Динамика твердого тела

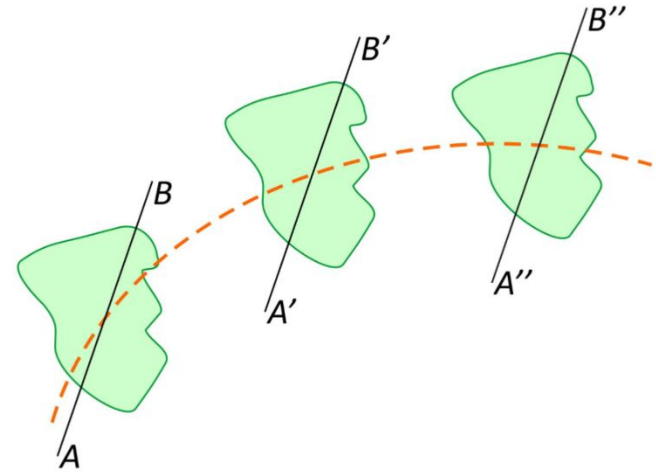
Задание по физике для групп 711, 712.
На этой неделе тема лекции Динамика твердого тела. Делаем соответствующие задания из тестов
Ответы и вопросы присылать на почту valiullina369@mail.ru в течение недели

Вопросы

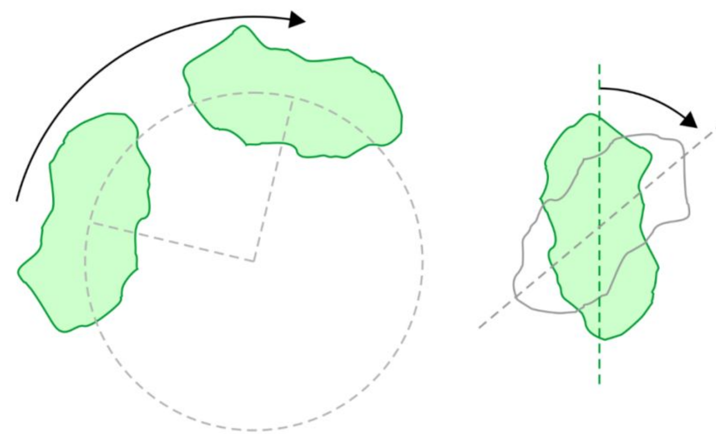
Поступательное движение

Описывается вторым законом Ньютона!!!

$$\vec{F} = m\vec{a}_C$$



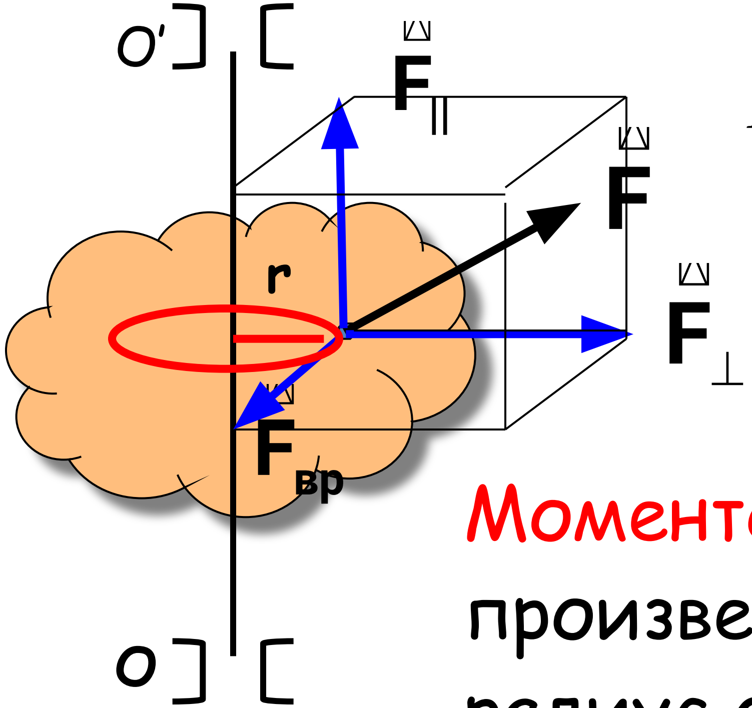
Вращательное движение – это дв-ние, при котором все точки тела дв-ся по окружностям, центры к-ых лежат на одной и той же прямой, наз-мой осью вращения



