Кармокова Марина Исмаиловна

учителя математики высшей квалификационной категории МКОУ СОШ № 2 г.п.Нарткала

2016 г.

Тема: Методы решения тригонометрических уравнений

- **Метод решения хорош, если с самого начала мы можем предвидеть - и впоследствии подтвердить это - что, следуя этому методу, мы достигнем цели.**

/ Лейбниц/

Цели:

- Систематизировать, обобщить, расширить знания и умения учащихся, связанные с применением методов решения тригонометрических уравнений.
- Содействовать развитию математического мышления учащихся.
- Побуждать учащихся к преодолению трудностей в процессе умственной деятельности.

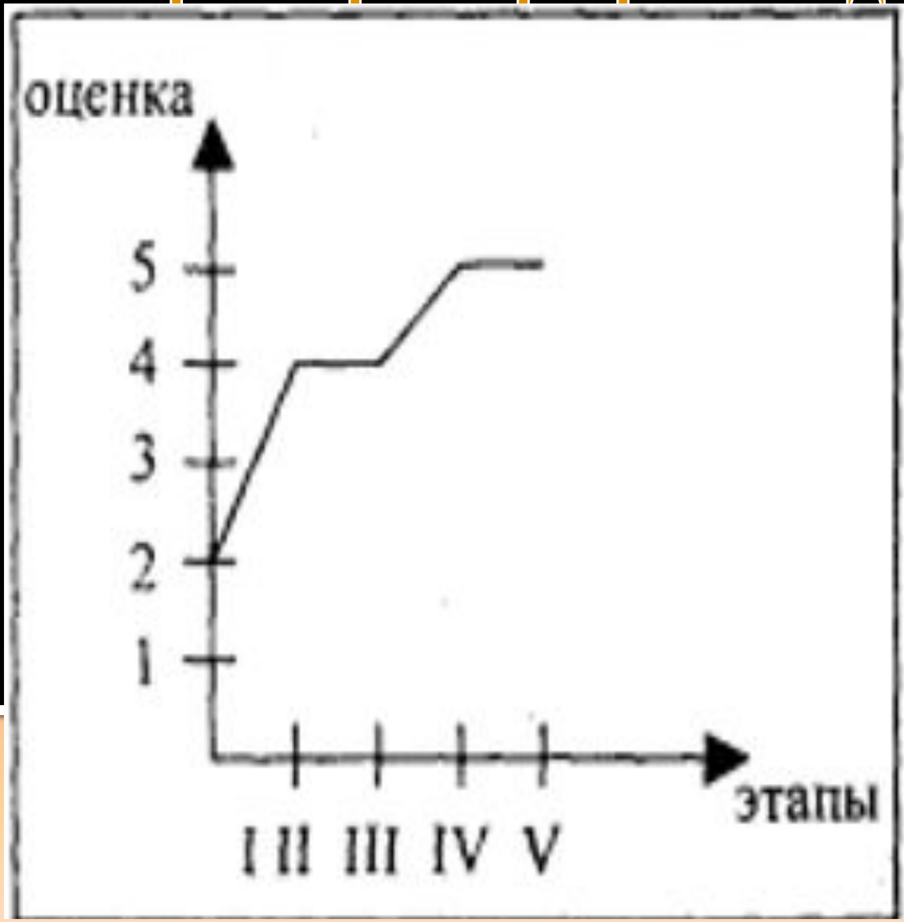
Оборудование:

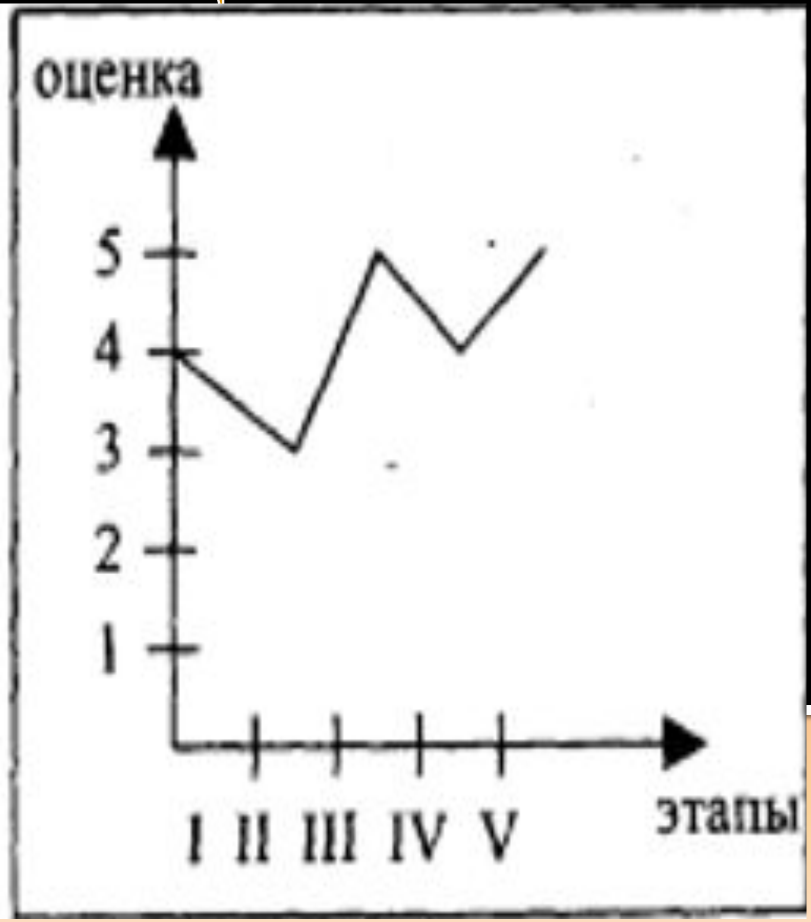
- Экран или интерактивная доска, компьютер, проектор.
- На партах учащихся: таблица со списком уравнений, карточки с заданием теста, копировальная бумага.

Самооценка:

- Для самоанализа своей деятельности на уроке ученики строят график. На вертикальной оси отмечают самооценку от 1 до 5, а на горизонтальной оси отмечают этапы урока.

Примеры графиков для самооценки





Выполнил: Иванов _______ Выполнил:Петров _________

Ход урока:

- Вводная беседа.
- Методы решения.
- Тест (с взаимоконтролем).
- Различные способы решения уравнений.
- Индивидуальная работа с учениками, кто допустил ошибки.
- Домашняя работа.

Вводная беседа:

- -Сегодня рассмотрим методы решения тригонометрических уравнений. Знаем, что правильно выбранный метод часто позволяет существенно упростить решение, поэтому все изученные методы всегда нужно держать в зоне своего внимания, чтобы решать конкретные задачи наиболее подходящим методом.

Этап I (5 мин)

- Провести классификацию тригонометрических уравнений по методам решений. (Таблицы на партах у всех). Рядом с каждым уравнением 1-12 указать номер метода, которым можно решить данное уравнение наиболее рациональным способом.
- Обсуждение проводится в быстром темпе.
- Выясняем в каком примере применяется наибольшее количество методов можно применить. (12 примере).
- Отметим, что первые три методов являются традиционными для решения тригонометрических уравнений. Также отмечаем, что последний метод рассматривается достаточно редко. Поэтому остановимся на этом методе особо.

Этап I.(5 мин) Классификация уравнений по методам решения.

№ п/п	Уравнения	№ метода	Методы
1	2	3	4
1	$\sin\frac{x}{3} - \cos 6x = 2$	4(б)	1. Разложение на множители. 2. Введение новой переменной: а) сведение к квадратному;
2	$\frac{\lvert 1-\cos x\rvert}{1-\cos x}\cdot\sin x = 4\sin^2 x\cdot\cos x$	1	
1	2	3	4
3	$\sqrt{3}\sin x - \frac{\lvert 1+\cos x\rvert}{1+\cos x}\cdot\sin^2 x = \sin^2 x$	1	б) универсальная подстановка; в) введение вспомогательного аргумента. 3. Сведение к однородному уравнению. 4. Использование свойств функций, входящих в уравнение: а) обращение к условию равенства тригонометрических функций; б) использование свойства ограниченности функции
4	$5\sin x - 2\cos x = 1$	3, 2 (б, в)	
5	$\sin 3x\cdot\cos 2x = 1$	4 (б)	
6	$\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$	1, 2 (б, в), 3	
7	$1 - \sin 2x = \cos x - \sin x$	1, 2 (б, в), 3	
8	$\cos 3x = \sin x$	4 (а)	
9	$4 - \cos^2 x = 4\sin x$	2 (а)	
10	$\sin 3x - \sin 5x = 0$	4 (б)	
11	$\mathrm{tg}\,3x\cdot\mathrm{tg}\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$	4 (а)	
12	$2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} - \cos x = 2$	1, 2 (а, б, в), 3, 4 (а)	

Этап II (10 мин)

Метод использования свойств ограниченности функции.

