

Список литературы

по дисциплине «Сложные сигналы в радиотехнических системах»

1. Варакин Д.Е. Теория сложных сигналов. – М.: Советское радио, 1970. – 376 с.
2. Варакин Д.Е. Системы связи с шумоподобными сигналами.– М.: Радио и связь, 1985.– 384 с.
3. Кук Ч., Бернфельд М. Радиолокационные сигналы.– М.: Сов. радио, 1971.– 368 с.
4. Вакман Д.Е. Сложные сигналы и принцип неопределенности в радиолокации М.: Советское радио, 1965. – 304 с.

Дополнительная литература

1. Вакман Д.Е., Седлецкий Р.М. Вопросы синтеза радиолокационных сигналов. – М.: Сов. радио, 1973.– 312 с.
2. Свистов В.М. Радиолокационные сигналы и их обработка.– М.: Сов. радио, 1977.– 448 с.
3. Радиотехнические системы / под ред. Ю. М. Казаринова. — М.: Высшая школа, 1990.– 496 с.
4. Лёзин Ю.С. Введение в теорию и технику радиотехнических систем.– М.: Радио и связь, 1986. – 280 с.
5. Ширман Я.Д. Теоретические основы радиолокации.– М.:Сов. радио, 1970.– 560 с.
6. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования/под ред. А.И. Перова, В. Н. Харисова. – М.: Радиотехника, 2010. – 800 с.
7. Прокис Дж. Цифровая связь / пер. с англ., под ред. Д.Д. Кловского. – М.: Радио и связь. 2000. – 800 с.

Простые и сложные сигналы

База сигнала B - произведение эффективной ширины Δf_9 спектра сигнала на длительность T_c сигнала .

Для простых сигналов $B = \Delta f_9 T_c = 1$;

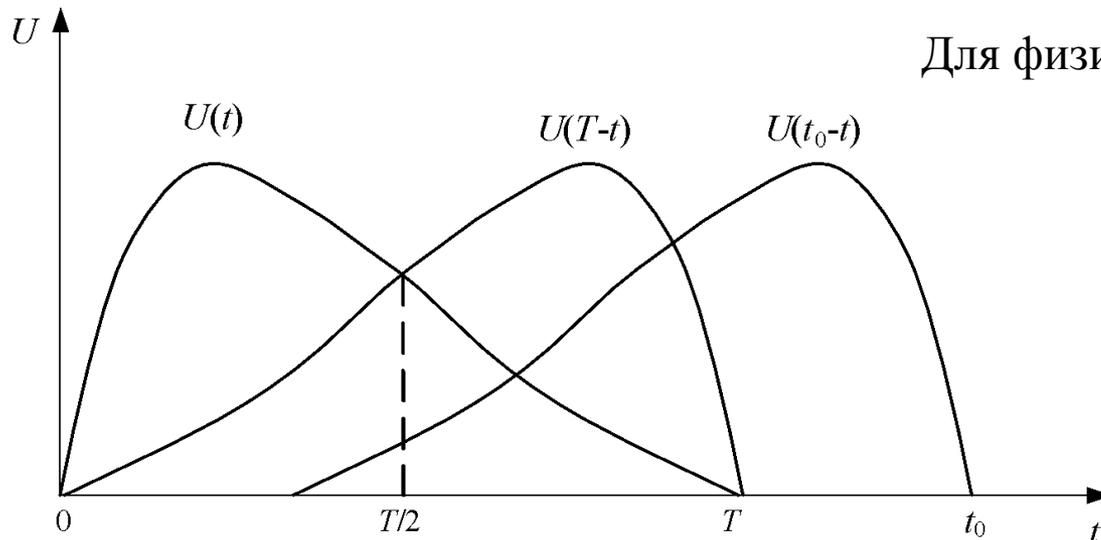
для сложных сигналов $B = \Delta f_9 T_c \gg 1$

$$x(t) = A(t) \cos(2\pi f_0 t + \psi(t)), \quad 0 \leq t \leq \tau_u$$

Согласованная фильтрация сигналов

$$K_S(j\omega) = K^*(j\omega) \exp(-j\omega t_0) \quad K_{сф}(\omega) = K(\omega) \quad \varphi_{сф}(\omega) = -\psi(\omega) - \omega t_0$$

$$g_{сф}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)| \exp(-j(\psi(\omega) + \omega t_0)) \exp(j\omega t) d\omega \quad \omega = (\omega_0 - \omega)$$



Для физической реализации СФ $t_0 \geq T$

**Функция неопределенности и ее основные свойства.
Тело неопределенности. Диаграмма неопределенности**

$$s(t) = U_{m0}(t) \exp(i\omega_0 t + i\varphi t) = \dot{U}_m(t) \exp(i\omega_0 t)$$

$$R(\tau, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{U}_m(t) \dot{U}_m^*(t - \tau) \exp(-j\Omega t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_m^*(j\omega) S_m(j\omega - j\Omega) \exp(j\omega\tau) d\omega.$$

Основные свойства функции неопределенности

$$R(0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} (|\dot{U}_m(t)|)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (|S_m(i\omega)|)^2 d\omega = 2E.$$

$$R(-\tau, -\Omega) = R(\tau, \Omega)$$

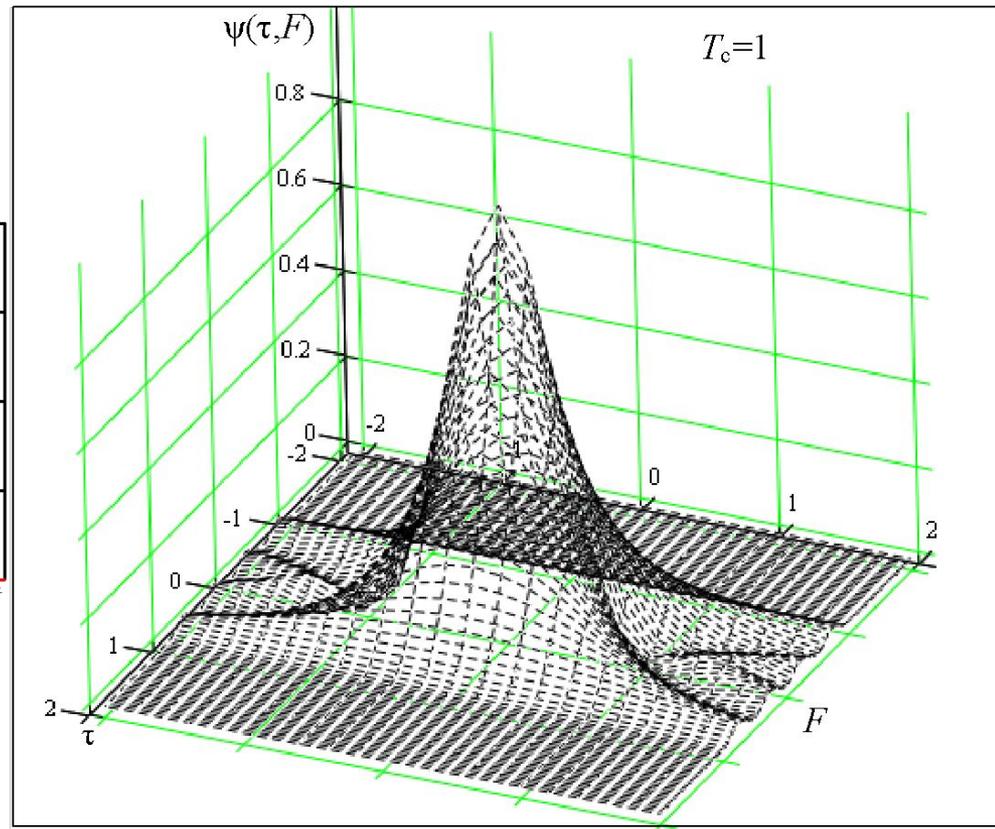
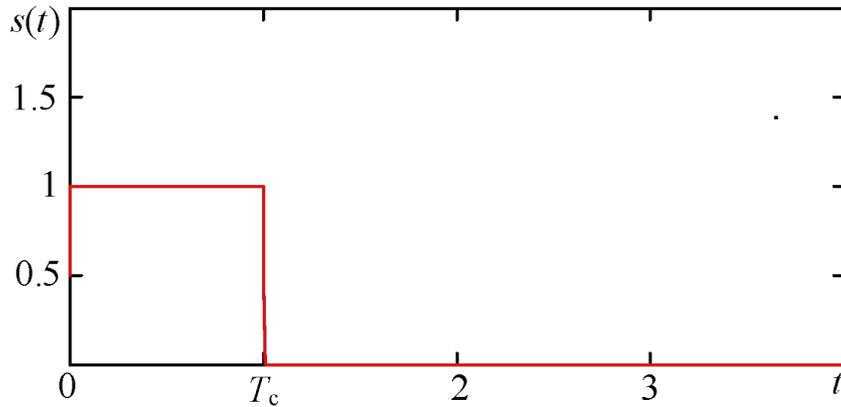
Основные свойства тела неопределенности

