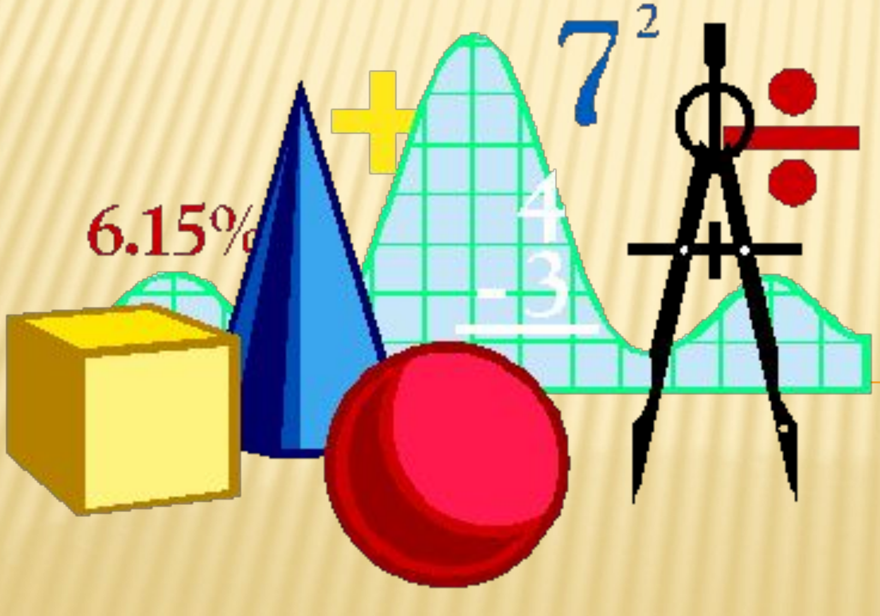
Нестандартные способы решения квадратных уравнений



Автор:

учащаяся 9 а класса

Руководитель работы:

Фирсова Дарья Евгеньевна

учитель математики

Человеку, изучающему алгебру, часто полезнее решить одну и ту же задачу тремя различными способами, чем решать три-четыре задачи. Решая одну задачу различными способами, можно путем сравнения выяснить, какой из них короче и эффективнее. Так вырабатывается опыт.

У.У. Сойер (английский математик XX века)

Цель работы

Изучить все существующие способы решения квадратного уравнения. Научиться использовать эти способы.

Задачи

- Понять, что называется квадратным уравнением.
- Узнать какие виды квадратных уравнений существуют.
- Найти информацию о способах решения квадратного уравнения и изучить её.

Актуальность темы: Изучением квадратных уравнений люди занимались еще с древних веков. Мне захотелось узнать историю развития квадратных уравнений.

В школьных учебниках дана не полная информация о квадратных уравнениях и способах их решения.

Объект: Квадратные уравнения.

Предмет: Способы решения данных уравнений.

Методы исследования: аналитический.

Гипотеза – если я при исследовании данной темы смогу реализовать постановленные мною цель и задачи, то соответственно выйду и на реализацию предпрофильной подготовки в области математического образования.

Методы исследования:

- Работа с учебной и научно-популярной литературой.
- Наблюдение, сравнение, анализ.
- Решение задач.

Ожидаемые результаты: В ходе изучения данной работы, я реально смогу оценить свой интеллектуальный потенциал и соответственно в будущем определиться с профилем обучения, создать проектный продукт по исследуемой теме в форме компьютерной презентации, изучение данного вопроса позволит мне компенсировать недостаточность в знаниях по обозначенной теме.

