяя?

Пример

События

А = «Вынули белую пару»

В = «Вынули синюю пару»

С = «Вынули чёрную пару»

А+В+С = «Вынули белую , синюю или чёрную пару»

События А, В и С несовместны

Пример

Всего пар носков

$10+5+7+12 = 34$

$P(A) = 10/34$

$P(B) = 7/34$

$P(C) = 5/34$

$P(A+B+C) = 10/34 + 7/34 + 5/34 =$

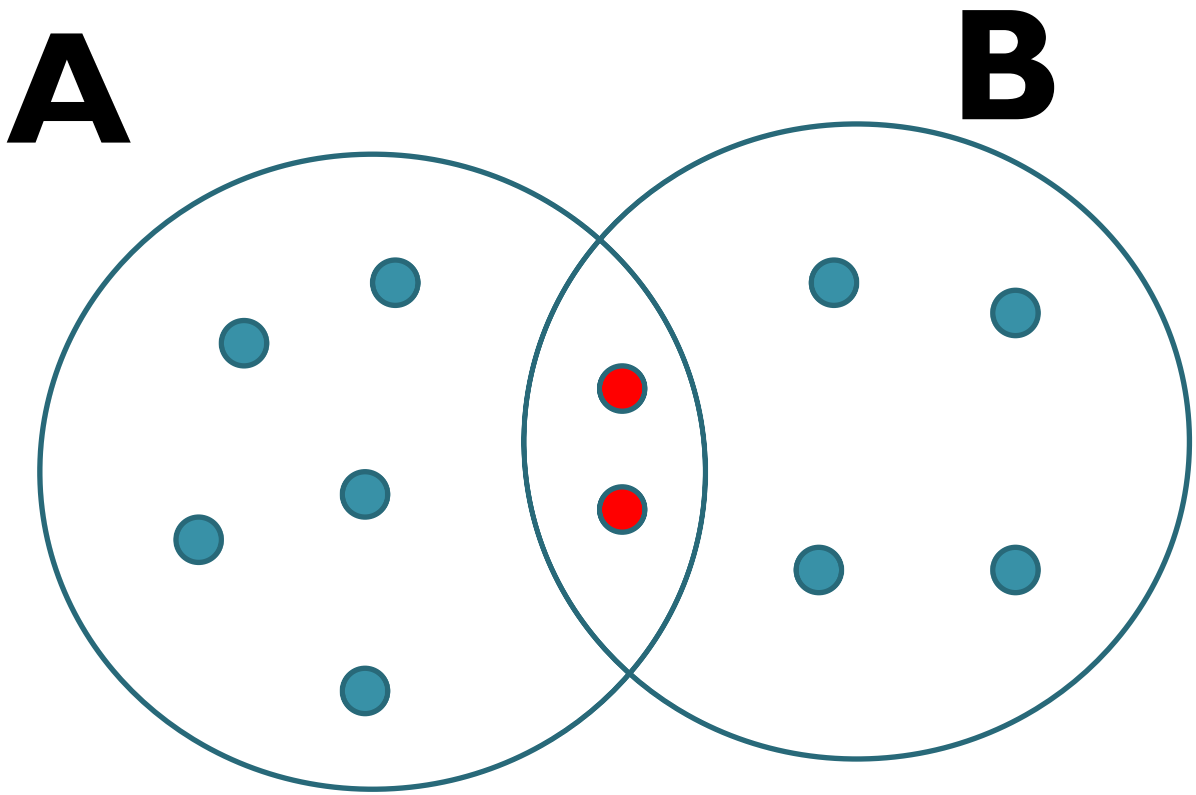
$= 22/34 = 11/17$

Теорема

- Вероятность суммы двух **совместных** событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их совместного появления

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Формула мощности объединения множеств



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Пример

Вероятность того, что к началу первой пары вовремя придёт первый из двух студентов, гамающих всю ночь, равна 0,5, второй – 0,3. Вероятность того, что оба они придут вовремя, равна 0,001.

Какова вероятность того, что к началу пары придёт хотя бы один студент?