!

Суть этого метода заключается в следующем: если функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что для всех x выполняются неравенства $f(x) \le a$ и $g(x) \le в$, и дано уравнение $f(x) + g(x) = a + в$, то оно равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = a \\ g(x) = d \end{cases}$$

Решение уравнений № 1 из таблицы.

Уравнение № 1. $\sin\frac{x}{3} - \cos 6x = 2.$

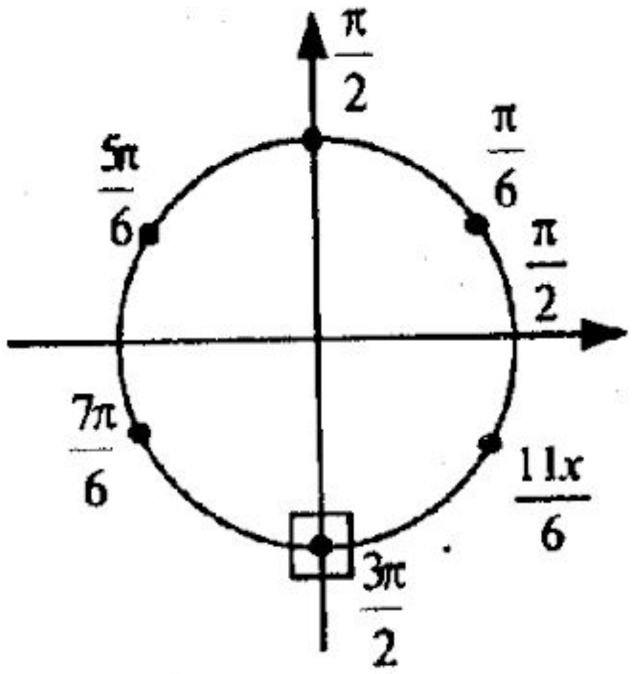
Решение. Поскольку $\left|\sin\frac{x}{3}\right| \le 1$ и $\left|\cos 6x\right| \le 1$,

имеем систему:

$$\begin{cases} \sin\frac{x}{3} = 1 \\ \cos 6x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \\ 6x = \pi + 2\pi n, n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} + 6\pi k, k \in Z \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z \end{cases}$$

– Покажем общее решение на тригонометрической окружности.

Общее решение:



Ответ: $\dfrac{3\pi}{2}+6\pi\ell, \ell \in Z$.

Суть метода использования одноименных тригонометрических уравнений

$\sin f(x)=\sin\varphi(x)$	$\cos f(x)=\cos\varphi(x)$	$tg f(x)=tg\varphi(x)$
$\left[\begin{array}{l} f(x)=\varphi(x)+2\pi k \\ f(x)=\pi-\varphi(x)+2\pi n \end{array}\right.$	$\left[\begin{array}{l} f(x)=\varphi(x)+2\pi k \\ f(x)=-\varphi(x)+2\pi n \end{array}\right.$	$\begin{cases} f(x)=\varphi(x)+\pi n \\ \varphi(x)\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi l \end{cases}$
$n\in Z, k\in Z$	$n\in Z, k\in Z$	$n\in Z, \ell\in Z$

Примеры :

- Трое учеников решают уравнение
- № 10. 8, 11.
- Остальные решают любой из этих номеров.

Пример № 10

Уравнение № 10. $\sin 3x - \sin 5x = 0$.

Решение. На основании условий равенства двух синусов имеем:

$$\left[\begin{array}{l} 5x = 3x + 2\pi k, k \in Z \\ 5x = \pi - 3x + 2\pi n, n \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 2\pi k, k \in Z \\ 8x = (2n+1)\pi, n \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k, k \in Z \\ x = (2n+1)\dfrac{\pi}{8}, \end{array}\right.$$

$n \in Z$

Ответ: $x = \pi k, k \in Z; x = (2n+1)\dfrac{\pi}{8}, n \in Z$.