Считаю свою работу перспективной, так как в дальнейшем этим материалом могут воспользоваться и ученики, для повышения математической грамотности, и учителя на факультативных занятиях

История развития квадратных уравнений

Квадратные уравнения в Древнем Вавилоне

Необходимость решать уравнения не только первой, но и второй степени ещё в древности была вызвана потребностью решать задачи, связанные с нахождением площадей земельных участков и с земляными работами военного характера, а также с развитием астрономии и самой математики. Квадратные уравнения умели решать около 2000 лет до нашей эры вавилоняне. Применяя современную алгебраическую запись, можно сказать, что в их клинописных текстах встречаются, кроме неполных, и такие, например, полные квадратные уравнения:

$$x^2 + x = \frac{3}{4} \qquad x^2 - x = 14\frac{1}{2}$$

Правило решения этих уравнений, изложенное в вавилонских текстах, совпадает с современным, однако неизвестно, каким образом дошли вавилоняне до этого правила. Почти все найденные до сих пор клинописные тексты приводя только задачи с решениями, изложенными в виде рецептов, без указаний относительно того, каким образом они были найдены. Несмотря на высокий уровень развития алгебры в Вавилонии, в клинописных текстах отсутствуют понятие отрицательного числа и общие методы решения квадратных уравнений.

Как составлял и решал Диофант квадратные уравнения

УРАВНЕНИЕ:

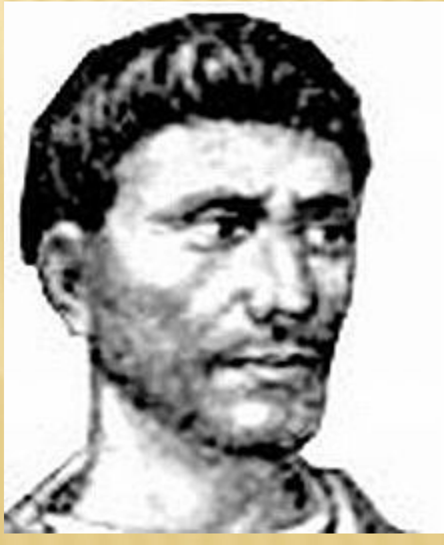
$$(10+X)(10-X)=96$$

или же:

$$100 - X^2 = 96$$

$$X^2 - 4 = 0 \quad (1)$$

«Найти два числа, зная, что их сумма равна 20, а произведение 96»
Диофант рассуждает следующим образом: из условия задачи вытекает, что искомые числа *не* равны, т.к. если бы они равны, то их произведение равнялось бы не 96, а 100. Таким образом, одно из них будет больше половины их суммы , т.е. ***10+X*** *,* другое же меньше, т.е. ***10-X***.
Разность между ними 2*X*



Отсюда ***X=2***. Одно из искомых чисел равно 12, другое 8. Решение ***X = -2*** для Диофанта не существует, так как греческая математика знала только положительные числа.

Квадратные уравнения в Индии

Задачи на квадратные уравнения встречаются и в астрономическом трактате «Ариабхаттиам», составленном в 499 г. индийским математиком и астрономом Ариабхаттой. Другой индийский ученый, Брахмагупта, изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой канонической форме: **$ax^2+bx=c$, $a>0$**

Одна из задач знаменитого индийского математика XII века Бхаскары

Обезьянок резвых стая
Всласть поевши, развлекалась.
Их в квадрате часть восьмая
На поляне забавлялась.
А двенадцать по лианам…
Стали прыгать повисая…
Сколько было обезьянок
Ты скажи мне, в этой стае?.

Соответствующее задачи уравнение:

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$$

Баскара пишет под видом:

$$x^2 - 64x = -768$$

Дополнил левую часть до квадрата,

$$x^2 - 64x + 32^2 = -768 + 1024,$$

$$(x-32)^2 = 256$$

$$x - 32 = \pm 16$$

$$x^1 = 16, \qquad x^2 = 48$$

Квадратные уравнения в Древней Азии

$$x^2 + 10x = 39$$

Вот как решал это уравнение среднеазиатский ученый ал-Хорезми:
Он писал : "Правило таково:
раздвои число корней, $x=2x\cdot 5$
получите в этой задаче пять, 5
умножь на это равное ему, будет двадцать пять, $5\cdot 5=25$
прибавь это к тридцати девяти, $25+39$
будет шестьдесят четыре, 64
извлеки из этого корень, будет восемь, 8
и вычти из этого половину числа корней, т.е.пять, $8-5$
останется 3
это будет корень квадрата , который ты искал."
А второй корень ? Второй корень не находили, так как
отрицательные числа не были известны.