ω – const, $\upsilon \neq$ const

Абсолютно твердое тело – совокупность мат. точек, не смещающихся друг относительно друга и не поддающиеся деформированию

Момент силы



$$\vec{F} = \vec{F}_{вр} + \vec{F}_{\perp} + \vec{F}_{\parallel}$$

Зависит от расстояния – от момента силы

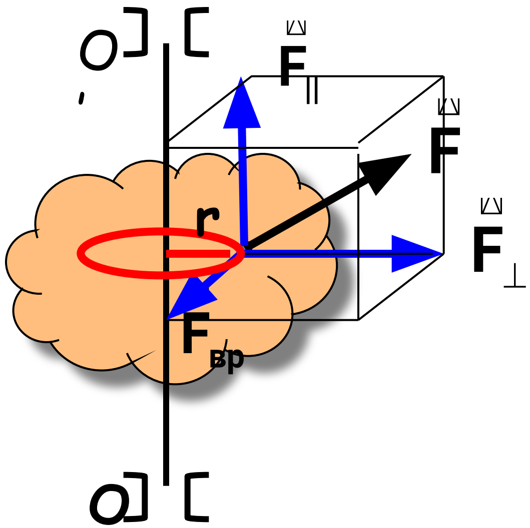
Моментом вращающей силы наз-ся произведение вращающей силы на радиус окружности *r* , описываемой точкой приложения

$$\boxed{\vec{M} = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right]}$$

единица измерения [Н·м]