Пример № 8

Уравнение № 8. $\cos 3x = \sin x$.

Решение. $\cos 3x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$. Воспользуемся равенством косинусов двух углов, имеем:

$$\left[\begin{array}{l} 3x - (\frac{\pi}{2} - x) = 2\pi n, n \in Z \\ 3x + (\frac{\pi}{2} - x) = 2\pi k, k \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = (4n+1)\frac{\pi}{2}, n \in Z \\ 2x = (4k-1)\frac{\pi}{2}, k \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = (4n+1)\frac{\pi}{8}, \\ n \in Z \\ x = (4k-1)\frac{\pi}{4}, \\ k \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = (4n+1)\frac{\pi}{8}, n \in Z; x = (4k-1)\frac{\pi}{4}, k \in Z$.

Пример № 11

Уравнение № 11. $\operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = 1.$

Решение. Делим обе части уравнения на $\operatorname{tg} 3x$. Это допустимо, т. к. в данных условиях $\operatorname{tg} 3x$ не может равняться нулю:

$$tg\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{tg3x},\ tg\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)=ctg3x,\ tg\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)=tg\left(\frac{\pi}{2}-3x\right).$$

На основании условия равенства тангенсов двух углов имеем:

$$5x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}+3x=\pi n;$$

$$8x=\frac{\pi}{6}+\pi n;\ x=(6n+1)\frac{\pi}{48}, n\in Z.$$

При каждом значении x из этой совокупности каждая из частей уравнения $\operatorname{tg}\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$ существует.

Ответ: $(6n+1)\frac{\pi}{48}, n\in Z.$

Этап III (5 мин)

- Систематизируем решения уравнения вида $a\sin x+в\cos x=c\,(авс\neq 0)$ методом сведения данного уравнения к однородному уравнению. Выясняем преимущества данного метода над основанными способами решения этого уравнения (введение вспомогательного угла, применение формул универсальной подстановки). Отмечаем. Что он, так же как и метод рационализации, применяется в физике при сложении гармонического колебаний.

Знания учащихся проверяются тестом с последующим взаимоконтролем.

На магнитной доске ученик составляет системно-обобщающую таблицу, раскрывающую идею решения уравнения вида