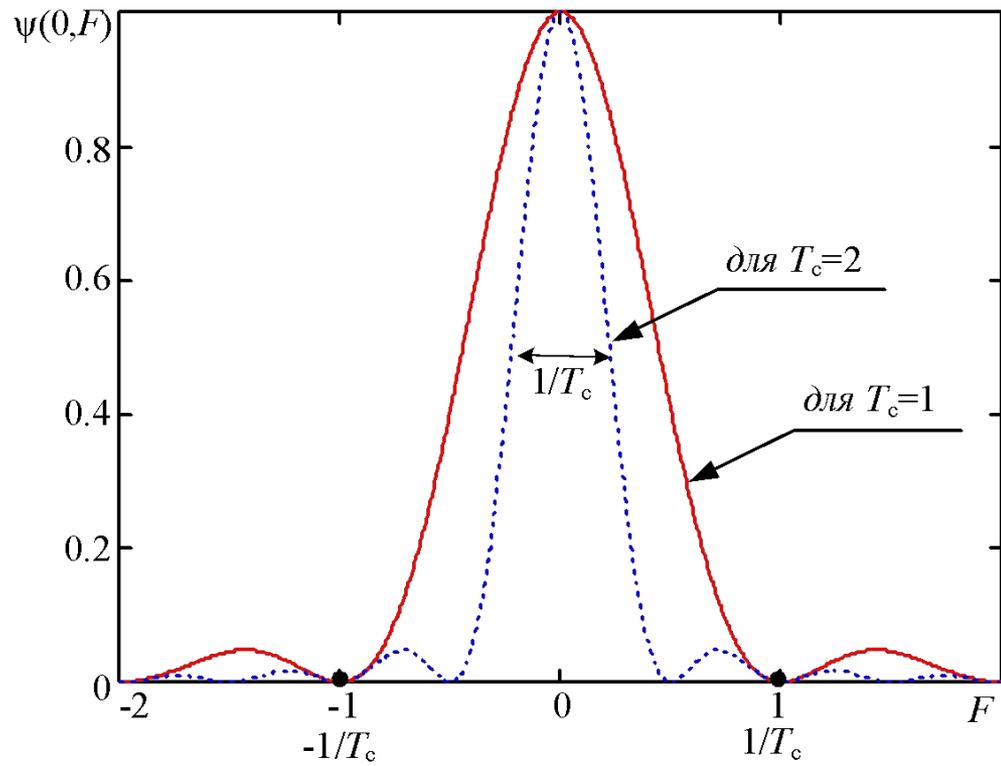
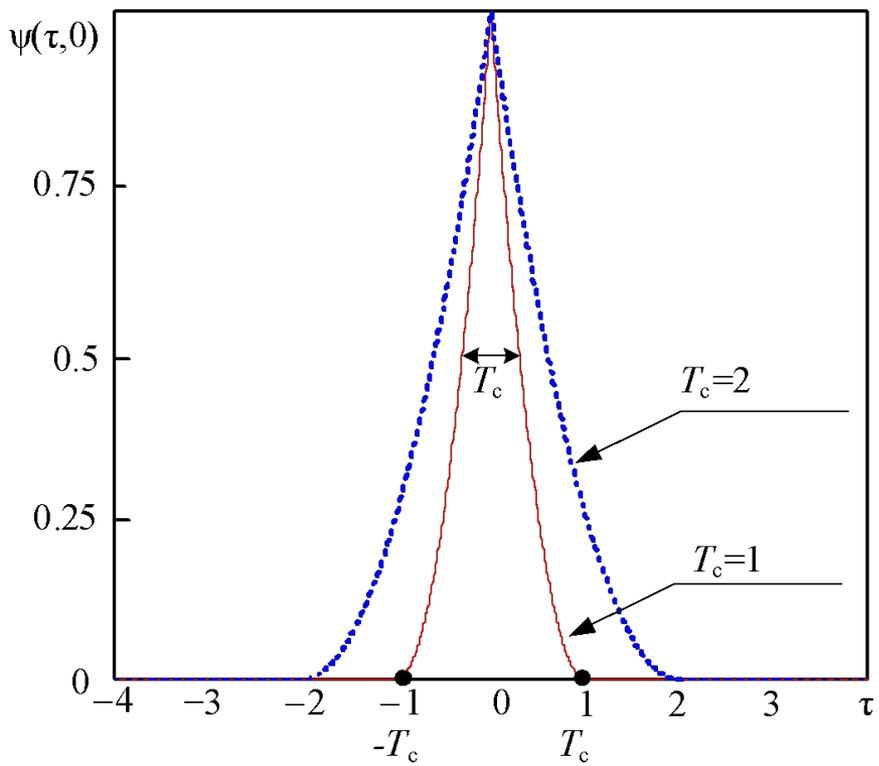
$$\psi(\tau, \Omega) < \psi(0, 0) = 1$$

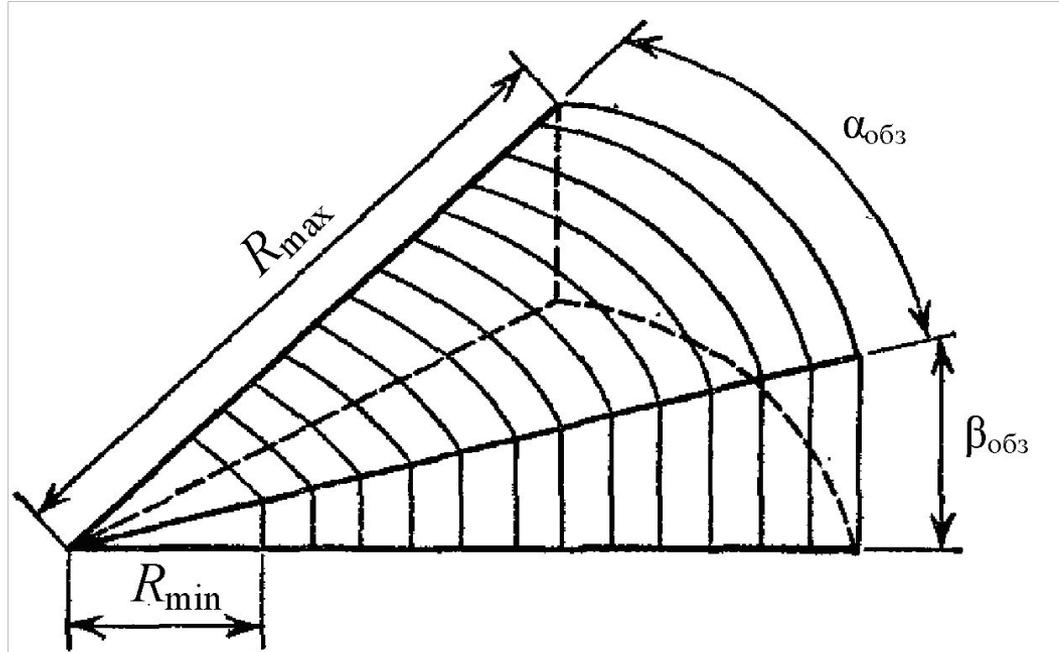
$$\psi(\tau, \Omega) = \psi(-\tau, -\Omega)$$

$$V = \iint \psi^2(\tau, \Omega) d\tau d\Omega = 1$$

$$\psi(\tau, \Omega) = |\rho(\tau, \Omega)| = R(\tau, \Omega) / R(0, 0) = R(\tau, \Omega) / 2$$