Произведение векторное

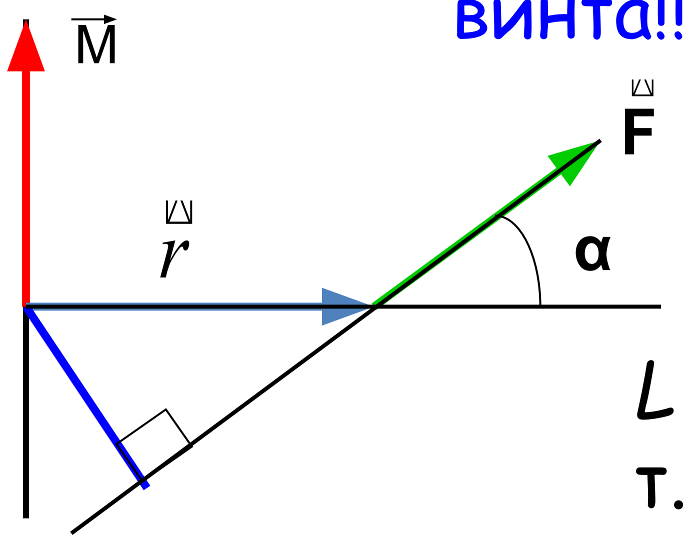
Модуль момента силы



$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$$

$\vec{r}$ - радиус-вектор, проведенный из точки О в точку приложения силы

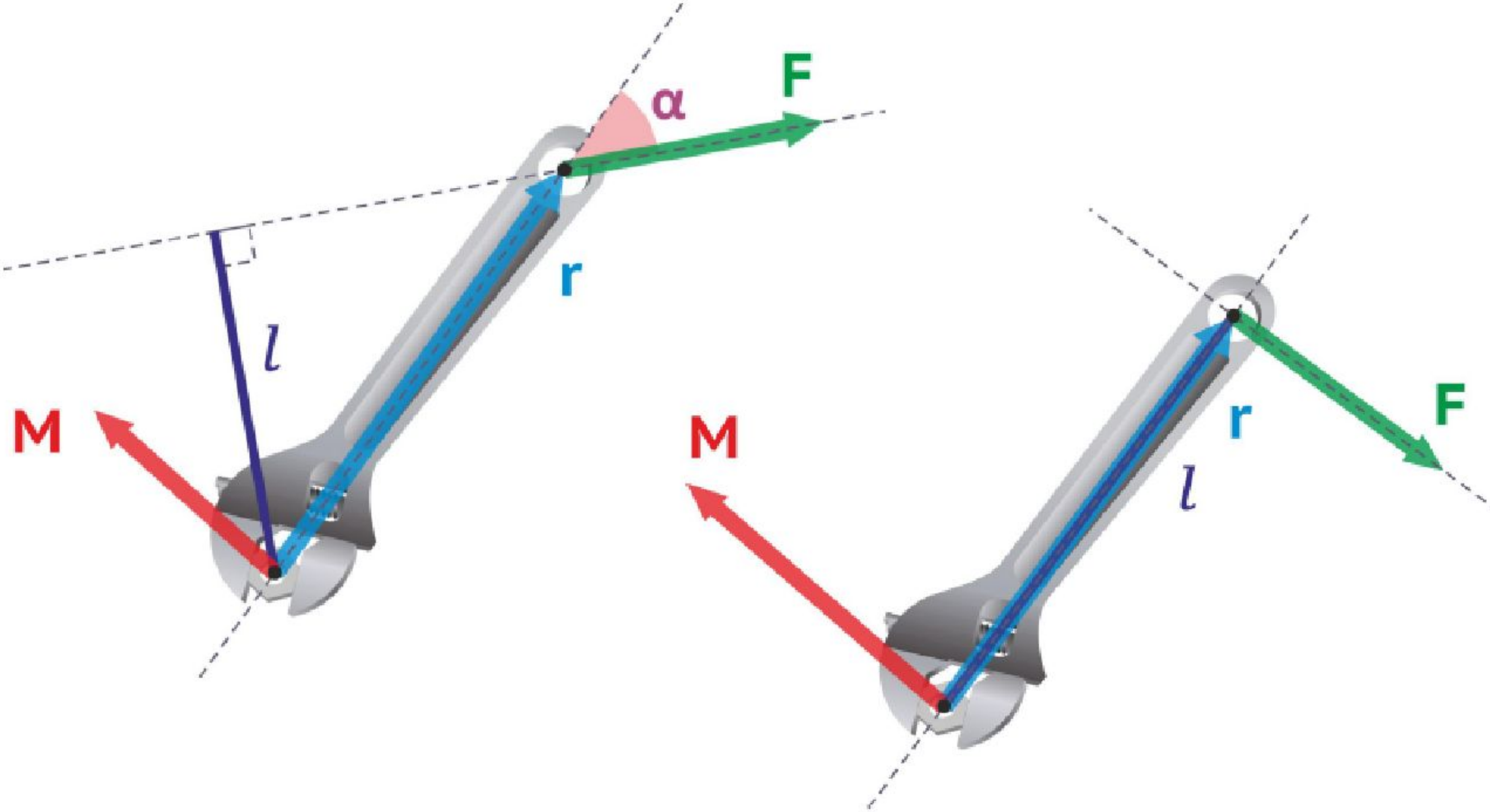
Подчиняется правилу правого винта!!



$$\boxed{M = r \cdot F \cdot Sin\alpha = l \cdot F}$$

L – длина ⊥, опущенного из т.О на прямую вдоль которой действует сила

Пример!

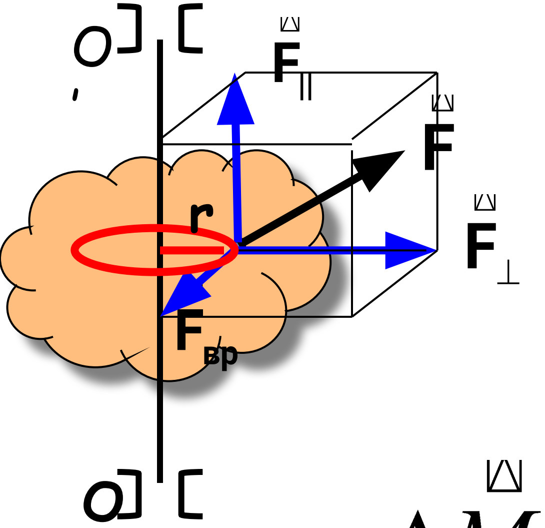


$r = L$, $\alpha = 90°$

1. $\sum_i \vec{F}_i = 0$ обеспечивает неподвижность центра масс (если тело покоилось в начальный момент времени)