Квадратные уравнения в Европе XIII-XVII вв.

Общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единому каноническому виду x2+вх+с=0 , было сформулировано в Европе лишь в 1544 **г. Штифелем.**

.

Формулы решения квадратных уравнений в Европе были впервые изложены в 1202 г. итальянским математиком **Леонардом Фибоначчи.**

Вывод формулы решения квадратного уравнения в общем виде имеется у Виета, однако Виет признавал только положительные корни. Лишь в 17 в. благодаря трудам **Декарта, Ньютона и других ученых** способ решения квадратных уравнений принимает современный вид

О теореме Виета

Теорема, выражающая связь между коэффициентами квадратного уравнения и его корнями, носящая имя Виета, была им сформулирована впервые в 1591 г. Следующим образом: «Если B+D, умноженное на A-A , равно BD, то A равно B и равно D».

Чтобы понять Виета, следует помнить, что A, как и всякая гласная буква , означало у него неизвестное (наше x), гласные же B,D- кэффициенты при неизвестном.

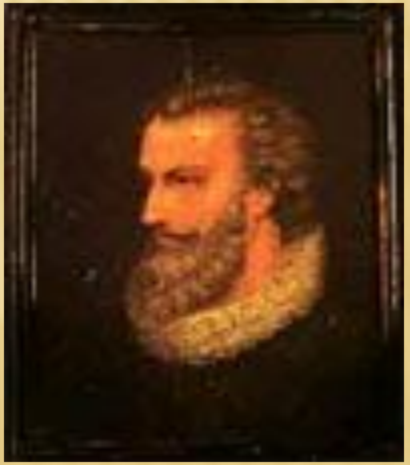
На языке современной алгебры вышеприведенная формулировка Виета означает:

Если приведенное квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет действительные корни, то их сумма равна $-p$, а произведение равно q, то есть

$x_1 + x_2 = -p$,

$x_1 x_2 = q$

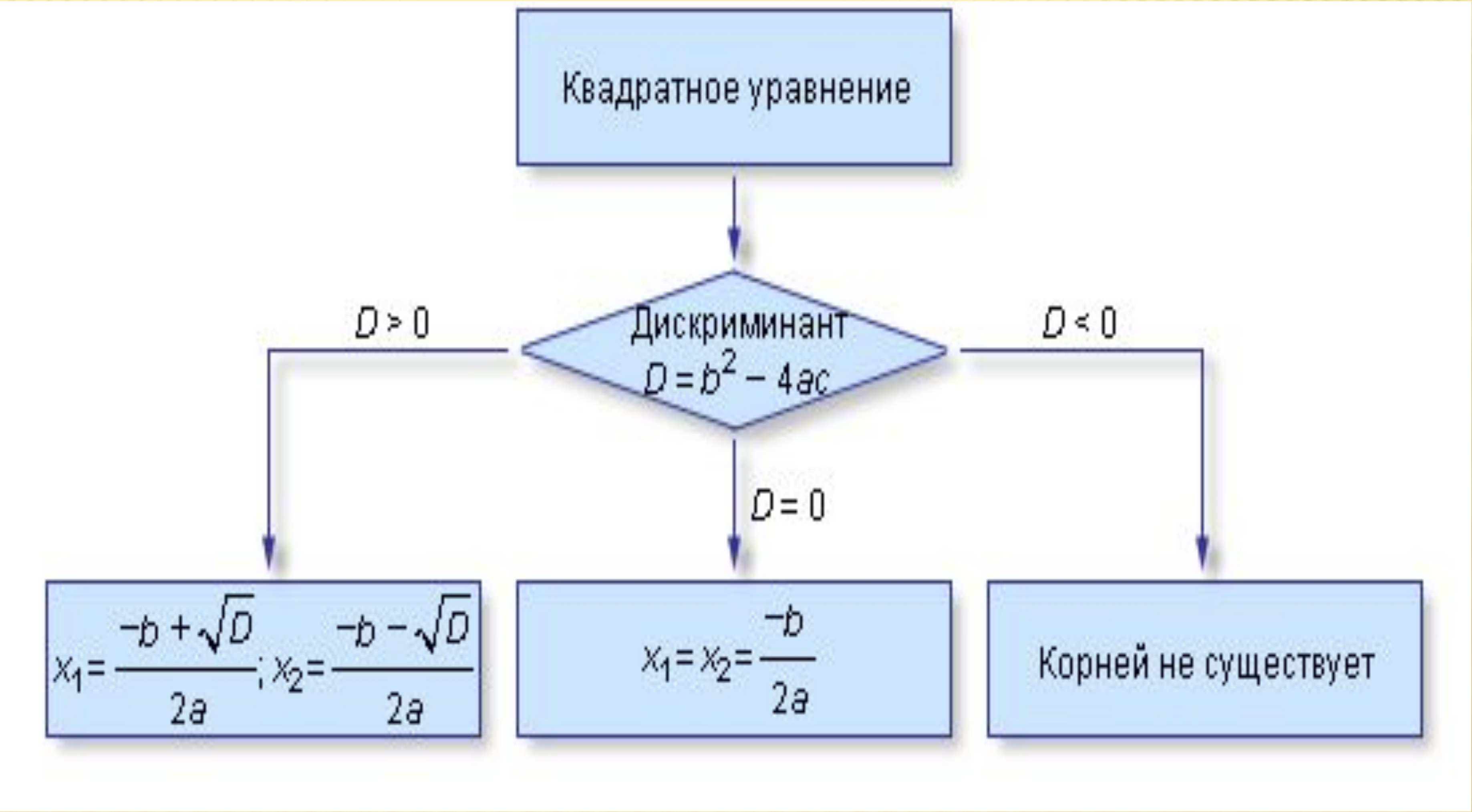
(сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену).