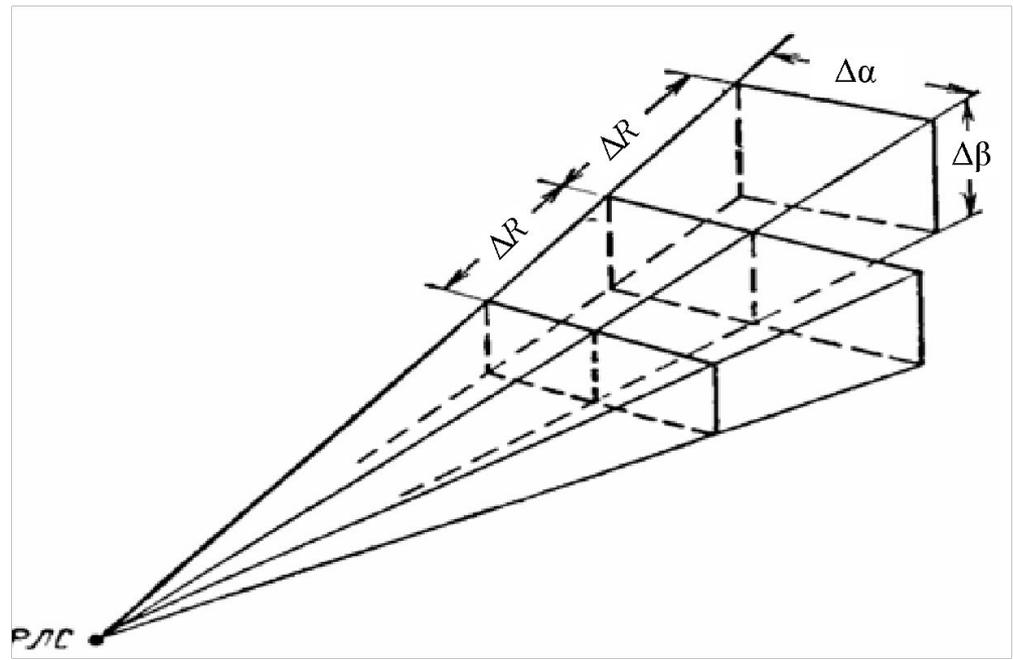


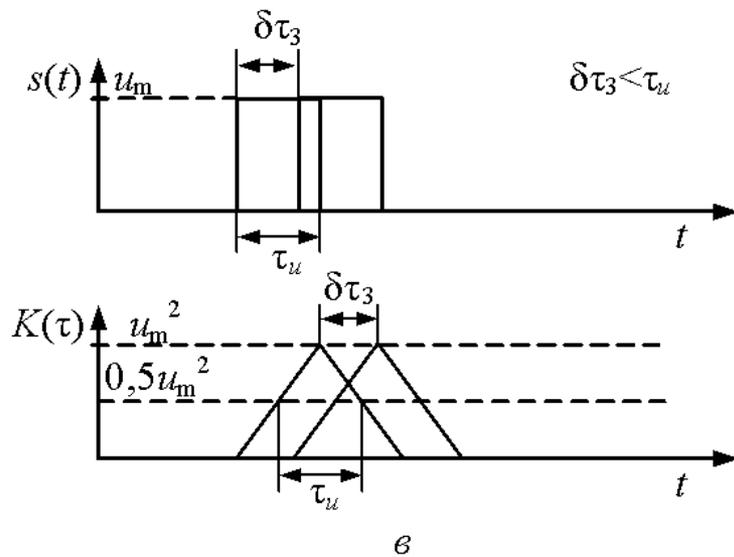
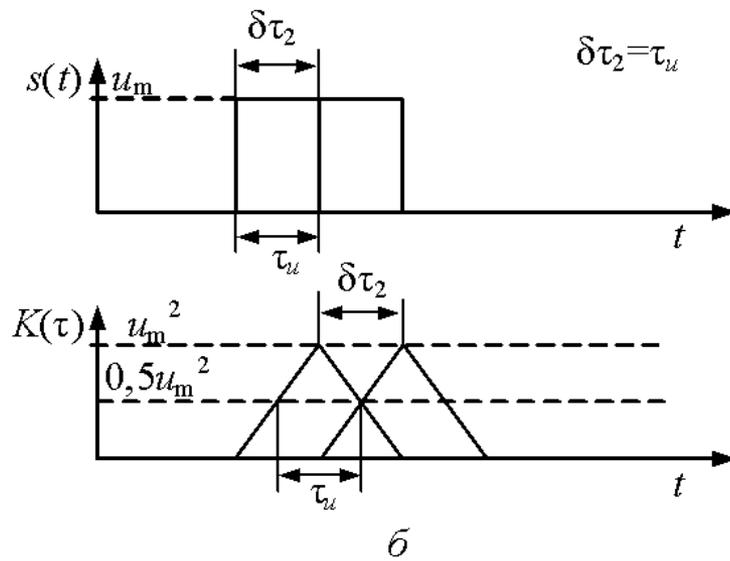
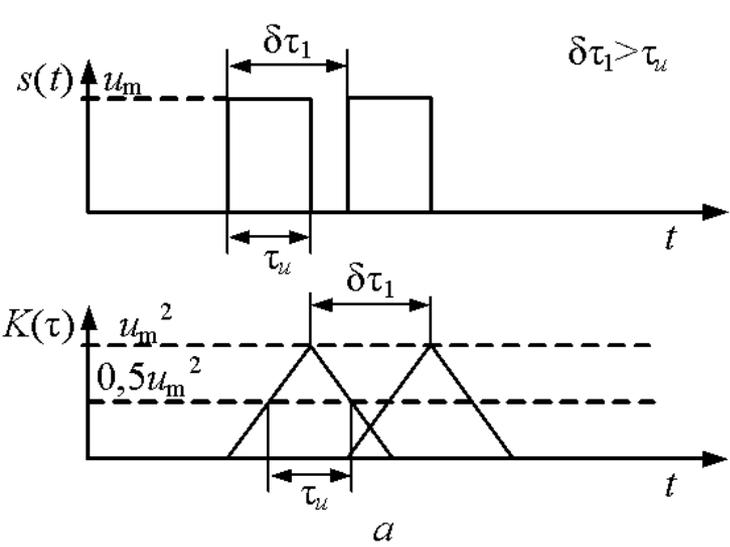


$$E = P_{и} \tau_{и}, q = E/N_0$$

$$\Delta R = (c \tau_3)/2 ; \quad \tau_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) d\tau$$

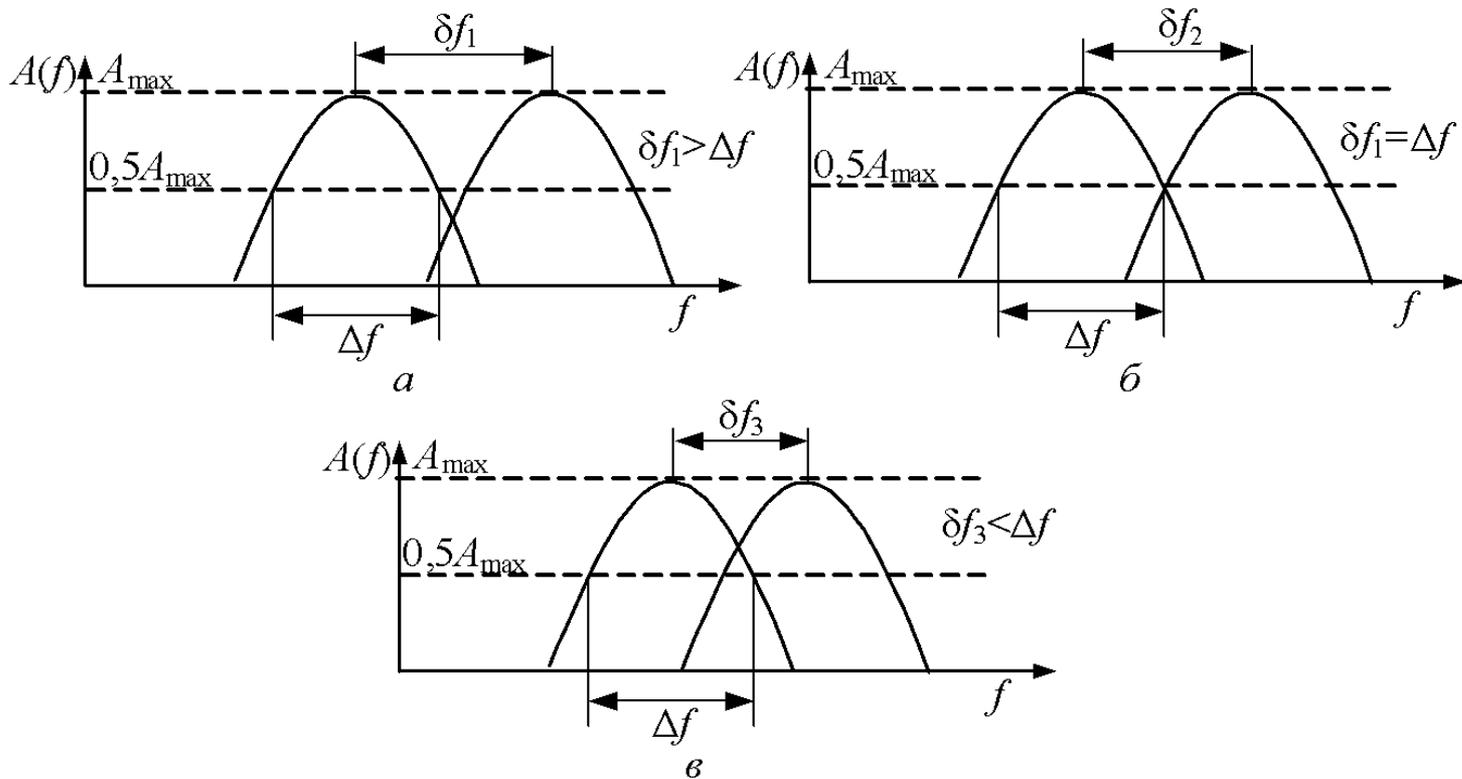
$$\Delta v_r = (\lambda F_3)/2$$





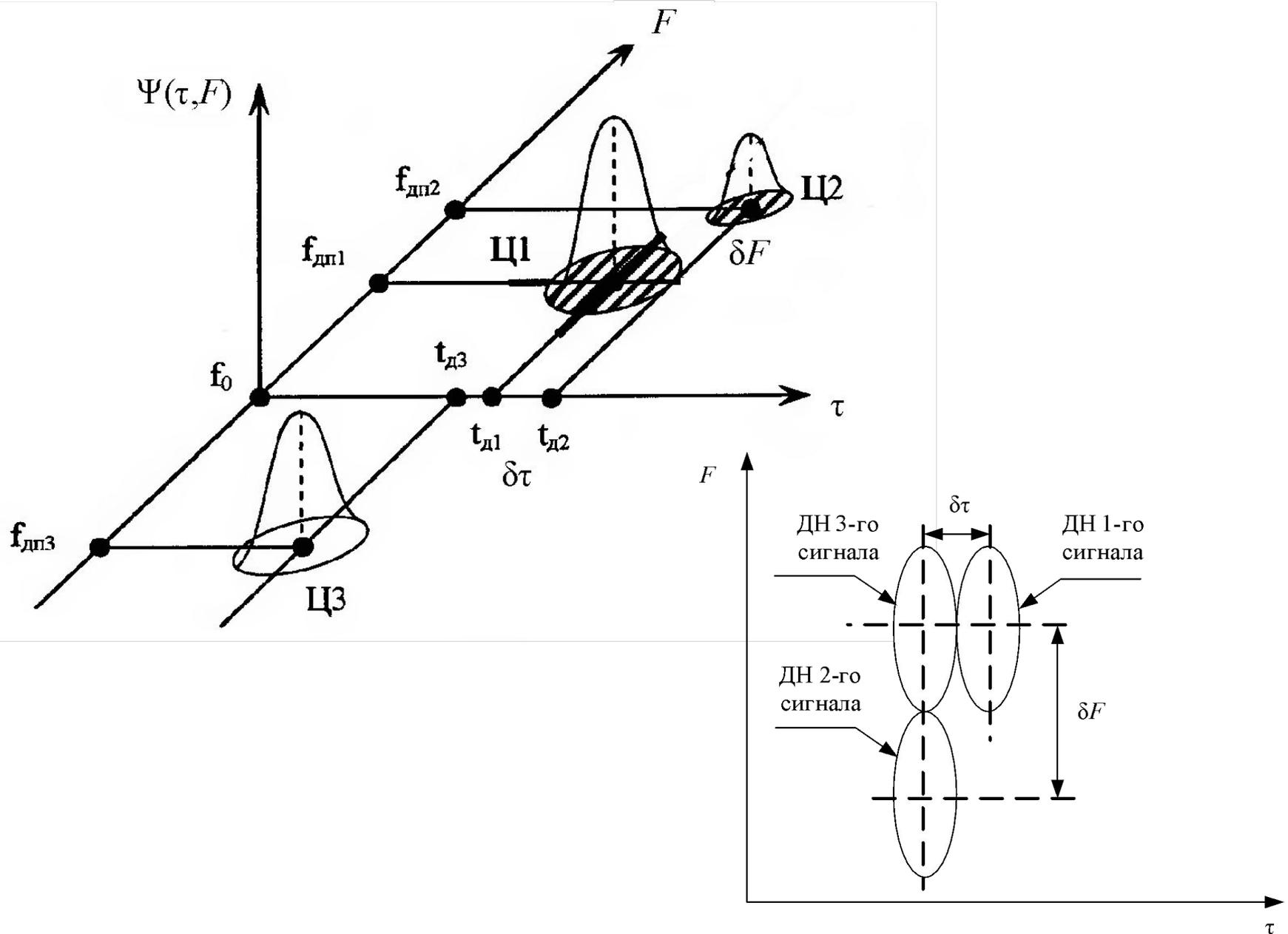
Для простых сигналов:

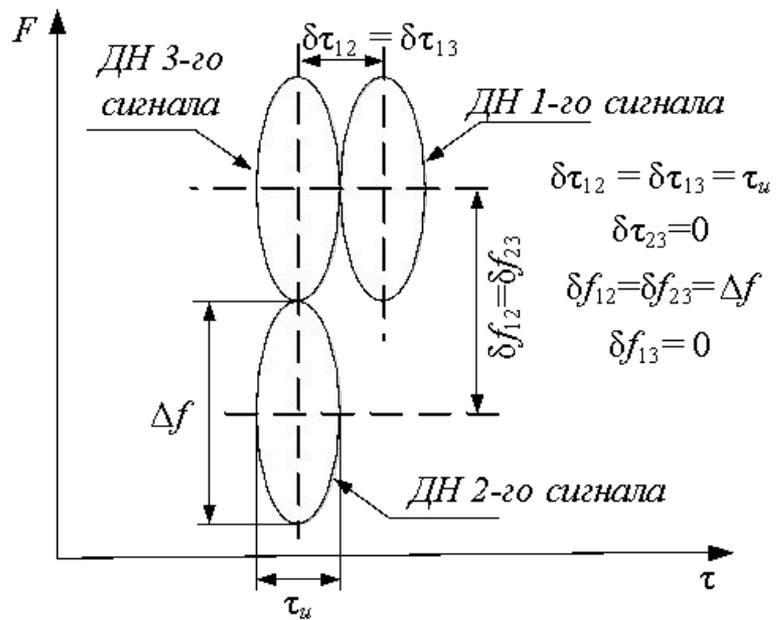
$$\Delta R = (c \tau_{\text{и}}) / 2 = c / 2 \Delta f; \quad \tau_{\text{и}} = 1 / \Delta f$$



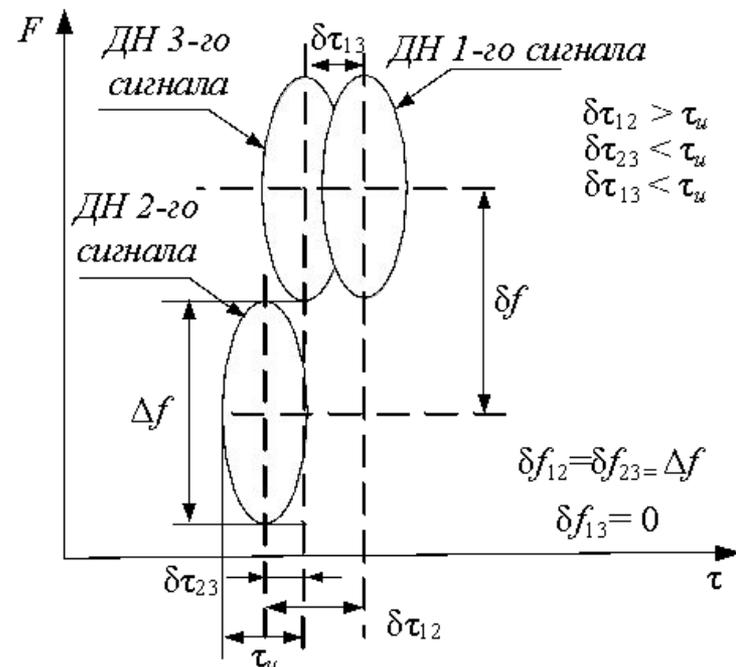
Для простых сигналов: $\Delta \nu_r = (\lambda \Delta f) / 2 = 0,5 \lambda / \tau_{\text{и}}$

Функция и диаграмма неопределенности в задаче разрешения и измерения

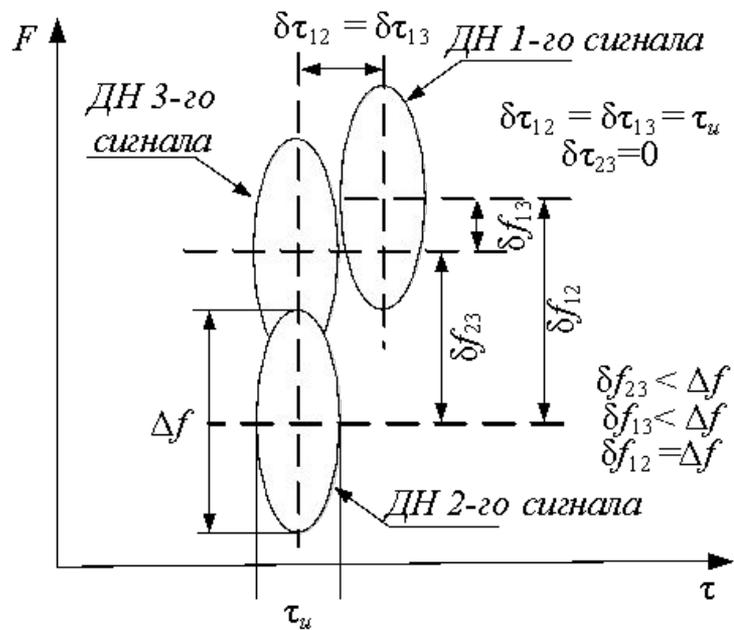




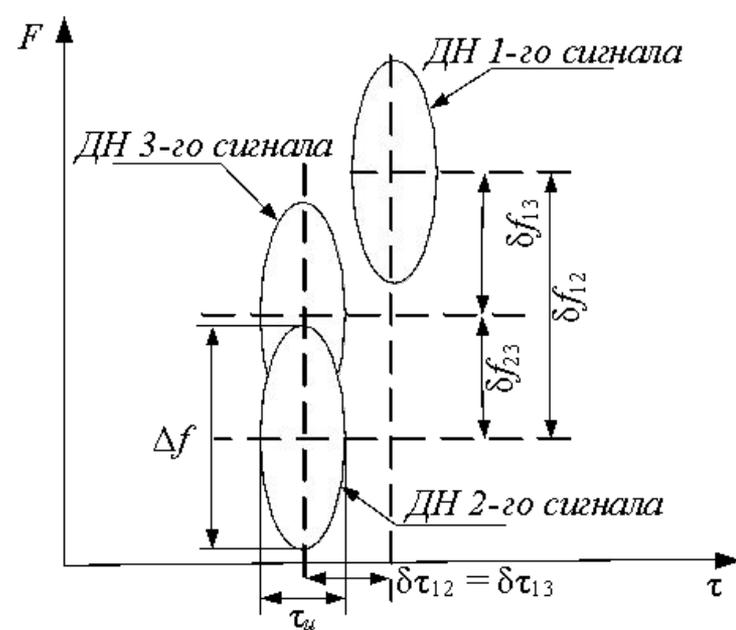
а)



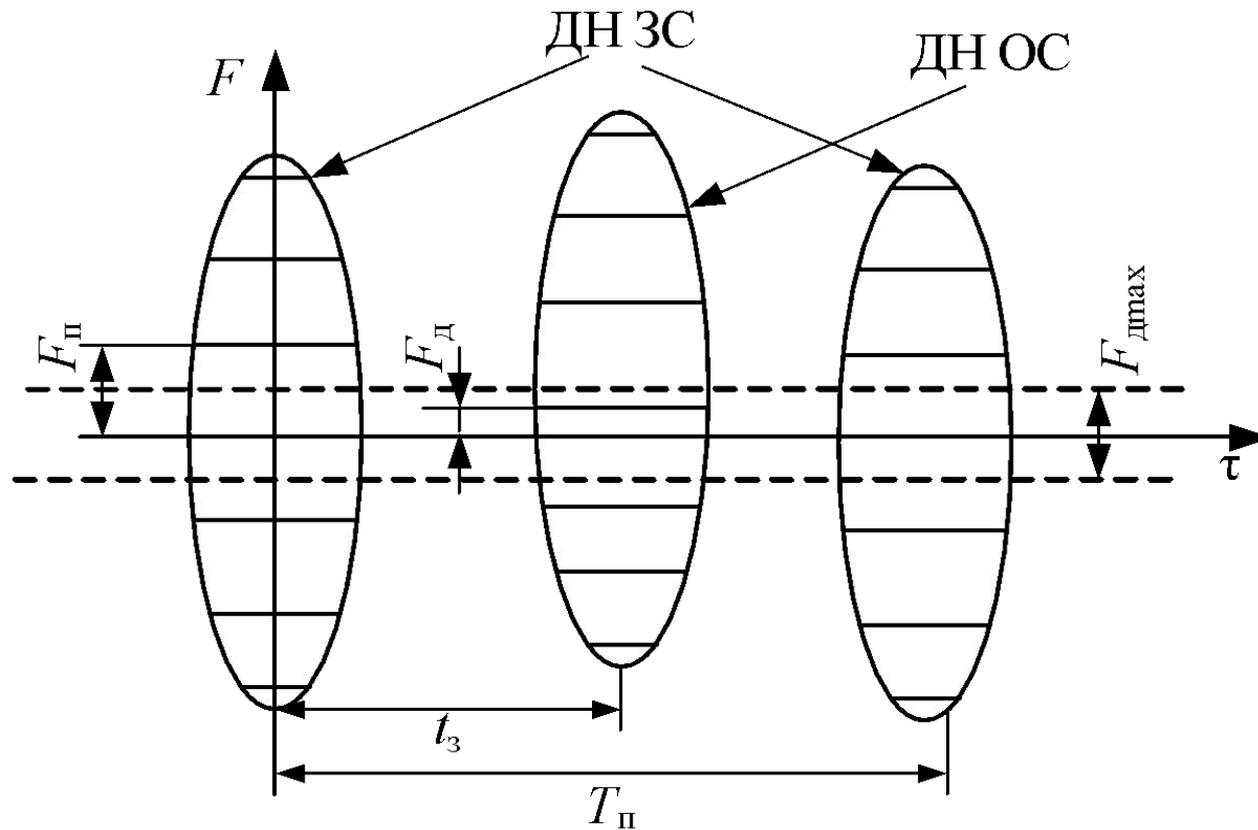
б)