2. $\sum_i \vec{M}_i = 0$ обеспечивает отсутствие вращательного движения тела

Элементарный момент силы



$$\Delta\vec{F}_i = \Delta m_i \vec{a}_i$$

$$\Delta\vec{M}_i = \Delta\vec{F}\cdot\vec{r} = \Delta m_i \vec{a}_i \vec{r}_i$$

$$a_i = \varepsilon \cdot r_i$$

$$\Delta\vec{M}_i = \Delta m_i \vec{\varepsilon}\cdot\vec{r}_i^{\,2}$$

$$\boxed{\vec{M} = \Delta\vec{M}_1 + \Delta\vec{M}_2 + \Delta\vec{M}_3 + \ldots + \Delta\vec{M}_n = \vec{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i \vec{r}_i^{\,2}}$$

$$J_i = \Delta m_i \cdot r_i^2$$

Момент инерции материальной точки

Момент инерции тела– величина, равная сумме произведений элементарных масс тела на квадрат их расстояний от оси вращения.

$$\boxed{J = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2}$$

$$\boxed{J = \sum_{i=1}^{n} J_i}$$

J = [кг·м²]

Момент инерции тела – сумма инерций всех материальных точек, составляющих данное тело

$$\boxed{\vec{M} = J \cdot \vec{\varepsilon}}$$

Момент вращающей силы, приложенной к телу равен произведению момента инерции данного тела на угловое ускорение – основной закон динамики вращ. дв-ния

Инерция и масса - сравнение

$$\vec{M} = J \cdot \vec{\varepsilon}$$

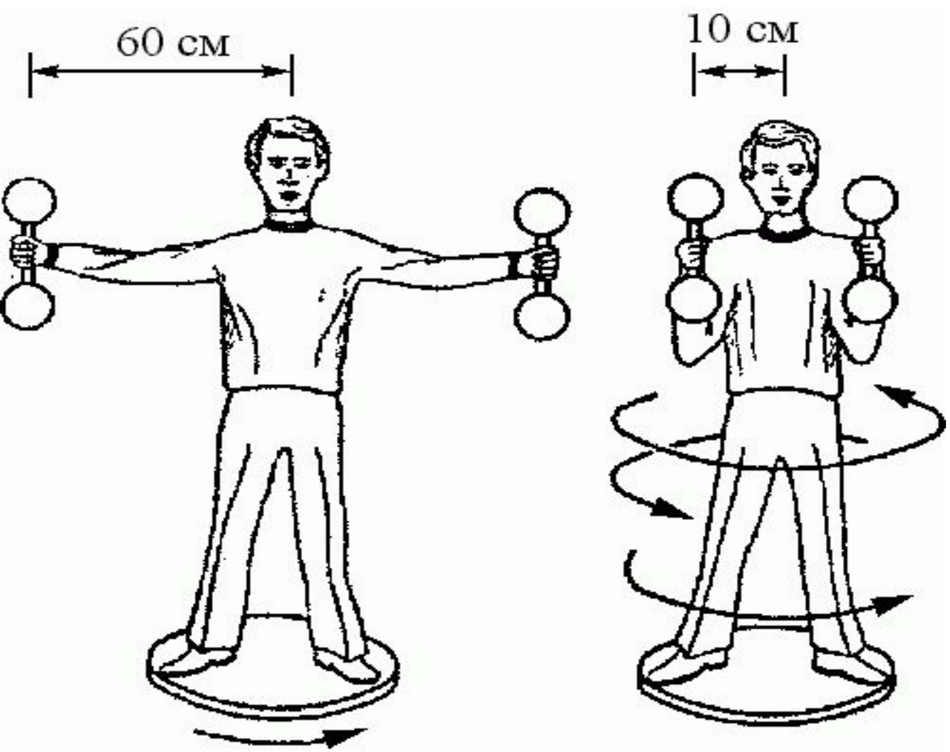
По аналогии

$$\vec{F} = m\vec{a}_C$$

Момент инерции ~ масса тела

Тело обладает моментом инерции независимо от того, вращается оно или нет.