Десять способов решения квадратных уравнений

- Решение квадратных уравнений по формуле
- Разложение левой части уравнения на множители
- Теорема Виета
- Применение свойств коэффициентов квадратного уравнения
- Решение квадратных уравнений способом «переброски» старшего коэффициента
- Метод выделения полного квадрата
- Графический способ решения квадратных уравнений
- Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки
- Решение квадратных уравнений с помощью номограммы
- Геометрический способ решения квадратных уравнений

Решение квадратных уравнений по формуле



Метод разложения на множители

Цель: привести квадратное уравнение общего вида к виду:

$$A(x) \cdot B(x) = 0,$$

где A(x) и B(x) – многочлены относительно x.

Способы:

- Вынесение общего множителя за скобки;
- Использование формул сокращенного умножения;
- Способ группировки.

Пример: $x^2 + 10x - 24 = 0$

Разложим левую часть уравнения на множители:

$$x^2 + 10x - 24 = x^2 + 12x - 2x - 24 = x(x + 12) - 2(x + 12) =$$
$$= (x + 12)(x - 2);$$

$$(x + 12)(x - 2) = 0;$$

$x + 12 = 0$ или $x - 2 = 0;$

$x_1 = -12$ $\quad x_2 = 2;$

Числа – 12 и 2 являются корнями данного уравнения.

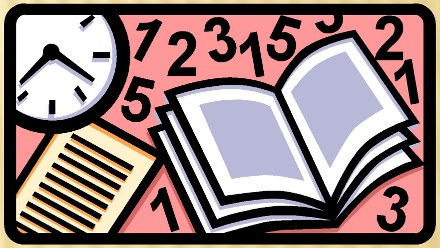
Ответ: $x_1 = -12;\ x_2 = 2.$

Решение уравнений с помощью теоремы Виета

если x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$

то $x_1 + x_2 = -p$ $(D \geq 0)$

$x_1 \cdot x_2 = q$



Например:

$X^2 + 3X – 10 = 0$

$X_1 \cdot X_2 = – 10$, значит корни имеют разные знаки

$X_1 + X_2 = – 3$, значит больший по модулю корень - отрицательный

Подбором находим корни: $X_1 = – 5$, $X_2 = 2$

Свойства коэффициентов квадратного уравнения

Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$

Если $\boldsymbol{a + b + c = 0}$ (т.е. сумма коэффициентов уравнения равна нулю), то $\boldsymbol{x_1 = 1,\ x_2 = c/a}$

Если $\boldsymbol{a - b + c = 0}$, или $\boldsymbol{b = a + c}$, то $\boldsymbol{x_1 = -1,\ x_2 = -c/a}$.