в)



г)



$$\sigma_{\tau}^2 = 1 / (E / N_0 (2\pi f_{\text{ck}})^2) \quad f_{\text{ck}} = \left(\frac{\int f^2 (|S(f)|^2) df}{\int (|S(f)|^2) df} \right)^{1/2}$$

$$\sigma_f^2 = 1 / (E / N_0 (2\pi t_{\text{ck}})^2) \quad t_{\text{ck}} = \left(\frac{\int t^2 (|U(t)|^2) dt}{\int (|U(t)|^2) dt} \right)^{1/2}$$

$$\sigma_r = 0,5c\sigma_{\tau}$$

$$\sigma_v = 0,5\lambda\sigma_f$$

Разновидности ШПС:

- с непрерывной модуляцией:

1)линейно-частотно-модулированные;

2)многочастотные;

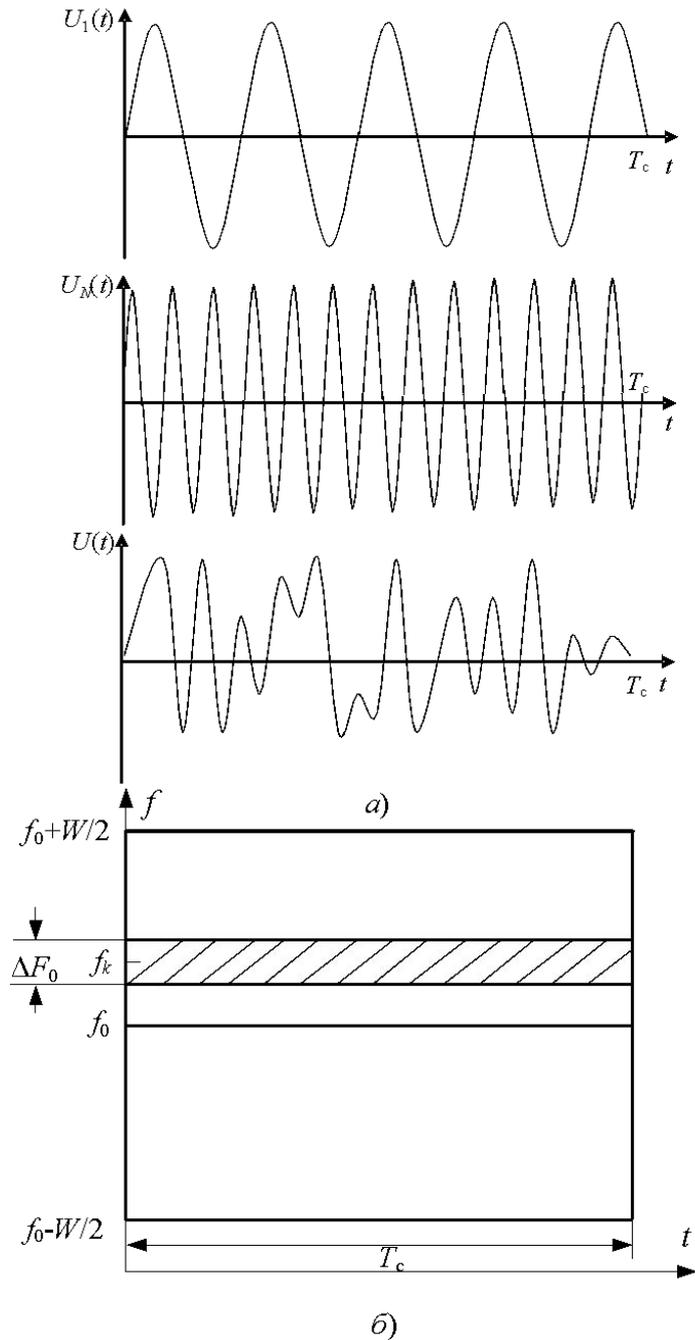
- дискретно-кодированные сигналы:

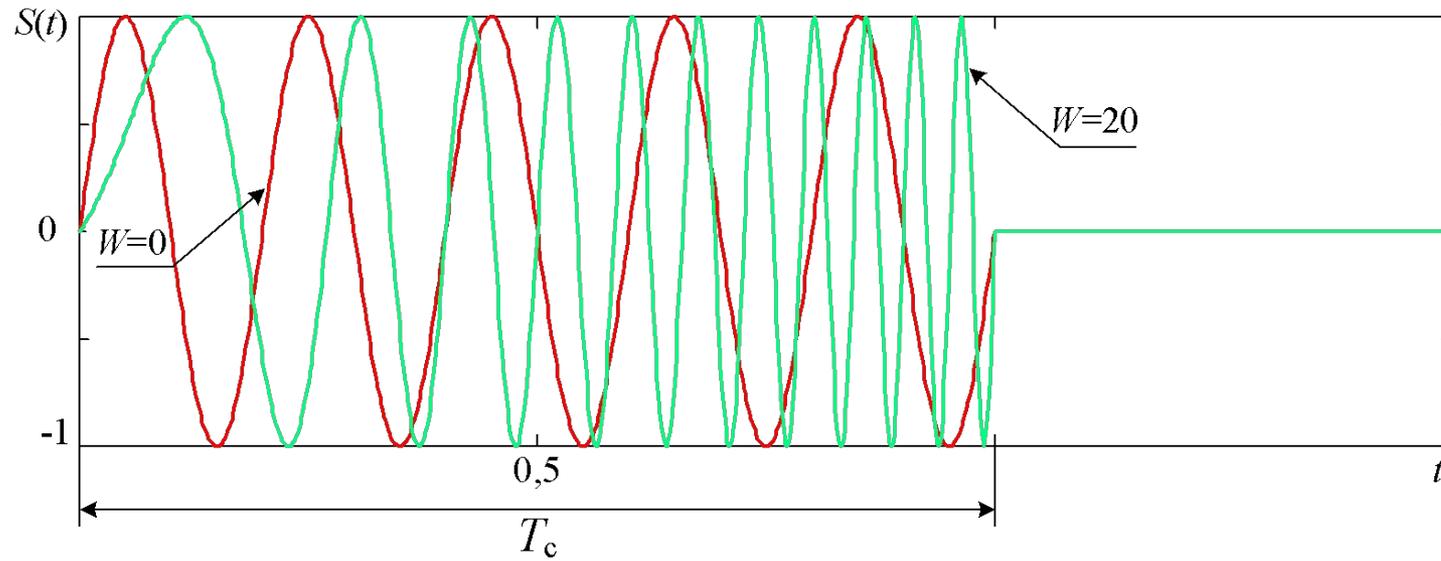
1) кодированные по амплитуде (АДКС);

2) кодированные по частоте (ЧДКС) (сигналы Костаса); дискретные составные частотные.