$J_1 > J_2$ $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$



Разница между массой и моментом инерции – масса тела не изменяется!!!,

Момент инерции можно изменить перемещением масс относительно оси вращения

$$\vec{M} = J \cdot \vec{\varepsilon} \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \qquad \vec{M} = J\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\vec{M}dt = Jd\vec{\omega}$$

If J = const

$$\vec{M}dt = d\left(J\vec{\omega}\right)$$

L

Момент импульса хар-ет количество вращательного движения.

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

по форме напоминает

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Момент силы определяет скорость изменения момента импульса

В замкнутой системе

$$\vec{M} = 0 \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

$$\boxed{L = const} \qquad \boxed{J \cdot \omega = const}$$

Если на систему не действуют внешние силы или сумма этих моментов равна нулю, либо силы являются центральными, то момент количества движения системы остается постоянным – закон сохранения момента импульса замкнутой системы.

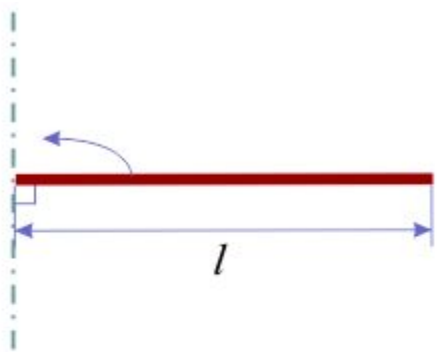
Актуально для решения задач!

$$J = \int r^2 dm = \int \rho(\vec{r})dV$$

Для однородных тел геометрически правильной формы → интегрированием

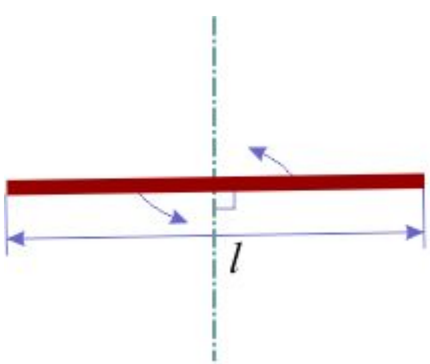
Для неоднородных тел и тел неправильной формы → экспериментально

Тонкий стержень длиной *l*



$$J = \int_0^l r^2 S\rho dr = S\rho \int_0^l r^2 dr = S\rho \frac{l^3}{3}$$

$$\boxed{J = \frac{ml^2}{3}}$$

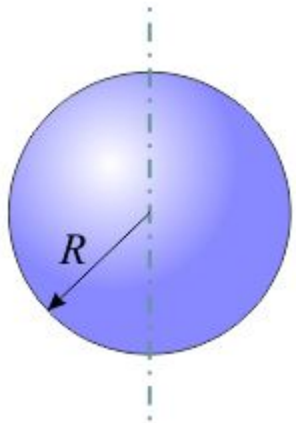


$$\boxed{J = \frac{ml^2}{12}}$$

Зависит от положения оси вращения!