$$a\sin x+в\cos x=c\,(авс\neq 0)$$

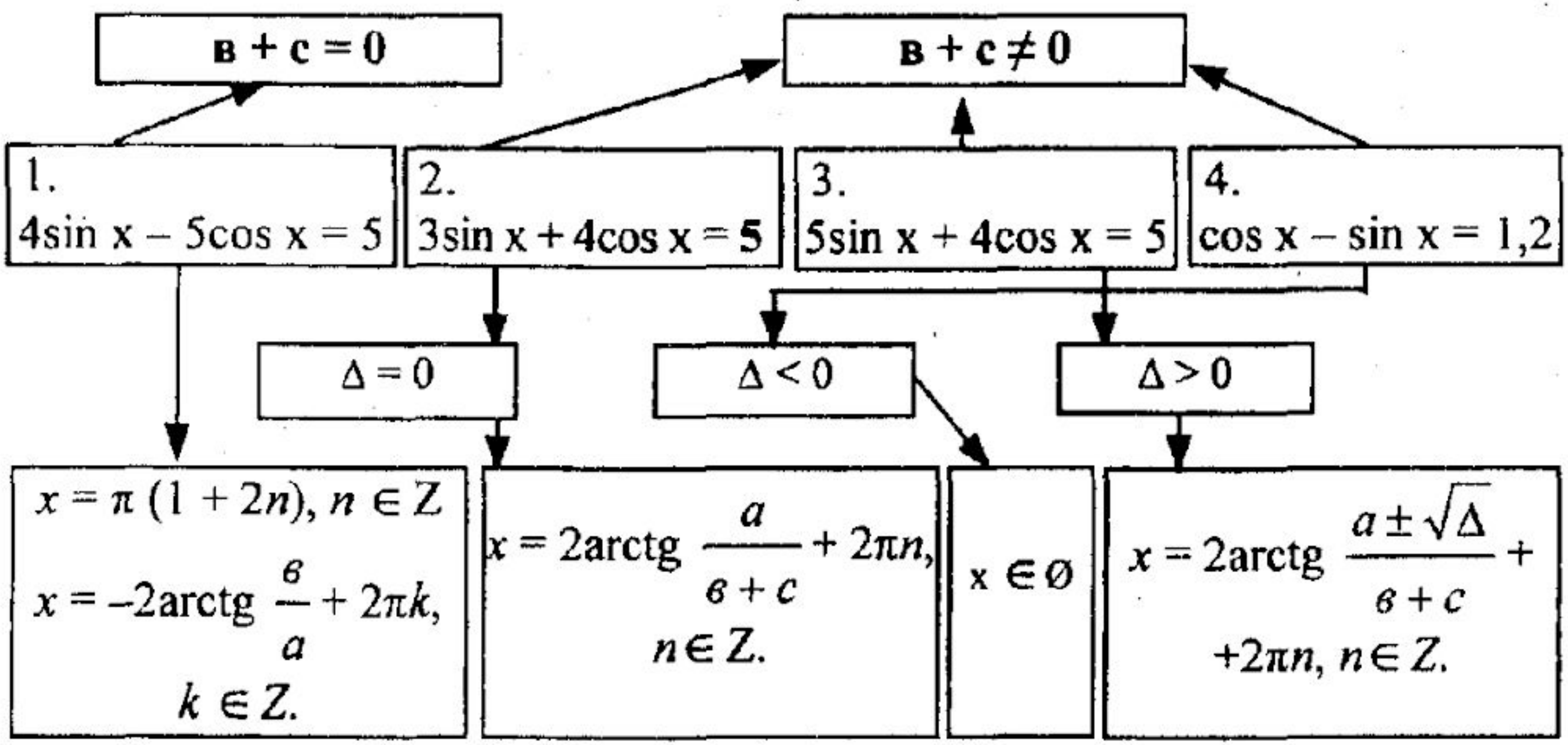
из заранее приготовленных карточек.

Системно-обобщающая таблица

Условия на коэффициенты		№ уравнения		Решения
	$\Delta > 0$	3	6	$x = 2\text{arctg}\,\frac{a \pm \sqrt{\Delta}}{в + c} + 2\pi n,\ n \in Z$
$в + c \neq 0$	$\Delta = 0$	2	5	$x = 2\text{arctg}\,\frac{a}{в + c} + 2\pi n,\ n \in Z$
	$\Delta < 0$	4	7	$x \in \varnothing$
$в + c = 0$		1	8	$x = \pi(1 + 2\pi),\ n \in Z$ $x = -2\text{arctg}\,\frac{в}{a} + 2\pi k,\ k \in Z$