Пример:

$137x^2 + 20x - 157 = 0.$

$a = 137,\ b = 20,\ c = -157.$

$a + b + c = 137 + 20 - 157 = 0.$

$x_1 = 1,$ $x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-157}{137}$

Ответ $\frac{-157}{137}$

Решение уравнений способом «переброски»

Корни квадратных уравнений $ax^2 + bx + c = 0$ и $y^2 + by + ac = 0$ связаны соотношением: $x = y/a$.

Рассмотрим квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, *где* $a \neq 0$. Умножая обе его части на a, получаем уравнение $a^2x^2 + abx + ac = 0$. Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$; тогда приходим к уравнению $y^2 + by + ac = 0$, равносильного данному. Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы Виета. Окончательно получаем $x_1 = y_1/a$ и $x_2 = y_2/a$.

Решите уравнение: $2x^2 - 11x + 15 = 0$.

Перебросим коэффициент 2 к свободному члену

$y^2 - 11y + 30 = 0$. D>0, по теореме, обратной теореме Виета, получаем корни: 5;6, далее возвращаемся к корням исходного уравнения: 2,5; 3.

Метод выделения полного квадрата

$x^2 + 6x - 7 = 0$

Выделим в левой части полный квадрат. Для этого запишем выражение $x^2 + 6x$ в следующем виде:

$x^2 + 6x = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3$

В полученном выражении первое слагаемое – квадрат числа x, а второе – удвоенное произведение x на 3, поэтому чтобы получить полный квадрат, нужно прибавить 3^2, так как

$x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x + 3)^2$

Преобразуем теперь левую часть уравнения $x^2 + 6x - 7 = 0$, прибавляя к ней и вычитая 3^2, имеем:

$x^2 + 6x - 7 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 - 7 =$

$= (x + 3)^2 - 9 - 7 = (x + 3)^2 - 16$

Таким образом, данное уравнение можно записать так:

$(x + 3)^2 - 16 = 0$, т.е. $(x + 3)^2 = 16$.

Следовательно, $x + 3 - 4 = 0$ или $x + 3 + 4 = 0$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = -7$

Ответ: -7; 1.

Графический способ решения квадратного уравнения

Не используя формул квадратное уравнение можно решить графическим способом. Решим уравнение $x^2 - x - 1 = 0.$

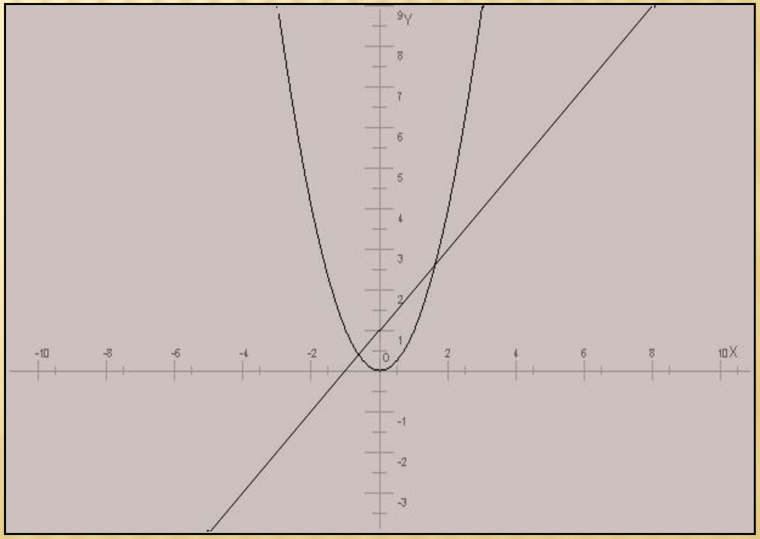
Для этого построим два графика:

1)y=x2
2)y=x+1

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	9	4	1	0	1	4	9

X	-1	0	1
Y	0	1	2

Абсциссы точек пересечения графиков и будет корнями уравнения.
Если графики пересекаются в двух точках, то уравнение имеет два корня.
Если графики пересекаются в одной точке, то уравнение имеет один корень.
Если графики не пересекаются, то уравнение корней не имеет.