От массы Шар, цилиндр

Через центр фигуры



Шар

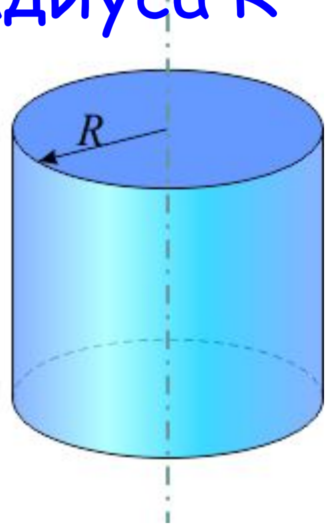
$$J = \frac{2}{5} mR^2$$

Сферическая оболочка

$$J = \frac{2}{3} mR^2$$

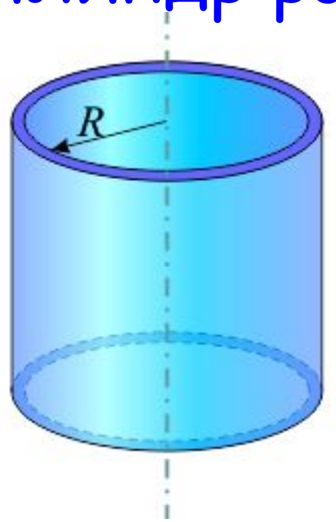
Совпадает с осью цилиндра

Сплошной цилиндр радиуса R



$$J = \frac{1}{2} mR^2$$

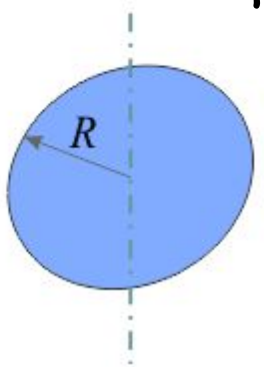
Полый тонкостенный цилиндр радиуса R



$$J = mR^2$$

Диск, теорема Штейнера

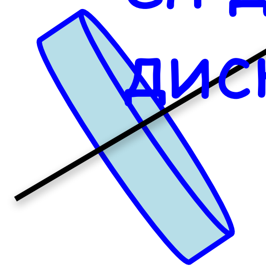
Тонкий диск радиуса R



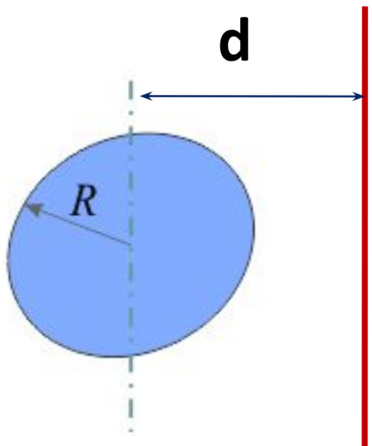
Совпадает с диаметром диска

$$J = \frac{1}{4} m R^2$$

Перпендикуляр
ен диаметру
диска



$$J = \frac{1}{2} m R^2$$

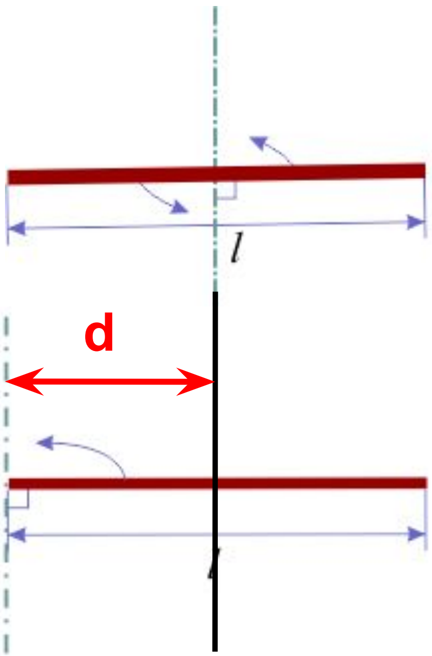


Теорема Штейнера

$$\boxed{J = J_C + m d^2}$$

Момент инерции относительно произвольной оси z равен моменту инерции относительно оси параллельной данной и проходящей через центр масс тела, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями

Тонкий стержень длиной R



Перпендикулярно стержню и проходит через его середину

$$J = \frac{ml^2}{12}$$

Новая ось // и проходит через его конец

$$J = \frac{ml^2}{12} + md^2$$

$$d = l/2$$

Полная кинетическая энергия тела равна сумме кинетической энергии его частиц

$$E_{кин} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \upsilon_i^2 \qquad \upsilon = \omega r$$

ω = const ⟹ $$E_{кин} = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

Если 2 движения – поступательное и вращательное

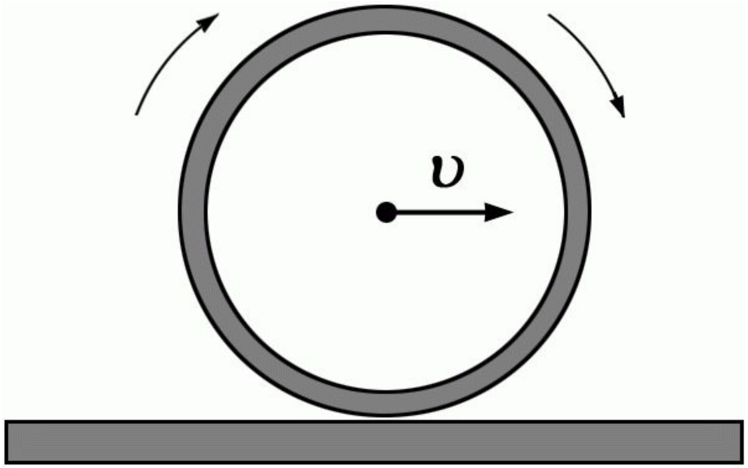
$$\boxed{E_{кин} = \frac{1}{2}\omega^2 J_C + \frac{1}{2} m v^2}$$

Кинетическая энергия представляет собой сумму кинетических энергий вращения тела относительно оси проходящей через центр масс, плюс кинетическая энергия поступательного движения центра масс.