Тест (с взаимоконтролем)
Вариант 1

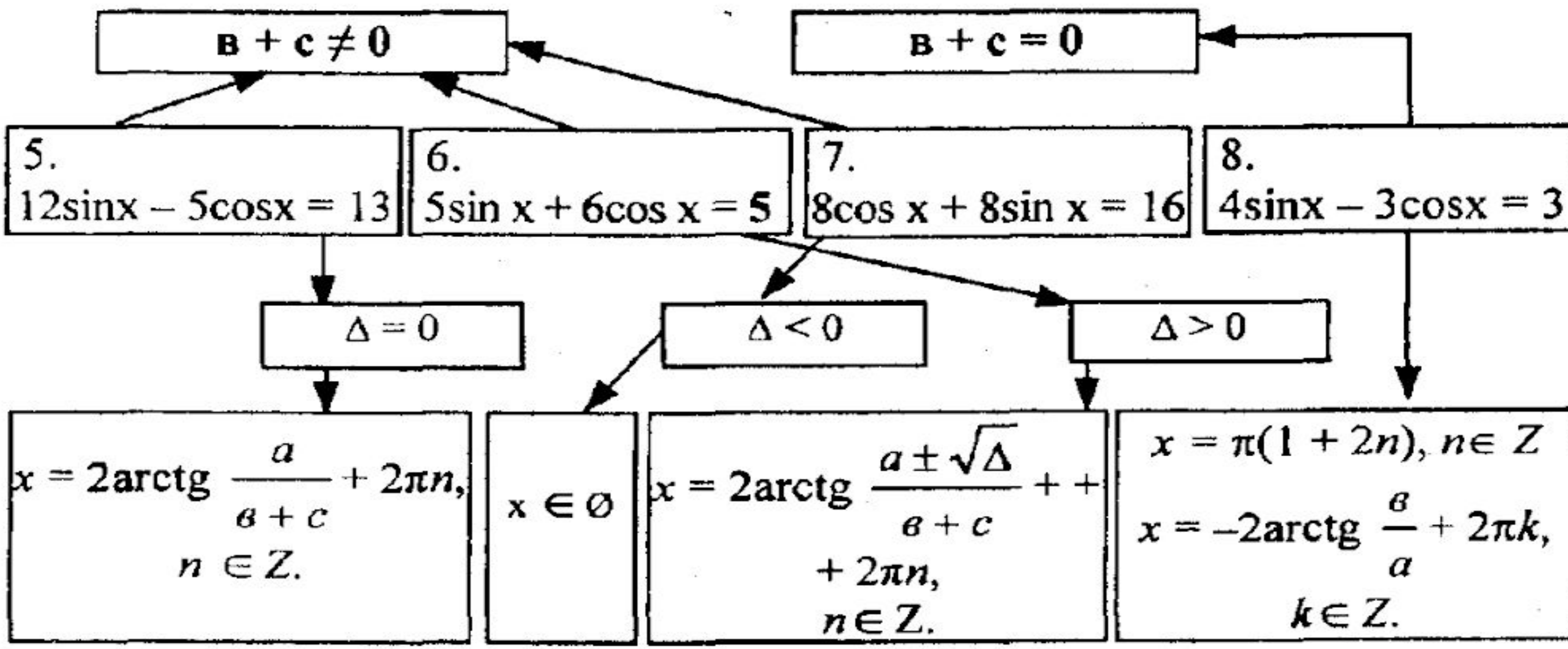
Раскройте идею решения уравнения вида $a \sin x + в \cos x = c$ ($авс \neq 0$), показав стрелками зависимость решений от условий, наложенных на коэффициенты.



Выполнил:____________ Оценка:____________

Вариант 2

Раскройте идею решения уравнения вида $a \sin x + в \cos x = c$ ($aвc \neq 0$), показав стрелками зависимость решений от условий, наложенных на коэффициенты.



Выполнил:______________ Оценка:______________

Этап III (13 мин)

- Отмечаем, что в уравнении $a\sin x + в\cos x = c$

а.в и с – любые действительные числа.

Если а=в=0, а сне равно 0, то уравнение теряет смысл.

Если а=в=с=0, то х- любое действительное число, т.е. уравнение обращается в тождество.

Уравнение $a\sin x + в\cos x = 1$

Можно решить, шестью способами.

На доске 5-6 учеников показывают различные способы решения этого уравнения. Проводим сравнительный анализ и комментарии решений.

Способ 1. Сведения к однородному уравнению.

– Выразим $\sin x$, $\cos x$ и 1 через функции половинного аргумента:

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2},$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}=0 \;\Big|\; : 2\cos^2\frac{x}{2}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=0,$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=0.$$

Если $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0$, то $\frac{x}{2}=\pi n, n\in Z$; $x=2\pi n, n\in Z$.

Если $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1$, то $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$; $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$.

Ответ: $x=2\pi n$, $n\in Z$; $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$.

Способ 2. Преобразование суммы в произведение.

– Выразим $\cos x$ через $\sin(\frac{\pi}{2} - x)$. Получим $\sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x) = 1$,

$$2\sin\frac{x+\frac{\pi}{2}-x}{2}\cdot\cos\frac{x-\frac{\pi}{2}+x}{2} = 1,\ 2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

$$\sqrt{2}\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 1,\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ x-\frac{\pi}{4} = \pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} +$$

$$+ 2\pi n,\ n\in Z,\ x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n\in Z.$$

Ответ: $x = 2\pi n,\ n \in Z;\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Способ 3. Введение вспомогательного угла.

– Разделим обе части уравнения на $\sqrt{2}$:

$\sin x + \cos x = 1 \mid : \sqrt{2}$. $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n$, $n \in Z$, $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

Способ 4. Введение выражений

формулам $\sin\alpha = \dfrac{2tg\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}, \cos\alpha = \dfrac{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$. (1)

Обращение к функции $tg\dfrac{x}{2}$ предполагает, что $\cos\dfrac{x}{2}\neq 0$, т. е.