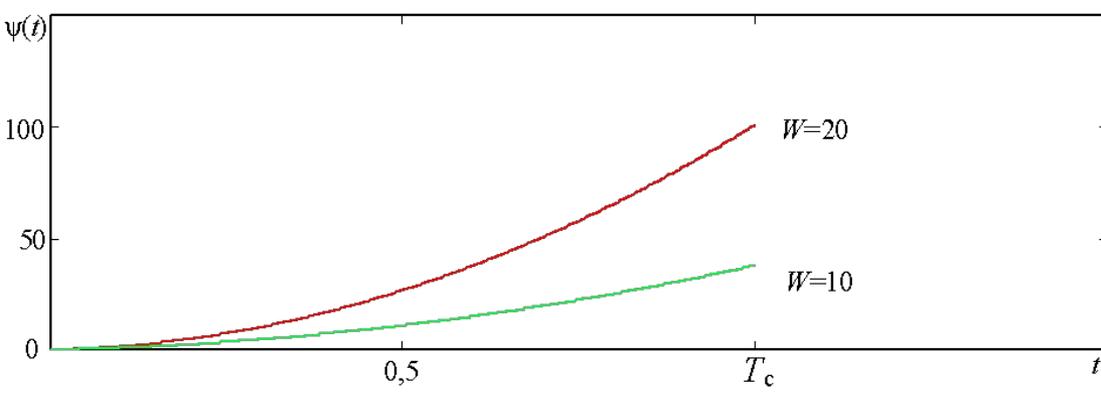
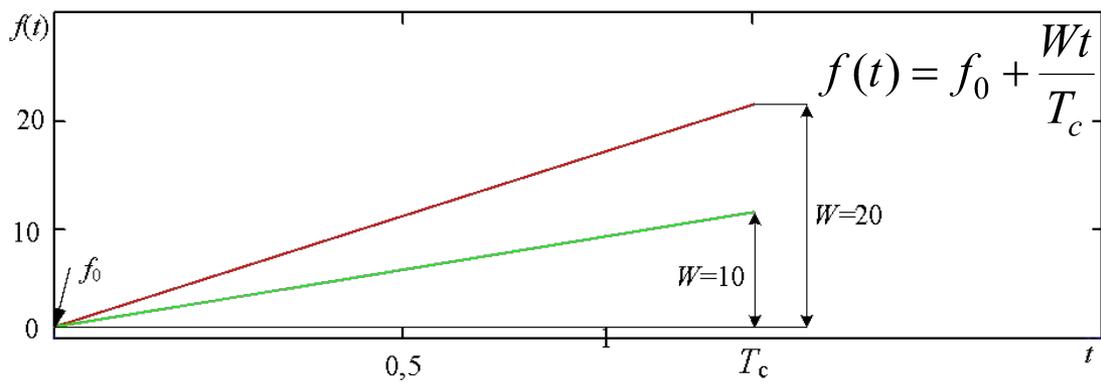
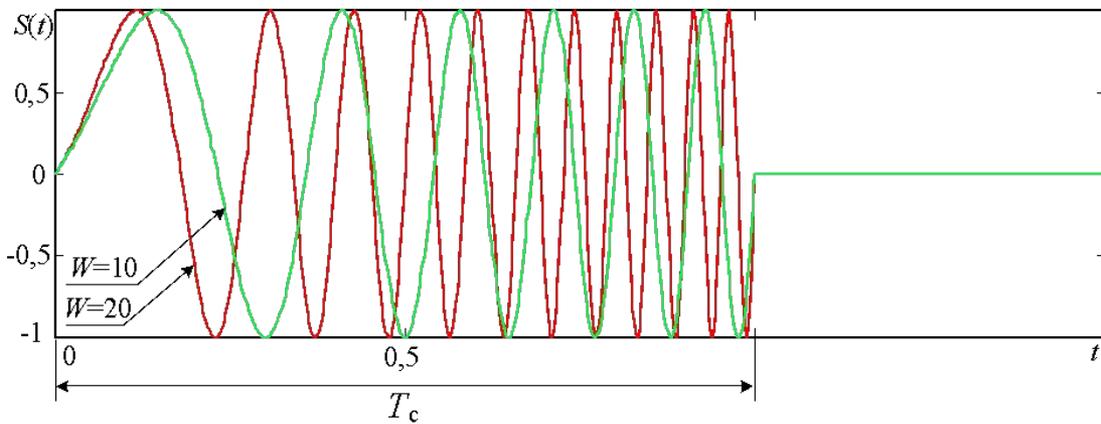
3) кодированные по фазе (фазо-кодо-модулированные (ФКМ), фазоманипулированные (ФМ)). (Бинарная (BPSK) ФМн-2: (коды Баркера; псевдослучайные последовательности, в частности М-последовательности, коды Кассами, коды Голда, коды Уолша-Адамара); ФМн-4; многофазные (коды Чу, коды Фрэнка).

**Многочастотный сигнал и
его частотно-временная плоскость
(матрица)**





ЛЧМ с линейно возрастающим законом изменения частоты



$$s(t) = \begin{cases} A \cos \left[2\pi \left(f_0 t + \frac{Wt^2}{2T_c} \right) \right], & |t| \leq T_c, \\ 0, & |t| > T_c, \end{cases}$$

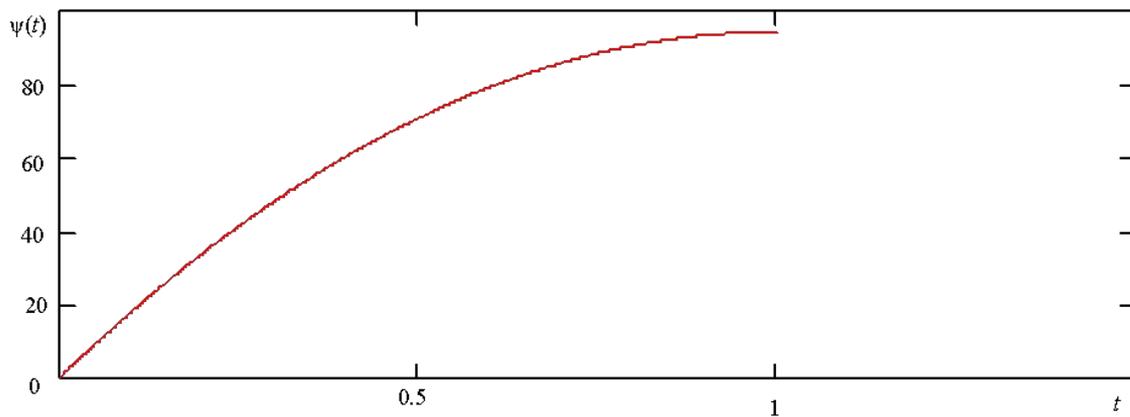
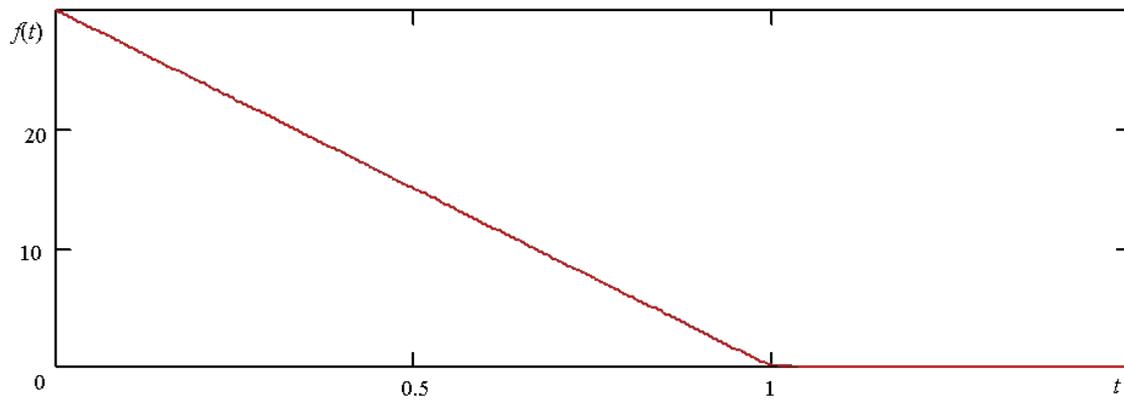
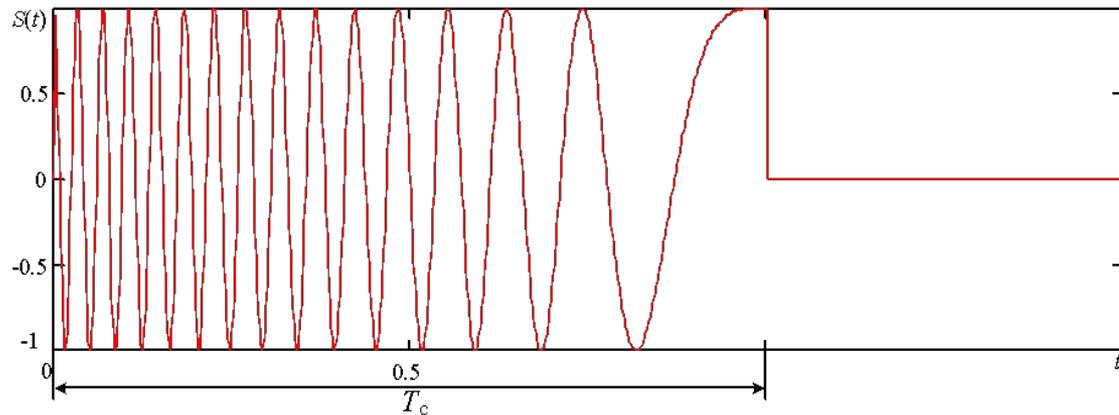
$$s(t) = \begin{cases} \operatorname{Re} \left\{ A \exp \left[j2\pi \left(f_0 t + \frac{Wt^2}{2T_c} \right) \right] \right\}, & |t| \leq T_c, \\ 0, & |t| > T_c. \end{cases}$$