Ответ: $x \approx -0.6; x \approx 2.6$

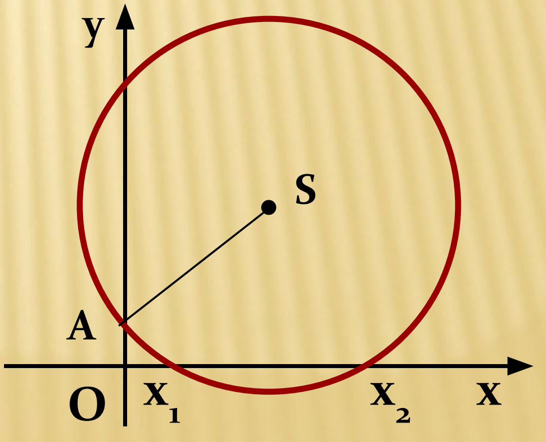
Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки

1. Выберем систему координат.

2. Построим точки **S (-b/2a; a+c/2a)** – центр окружности и ***A(0; 1)***.

3. Проведем окружность с радиусом ***SA***.

Абсциссы точек пересечения окружности с осью Ох являются ***корнями*** данного квадратного уравнения.



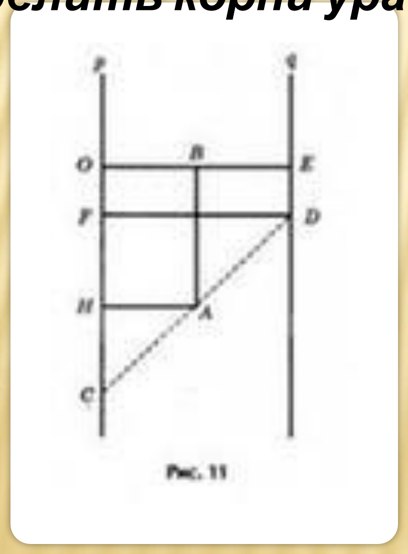
Решение квадратных уравнений с помощью номограммы

Это старый и незаслуженно забытый способ решения квадратных уравнений, помещенный на с.83 «Четырехзначные математические таблицы» Брадис В.М.

Таблица XXII. Номограмма для решения уравнения

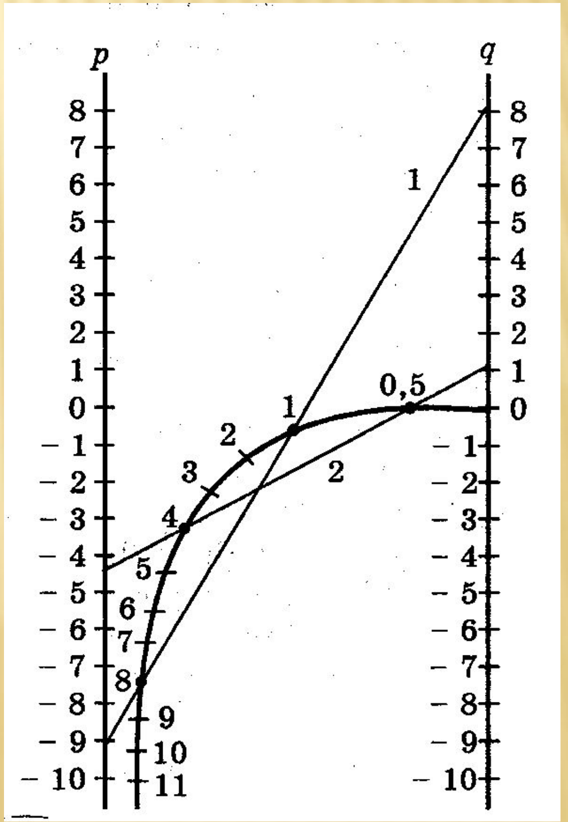
$$z^2 + pz + q = 0$$

Эта номограмма позволяет, не решая квадратного уравнения, по его коэффициентам определить корни уравнения.