Формулировка, пример

Тест 1.

Скорость центра масс колеса равна v, масса обруча *m*. Опр. $E_{кин}$ по горизонтальной поверхности? (массой диска принебречь)



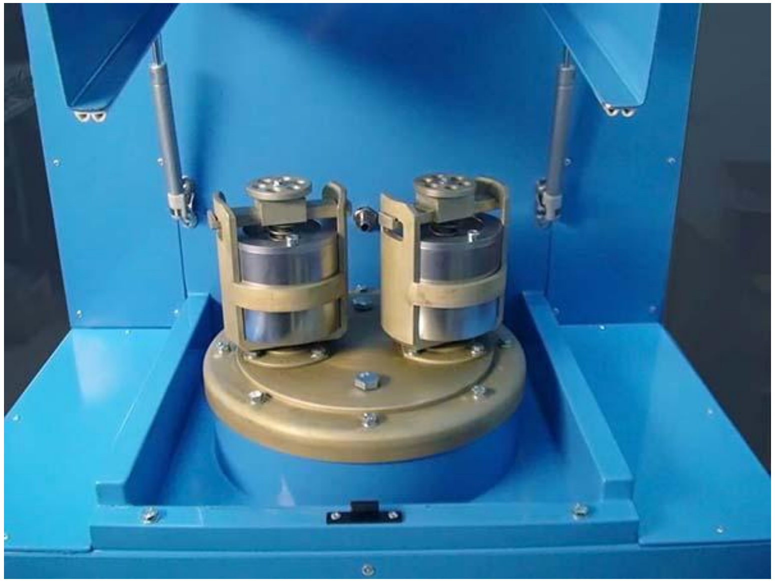
$$E_{кин} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

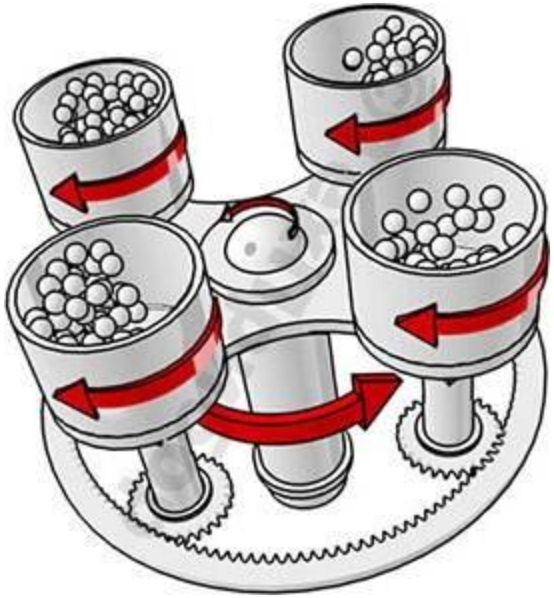
$$E_{кин} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{mR^2 \cdot \frac{\upsilon^2}{R^2}}{2}$$

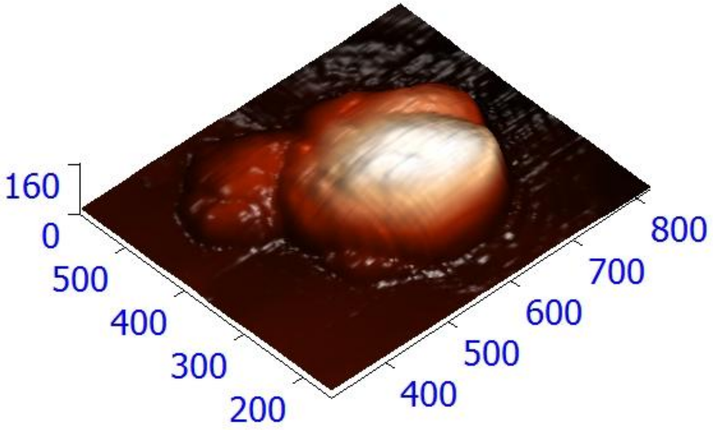
$$E_{кин} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = m\upsilon^2$$