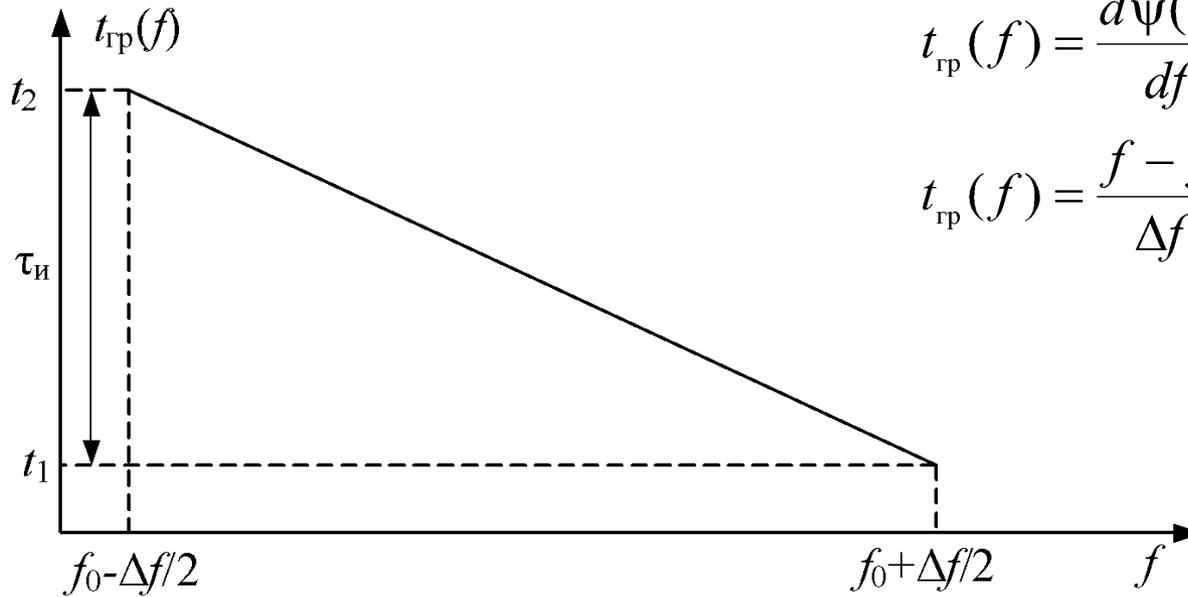
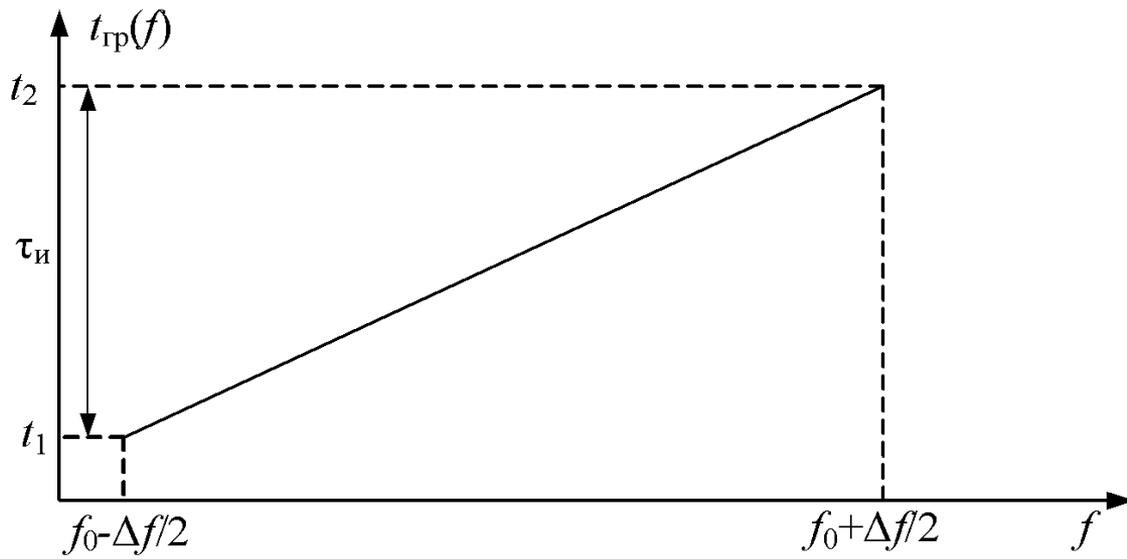
$$\dot{U}_m(t) = \begin{cases} \operatorname{Re} \left\{ A \exp \left[j\pi \frac{Wt^2}{T_c} \right] \right\}, & |t| \leq T_c, \\ 0, & |t| > T_c. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= 2\pi \int_0^t f(t) dt = 2\pi \int_0^t \left(f_0 + \frac{Wt}{T_c} \right) dt = \\ &= 2\pi \left(f_0 t + \frac{Wt^2}{2T_c} \right) \end{aligned}$$

$$B = \Delta f_3 T_c = WT_c \gg \gg 1$$

ЛЧМ с линейно спадающим законом изменения частоты



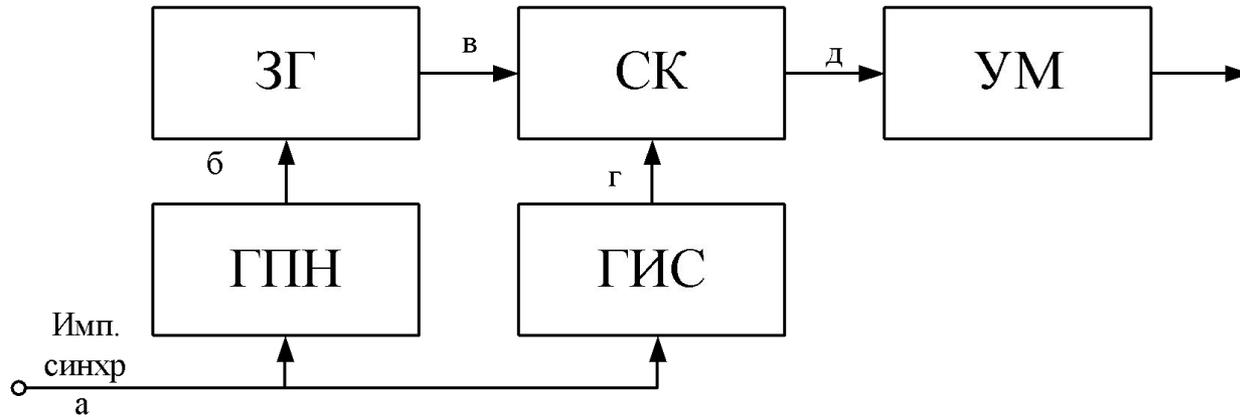


$$t_{\text{rp}}(f) = \frac{d\psi(f)}{df}, \quad \psi(f) = \frac{(f - f_0)^2}{2\Delta f} \tau_u,$$

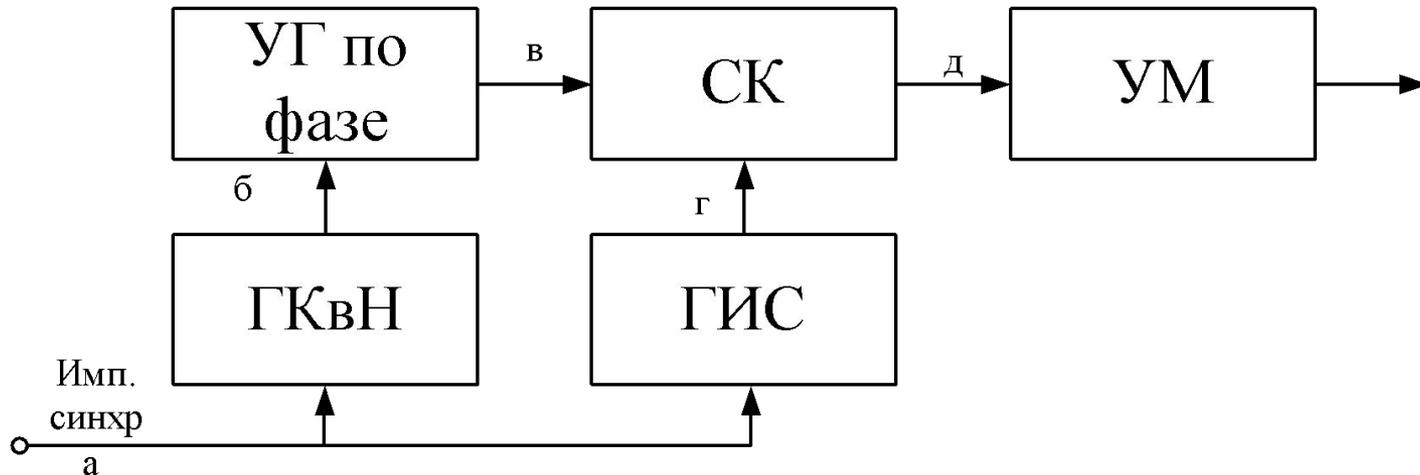
$$t_{\text{rp}}(f) = \frac{f - f_0}{\Delta f} \tau_u.$$

Активный метод формирования ЛЧМ

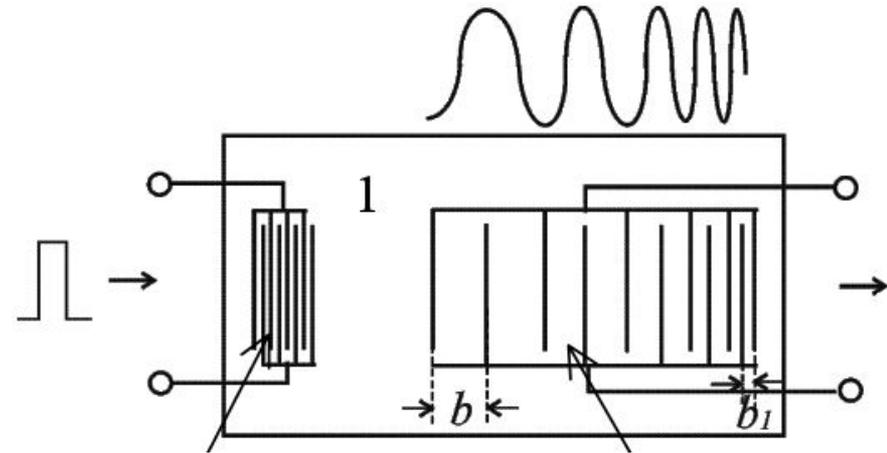
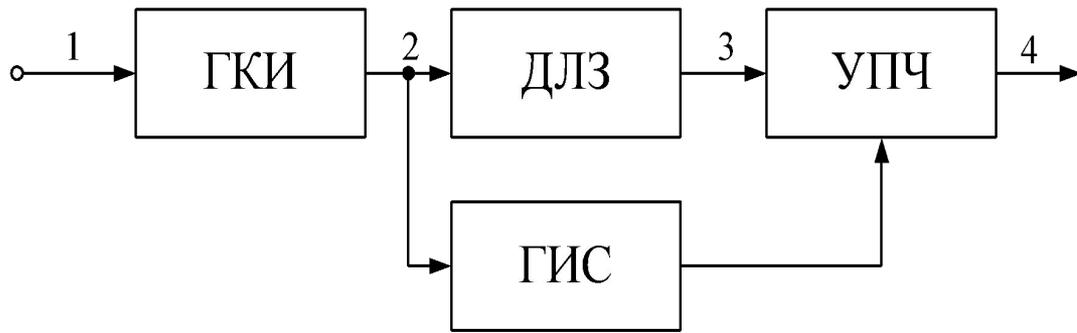
Формирование ЛЧМ сигналов в управляемых по частоте автогенераторах