Для уравнения $z^2 - 9z + 8 = 0$ ***номограмма дает корни***

$$Z_1=8.0 \text{ и } Z_2=1.0$$



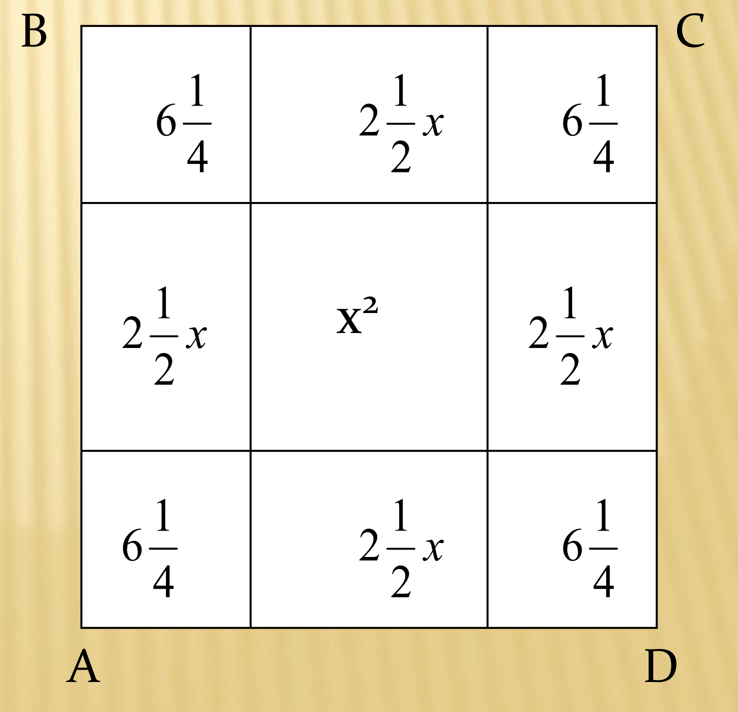
Геометрический способ решения квадратных уравнений

Пример, ставший знаменитым, из «Алгебры» ал - Хорезми: $x^2 + 10x = 39$. В оригинале эта задача формулируется следующим образом: «Квадрат и десять корней равны 39».

$S = x^2 + 10x + 25$ $(x^2 + 10x = 39)$

$S = 39 + 25 = 64$, откуда следует, что сторона квадрата $ABCD$, т.е. отрезок $AB = 8$.

$x = 8 - 2{,}5 - 2{,}5 = 3$



На основании опроса установлено, что:

- Наиболее сложными оказались следующие способы:

  - разложение левой части уравнения на множители,

  - метод выделения полного квадрата.

- Рациональные методы решения:

  - решение квадратных уравнений по формуле;

  - решение уравнений с использованием теоремы Виета

- Практического применения не имеет

  - геометрический способ решения квадратных уравнений.

- Никогда раньше не слышали о способах:

  - применение свойств коэффициентов квадратного уравнения;

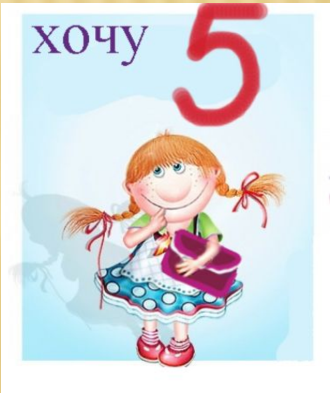
  - с помощью номограммы;

  - решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки;

  - способ «переброски» (этот способ вызвал интерес у учеников).

Заключение

- данные приёмы решения заслуживают внимания, поскольку они не все отражены в школьных учебниках математики;
- овладение данными приёмами поможет учащимся экономить время и эффективно решать уравнения;
- потребность в быстром решении обусловлена примененением тестовой системы вступительных экзаменов;



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!