$x \neq \pi + 2\pi n,\ n\in Z$.

Пояснение:

!

Такой способ решения получил название – **метод рационализации**, т. к. вспомогательное неизвестное вводится так, чтобы после подстановки получилось рациональное уравнение относительно этого вспомогательного неизвестного.

Уравнение примет вид : (по формуле 1) :

$$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}+\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=1,\ 2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}=1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2},$$

$$2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}-2\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}=0\ \Big|:2.\ \ \mathrm{tg}\frac{x}{2}\left(1-\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)=0,$$

$\mathrm{tg}\frac{x}{2}=0$ или $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=1$.

Если $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=0$, то $\frac{x}{2}=\pi n\ n\in Z$ и тогда $x=2\pi n,\ n\in Z$.

Если $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=1$, то $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$, или $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$.

Ответ: $x=2\pi n,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ n\ k\in Z$.

Способ 5 . Введение выражении

Способ 5. Замена $\cos x$ выражением $\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$:

$\sin \pm \sqrt{1-\sin^2 x} = 1,$

$\pm\sqrt{1-\sin^2 x} = 1 - \sin x,$

$1- \sin^2 x = (1-\sin x)^2,$

$(1-\sin x)(1+\sin x)-(1-\sin x)^2 = 0,$

$(1-\sin x)(1+\sin x - 1 + \sin x) = 0,$

$2(1-\sin x)\sin x = 0,$

$\sin x = 1$ или $\sin x = 0.$

Если $\sin x = 1$, то $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Если $\sin x = 0$, то $x = \pi k, k \in Z$.

Из серии $x = \pi k$ решением является только $x = 2\pi k$.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = 2\pi k$, n, $k \in Z$.

Способ 6. Применение формулы

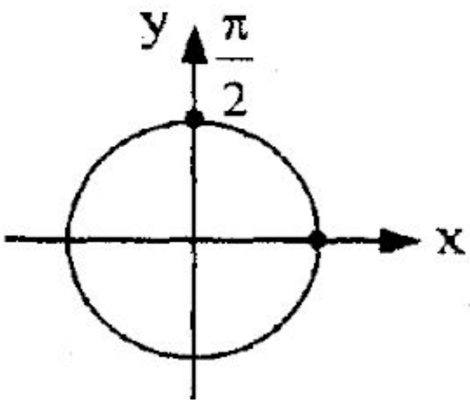
Способ 6. Применение формулы $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Исходное уравнение примет вид:

$$\sqrt{2}\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \ \Big|: \sqrt{2}.$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + \pi n,\ n \in Z.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$



– Все решения показываем на тригонометрическом круге цветными точками, отмечаем их совпадение.

Далее уравнение № 12 (из таблицы)

Решение. Подставим в исходное уравнение $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ вместо $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, получим $\frac{2(1-\cos x)}{\sin x} - \cos x = 2$, ОДЗ: $x \neq \pi\,(2n+1),\ n \in Z$.

$2 - 2\,(\sin x + \cos x) - \sin x \cos x = 0.$ (2)

Пусть $\sin x + \cos x = y$, тогда имеем $1 + 2\cos x \sin x = y^2$,

$\cos x \sin x = \frac{y^2 - 1}{2}$.

Уравнение (2) примет вид

$$2 - 2y - \frac{y^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow y^2 - 4y - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -5, \\ y = 1. \end{array}\right.$$

– Вернемся к исходным переменным:

1) $\sin x + \cos x = -5 \Rightarrow x \in \varnothing$.

2) $\sin x + \cos x = 1$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + (4n-1)\frac{\pi}{4},\ n \in Z$.

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + (4n-1)\frac{\pi}{4},\ n \in Z$.

Этап V (10 мин)

- Урок завершает самостоятельная работа (под копировальную бумагу).
- Учащимся предлагается решить уравнения из таблицы.
- Вариант I - № 6; № 2.
- Вариант II- №7; № 3.
- Учитель собирает копии решений.
- Учащиеся осуществляют самопроверку по готовым решениям на доске с помощью проектора, получают разъяснения по возникающим при этом вопросам.
- В дальнейшем проводится индивидуальная работа с учениками, кто пропустил ошибки.

