Семинар 16. Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим основные методы интегрирования тригонометрических функций

1. В приложениях математического анализа важное значение имеют интегралы вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$

Рассмотрим различные значения параметров *m* и *n*

а) Если хотя бы одно из *m* или *n* нечетное (*m>0,n>0*), то интеграл вычисляется непосредственно.

б) Если оба показателя четные числа (*m>0,n>0*), то используются формулы двойного аргумента, понижающие степень, а именно

$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x; 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x; \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

С) Если *m<0* и *n<0* и сумма их четна, то применяется подстановка *t=tgx* или *t=ctgx.* Исходный интеграл сводится к сумме интегралов от степенных функций.

$$t = tgx; \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}; dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Д) Если *m<0* и *n<0*, то единица в числителе представляется как

$(\sin^2 x + \cos^2 x)^k$, где *2k=|m+n|-2*

Е) Если *m=0*, *n* – нечетное отрицательное или *n=0, m* – нечетное отрицательное, то используется универсальная подстановка

$$t = tg\frac{x}{2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Так как $\sin x = \dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$ и $\cos x = \dfrac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

2. Рассмотрим интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

При вычислении такого интеграла возможны различные случаи представления подынтегральной функции:

а) Функции *sinx, cosx* – только в четных степенях. Тогда можно использовать подстановку $t = tgx, \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}, \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}, dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$
Интеграл упрощается.

Замечание Такой же подстановкой вычисляется интеграл вида $\int R(tgx)dx$

Пример

$\int \dfrac{dx}{1+2tgx} = \int \dfrac{dt}{(1+t^2)(1+2t)} = \dfrac{1}{5}[x + 2\ln|\cos x + 2\sin x|] + c$ Это после разложения на простейшие дроби, вычисления интегралов от них и возврата к старой переменной.

б) Функция *R(sinx,cosx)* имеет вид $\dfrac{1}{a\cos x + b\sin x + c}$

В этом случае применяется универсальная подстановка

$$t = tg\frac{x}{2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Замечание Использование универсальной подстановки всегда приводит к цели, но в силу своей общности она часто не является наилучшей в смысле краткости и простоты необходимых преобразований.

3. В теории рядов Фурье, важное значение имеют интегралы

$$\int \sin mx \cdot \sin nx dx, \int \cos mx \cdot \cos nx dx, \int \sin mx \cdot \cos nx dx$$

Они вычисляются на основании формул тригонометрии:

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]; \cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)];$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y\_+\sin(x+y)]$$

Многократное интегрирование по частям при вычислении интегралов.

В приложениях математического анализа встречаются интегралы вида

$$\int x^m \sin xdx, \int x^m \cos xdx, \int x^m e^x dx, \int e^x \sin xdx, \int e^x \cos xdx, m > 0, m \in N$$

Вычисление таких интегралом требует многократного интегрирования по частям.

а) $\int x^2 \cos xdx = \{u = x^2; du = 2xdx; dv = \cos xdx; v = \sin x\} = x^2 \sin x - 2\int x \sin xdx$ =

$\{u = x; du = dx; dv = \sin x; v = -\cos x\} = x^2 \sin x - 2(-x\cos x + \int \cos xdx) = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$

b) $\int e^x \cos xdx = \{u = \cos x; du = -\sin x; dv = e^x dx; v = e^x\} = e^x \cos x + \int e^x \sin xdx$ =

$\{u = \sin x; du = dx; dv = e^x dx; v = e^x\} = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos xdx$, тогда получаем

<u>*Замечание*</u> Если принять вначале $\{u = e^x; dv = \cos xdx; ...\}$, то получим тождество

$$\int e^x \cos xdx = \int e^x \cos xdx$$

Примеры с решениями

1) $$\int \sin^3 x\cdot\cos^2 x dx = -\int (1-\cos^2 x)\cos^2 x d(\cos x) = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + c$$

2) $$\int \sin^2 x\cos^4 x dx = \int (\sin x\cos x)^2 \cos^2 x dx = \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 x(1+\cos 2x)dx =$$

$$\frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2x dx = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x dx +$$

$$\frac{1}{48}\sin^3 2x = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + c$$

3) $$\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x} = \int \frac{dt}{(1+t^2)\cdot\frac{t^3}{(1+t^2)^{3/2}}\cdot\frac{1}{(1+t^2)^{1/2}}} = \int \frac{1+t^2}{t^3}dt = -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + c = -\frac{1}{2tg^2 x} + \ln|tgx| + c$$

4) $$\int \frac{dx}{\sin^6 x} = \int \frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2}{\sin^6 x}dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} + 2\int \frac{ctg^2 x}{\sin^2 x}dx + \int \frac{ctg^4 x}{\sin^2 x}dx = -ctgx - \frac{2}{3}ctg^3 x - \frac{1}{5}ctg^5 x + c$$

5) $$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3} = \int \frac{(1+t^2)^2}{8t^3}dt = -\frac{1}{8t^2} + \frac{1}{2}\ln|t| + \frac{t^2}{8} + c = -\frac{1}{8tg^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \frac{tg^2\frac{x}{2}}{8} + c$$

6) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 3\cos^2 x} = \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(\frac{t^2}{1+t^2} - \frac{3}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{t^2-3} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right| + c = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{tgx-\sqrt{3}}{tgx+\sqrt{3}}\right| + c$$

7) $\int \frac{dx}{1+2tgx} = \int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)(1+2t)} = \frac{1}{5}[x + 2\ln|\cos x + 2\sin x|] + c$

Это после разложения на простейшие дроби, вычисления интегралов от них и возврата к старой переменной.

8) $\int \sin x \cdot \sin 5x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 4x - \cos 6x) dx = \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin 6x + c$

9) $\int x^2 \cos x dx = \left\{u = x^2; du = 2x dx; dv = \cos x dx; v = \sin x\right\} = x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx$

$\left\{u = x; du = dx; dv = \sin x; v = -\cos x\right\} = x^2 \sin x - 2(-x\cos x + \int \cos x dx) = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$

10) $\int e^x \cos x dx = \left\{u = \cos x; du = -\sin x; dv = e^x dx; v = e^x\right\} = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx$ =

$\left\{u = \sin x; du = dx; dv = e^x dx; v = e^x\right\} = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$

тогда получаем $2\int e^x \cos x dx = e^x(\cos x + \sin x) \Rightarrow \int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + c$

__Замечание__ Если принять вначале $\left\{u = e^x; dv = \cos x dx; ...\right\}$, то получим тождество

$\int e^x \cos x dx = \int e^x \cos x dx$

Примеры для самостоятельного решения

1) $\int x\sin^2 x dx$

2) $\int \sin^5 x\cdot\cos^5 x dx$

3) $\int \frac{dx}{\sin x\cos^4 x}$

4) $\int tg^5 x dx$

5) $\int \sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}dx$

6) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

7) $\int \frac{\sin^2 x dx}{1+\sin^2 x}$

8) $\int \frac{dx}{3+5tgx}$

9) $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$

10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$