Пример

События

A = «К началу пары вовремя придёт первый студент»

B = «К началу пары вовремя придёт второй студент»

A и B совместны

AB = «К началу пары вовремя придут оба студента»

Пример

$P(A) = 0,5$

$P(B) = 0,3$

$P(AB) = 0,001$

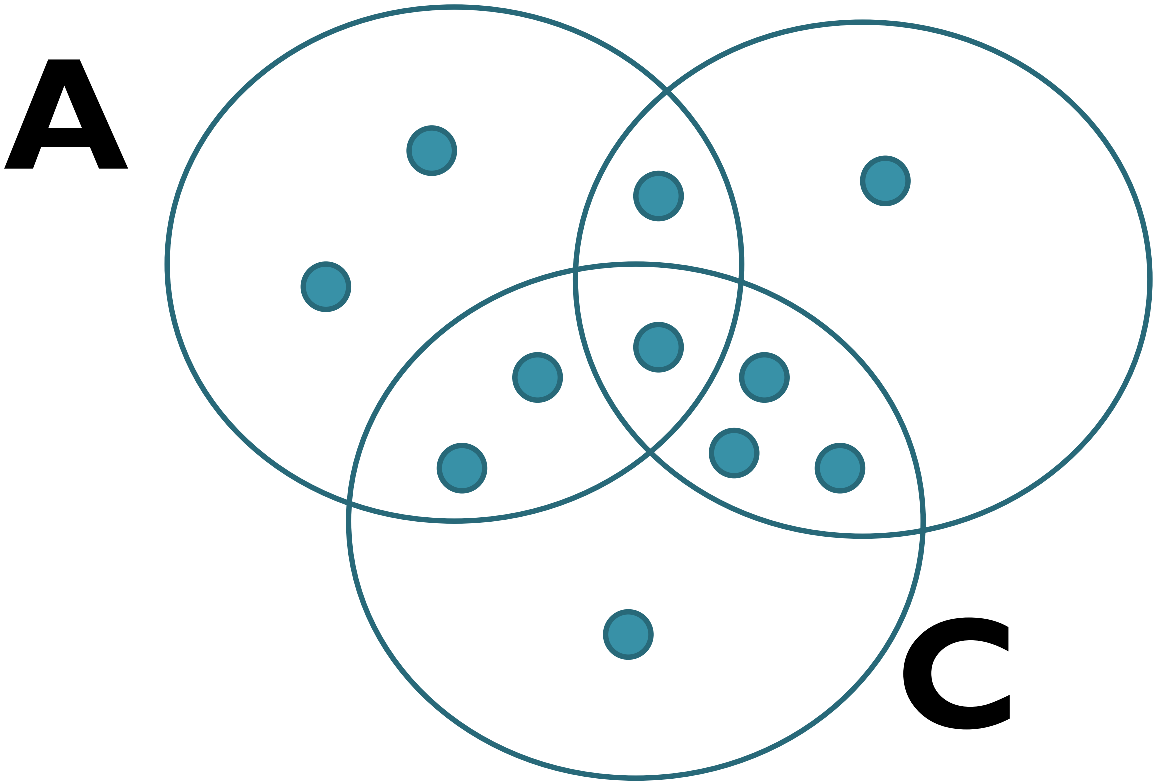
$P(A+B) = 0,5 + 0,3 - 0,001 = 0,799$

Теорема

- Вероятность суммы трёх совместных событий вычисляется по формуле:

$$P(A+B+C) =$$
$$P(A) + P(B) + P(C) -$$
$$- P(BA) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

Формула мощности объединения трёх множеств



$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B|$
$- |A \cap C| -$
$- |C \cap B| + |A \cap B \cap C|$

Теорема о вероятности произведения событий

Теория вероятностей и математическая статистика

Произведение событий

A1×A2 × … ×An – событие, которое происходит ⇔ происходят все события

A1, A2, … , An

Независимость двух событий

- Появление или не появление одного из них **не** влияет на появление другого
- В противном случае – события **зависимые**