Вариант I Задание 1.

№ 6.

$$\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x) \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \sqrt{2}\ (\cos x - \sin x)$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow$$

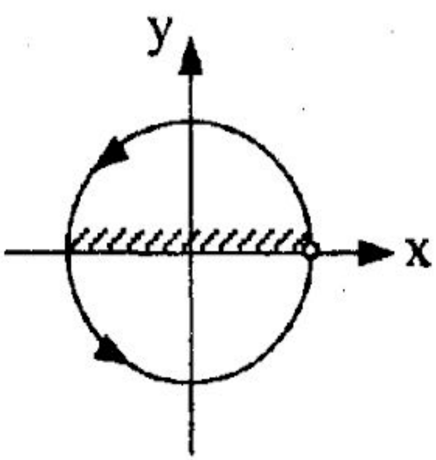
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = 1 \\ \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = (4n+1)\frac{\pi}{4}, n \in Z \\ x = (8k+1)\frac{\pi}{4}, k \in Z \end{array}\right.$$

Ответ: $x = (4n+1)\frac{\pi}{4},\ x = (8k+1)\frac{\pi}{4}, n, k \in Z.$

Задание 2.

№ 2*. $\dfrac{|1-\cos x|}{1-\cos x}\cdot\sin x = 4\sin^2 x\cos x.$

Решение. $\cos x < 1$, $\sin x = 4\sin^2 x\cos x \Leftrightarrow \sin x(4\sin x\cos x - 1) = 0$, тогда



$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ 2\sin 2x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = (2m+1)\pi, m\in Z\\ x = (-1)^n\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{2},\end{array}\right.$$

$m, n \in Z$

Ответ: $x = (2m+1)\pi$, $x = (-1)^n\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{2}$, $m, n \in Z$.

Вариант II Задание 1.

№ 7.

$1-\sin 2x=\cos x-\sin x \Leftrightarrow \sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x=\cos x-\sin x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)^2-(\cos x-\sin x)=0 \Leftrightarrow (\cos x-\sin x)(\cos x-$

$-\sin x-1)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x-\sin x=0\\ \cos x-\sin x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=(4n+1)\dfrac{\pi}{4}, n\in Z\\ x=\pm\dfrac{\pi}{4}+(8k-1)\dfrac{\pi}{4}, k\in Z.\end{array}\right.$$

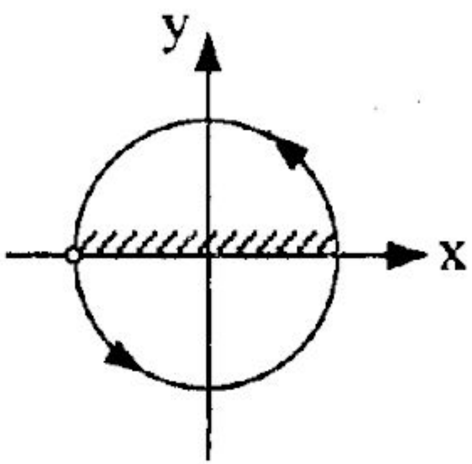
Ответ: $x=(4n+1)\frac{\pi}{4},\ x=\pm\frac{\pi}{4}+(8k-1)\frac{\pi}{4}, n, k\in Z.$

Задание 2.

№ 3*. $\sqrt{3}\sin x - \dfrac{|1+\cos x|}{1+\cos x}\cdot\sin^2 x = \sin^2 x.$

Решение. $\cos x > -1$, $\sqrt{3}\sin x - 2\sin^2 x = 0$, $\sin x(\sqrt{3} - 2\sin x) = 0.$

Полученное уравнение равносильно совокупности:



$$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 2\pi k, k\in Z\\ x = (-1)^n\dfrac{\pi}{3} + \pi n, n\in Z.\end{array}\right.$$

Ответ: $x = 2\pi k$, $x = (-1)^n\dfrac{\pi}{3} + \pi n$,

$n, k \in Z$.

Итоги урока: (2 мин).

- Проверка графика предложенного в начале урока для самооценки .
- Домашнее задание: решить уравнения из таблицы: № 4(несколькими способами), № 5, № 9.
- Дополнительно: решить уравнение

$$\cos^{2002} x + \sin^{2003} x = 1.$$