Шаровая планетарная мельница

Шаровые планетарные мельницы



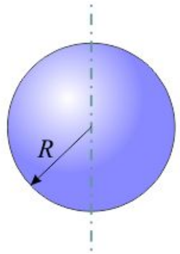




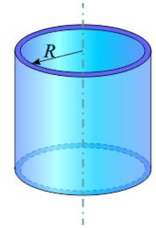
Частица глюконата кальция после 30 минут измельчения.

Скорость растворения увеличивается в 2000 раз!!

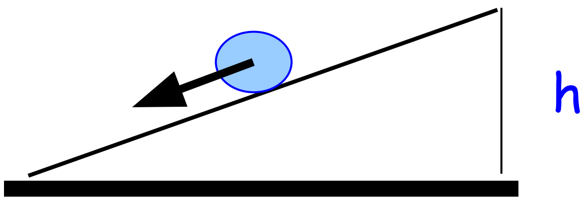
Маховик, задачка на шар и цилиндр



$$J = \frac{2}{5} m R^2$$



$$J = m R^2$$



$$mgh = \frac{1}{2}\omega^2 J_C + \frac{1}{2} m \upsilon^2$$

шар

$$mgh = \frac{\frac{2}{5} m R^2 \cdot \frac{\upsilon_ш{}^2}{R^2}}{2} + \frac{1}{2} m \upsilon_ш{}^2$$

цилиндр

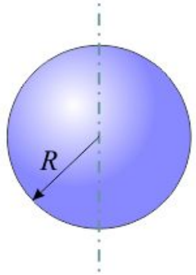
$$mgh = \frac{\frac{\upsilon_ц^2}{R^2} \cdot m R^2}{2} + \frac{1}{2} m \upsilon_ц{}^2$$

продолжение

$$0{,}7 m \upsilon_{ш}^{\ 2} = m \upsilon_{ц}^{\ 2}$$

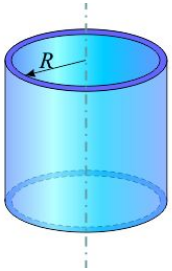
$$\boxed{\upsilon_{ш} = \frac{\upsilon_{ц}}{\sqrt{0{,}7}} \approx 1{,}19 \upsilon_{ц}}$$

$$\boxed{\upsilon_{ш} > \upsilon_{ц}}$$



$$J = \frac{2}{5} m R^2$$

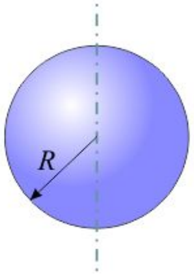
<



$$J = m R^2$$

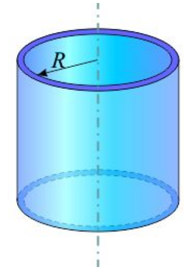
Меньше момент инерции → выше скорость!!!!

Опр. высоту



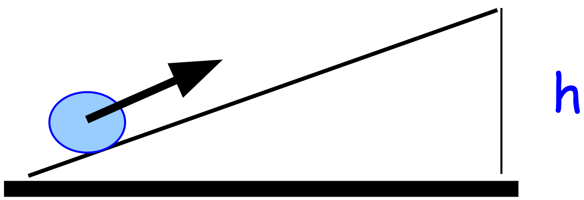
$$J = \frac{2}{5} mR^2$$

<



$$J = mR^2$$

$$\upsilon_{ш} = \upsilon_{ц}$$



$$mgh = \frac{1}{2}\omega^2 I_C + \frac{1}{2} m\upsilon^2$$

шар

$$mgh_{ш} = E_{кин} = \frac{7}{10} m\upsilon^2$$

$$\frac{h_{ш}}{h_{ц}} = \frac{7}{10}$$

$$\boxed{h_{ш} = 0{,}7 h_{ц}}$$

цилиндр

$$mgh_{ц} = E_{кин} = m\upsilon^2$$

Больше момент инерции
больше высота!!!!