Теорема

Если события **независимы**, то вероятность произведения этих событий равна произведению вероятностей этих событий

$$\mathbf{P(A_1A_2 \ldots A_N) = P(A_1) \times P(A_2) \times \ldots \times P(A_N)}$$

Пример

Какова вероятность того, что трёх наугад выбранных жителей острова Невезения (ужасных на лицо, но добрых внутри) мама родила в понедельник

Пример

События

A1 = «Первый выбранный дикарь родился в понедельник»

A2 = «Второй выбранный дикарь родился в понедельник»

A3 = «Третий выбранный дикарь родился в понедельник»

A1, A2, A3 независимы

Пример

Всего дней в неделе – 7

P(A1) = 1/7

P(A2) = 1/7

P(A3) = 1/7

P(A1A2A3) = 1/7 × 1/7 × 1/7 = 1/343

Условная вероятность

Условная вероятность события А по событию В – вероятность события А, вычисленная при условии, что событие В произошло

$$P_B(A)$$

Теорема

Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятности одного события на условную вероятность другого события по первому

$$P(AB) = P(A) \times P_A(B)$$

Пример

Предприятие выпускает пакеты для мусора. Вероятность того, что пакет годный, равна 0,96. С вероятностью 0,75 годный пакет оказывается первого сорта.

Какова вероятность того, что наугад выбранный пакет первого сорта?

Пример

События

A = «Пакет для мусора годный»

B = «Годный пакет для мусора первого сорта»

A и B зависимы.

Событие B может произойти только при условии появления события A

Пример

Событие АВ = «Наугад выбранный пакет– первого сорта»

$P(A) = 0{,}96$

$P_A(\mathbf{B}) = 0{,}75$

$P(A\mathbf{B}) = 0{,}96 \times 0{,}75 = 0{,}72$

Теорема

Вероятность произведения трёх зависимых событий вычисляется по формуле

$$P(ABC) = P(A) \times P_A(B) \times P_{AB}(C)$$

Вероятность противоположных событий

Теория вероятностей и математическая статистика

Противоположное событие

- Происходит ⇔ **не** происходит событие A

$$\neg A$$

Теорема

- Вероятность события равна разности между 1 и вероятностью события, противоположного к данному:

$$\mathbf{P(A) = 1 - P(\neg A)}$$

Пример

Умный и прилежный студент-программист сдаёт все экзамены на «пятёрки» с вероятностью 0,96.

Какова вероятность того, что он не получит заслуженную «пятёрку»?

Пример

События

A = «Студент получит отличную оценку»

¬A = «Студент не получит отличную оценку»

A и ¬A противоположны

$$P(\neg A) = 1 - P(A) =$$
$$= 1 - 0{,}96 = 0{,}04$$

Теорема

Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2 \ldots, A_N$, независимых в совокупности, равна разности между 1 и произведением вероятностей противоположных событий

$$\mathbf{P(A_1 + A_2 + \ldots + A_N) =}$$
$$\mathbf{= 1 - P(\neg A_1) \times P(\neg A_2) \times \ldots \times P(\neg A_N)}$$

Пример

Три брата независимо друг от друга пытаются попасть тапком в нашкодившего кота. Вероятность попадания соответственно равна 0,75, 0,8 и 0,9.

Определить вероятность того, что в мяукающую цель попадает хотя бы один

Пример

События

A1 = «Первый брат попал в цель»

A2 = «Второй брат попал в цель»

A3 = «Третий брат попал в цель»

A1, A2, A3 независимы

A1 + A2 + A3 = «Хотя бы один брат попал в цель»

Пример

$P(A1) = 0{,}75$ $P(\neg A1) = 0{,}25$

$P(A2) = 0{,}8$ $P(\neg A2) = 0{,}2$

$P(A3) = 0{,}9$ $P(\neg A3) = 0{,}1$

$P(A1+A2+A3) = 1 - 0{,}25 \times 0{,}2 \times 0{,}1$
$= = 1 - 0{,}005 = 0{,}995$