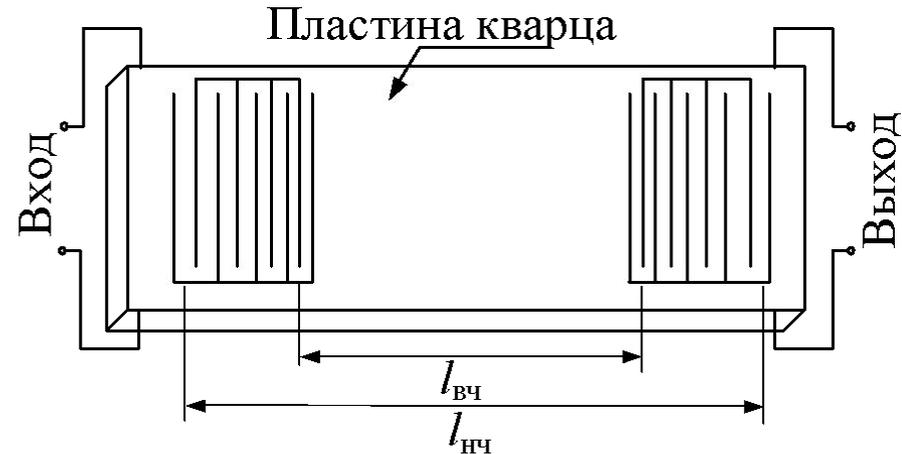
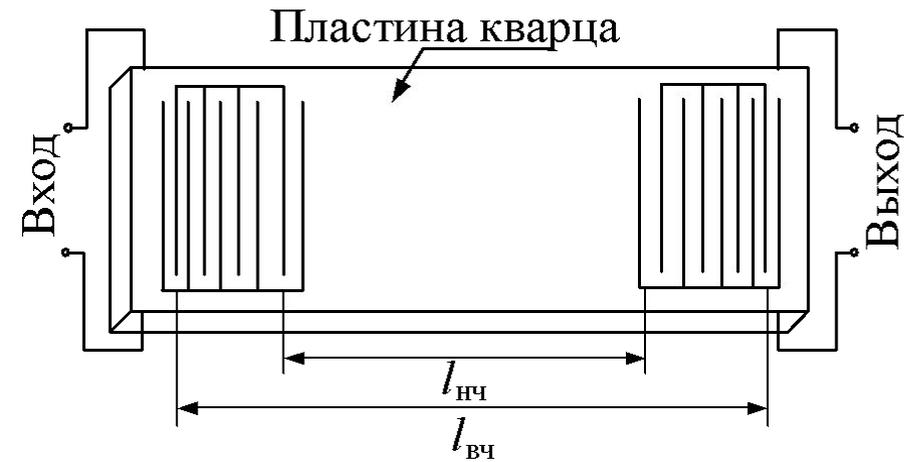
Формирование ЛЧМ сигналов в управляемых по фазе автогенераторах



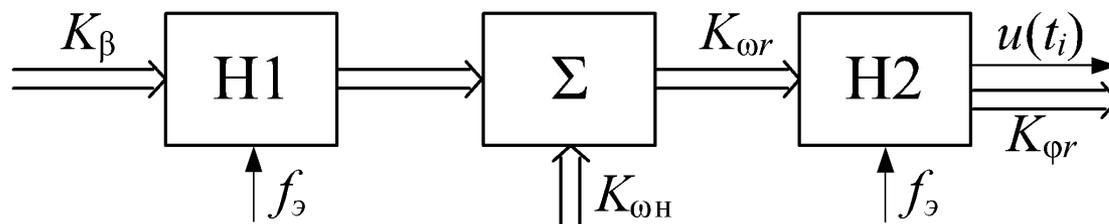
Пассивный метод формирования ЛЧМ



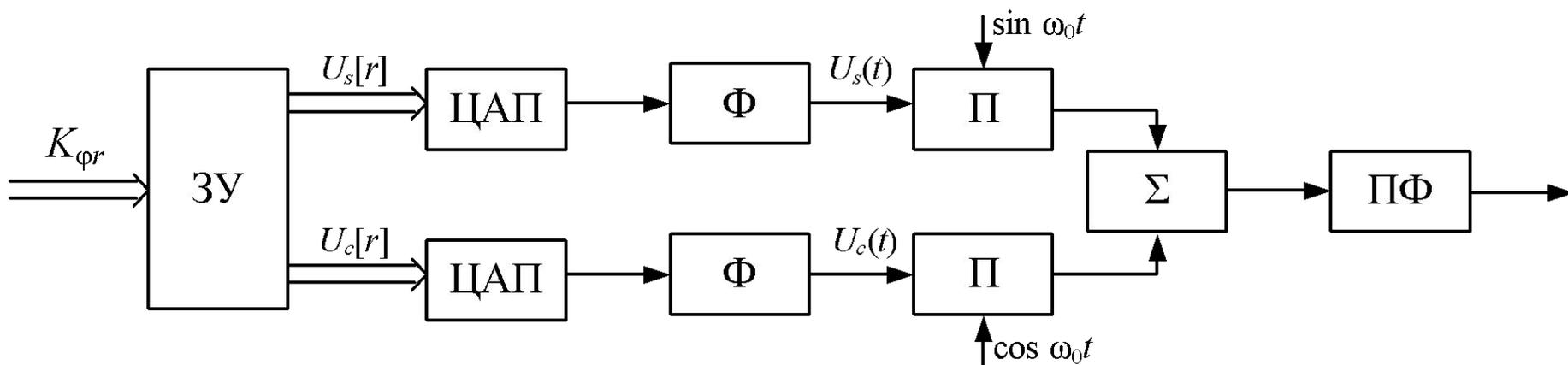
$$t_{\text{нч}} = l_{\text{нч}} / c_{\text{пав}}, t_{\text{вч}} = l_{\text{вч}} / c_{\text{пав}}.$$

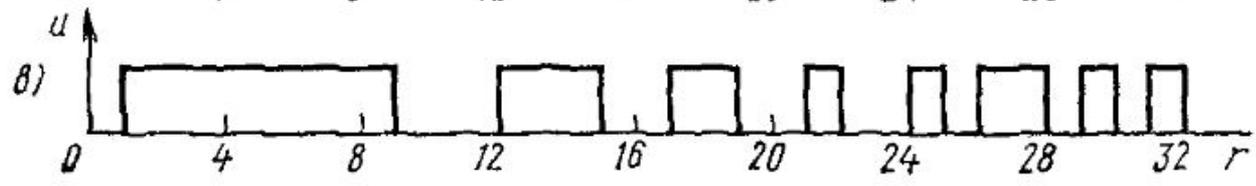
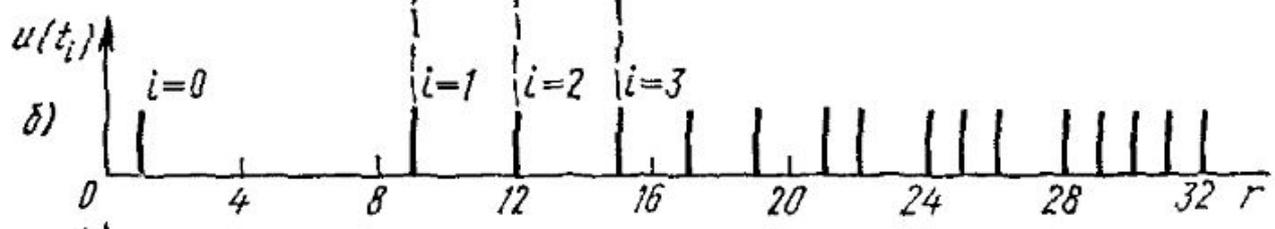
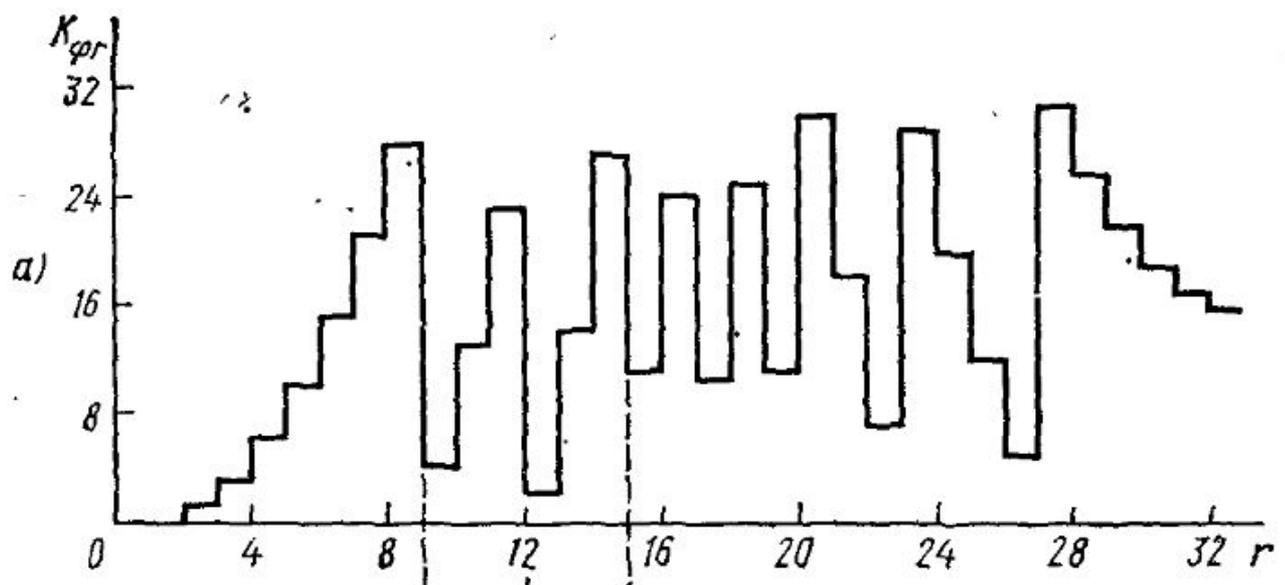


Цифровые методы формирования ЛЧМ



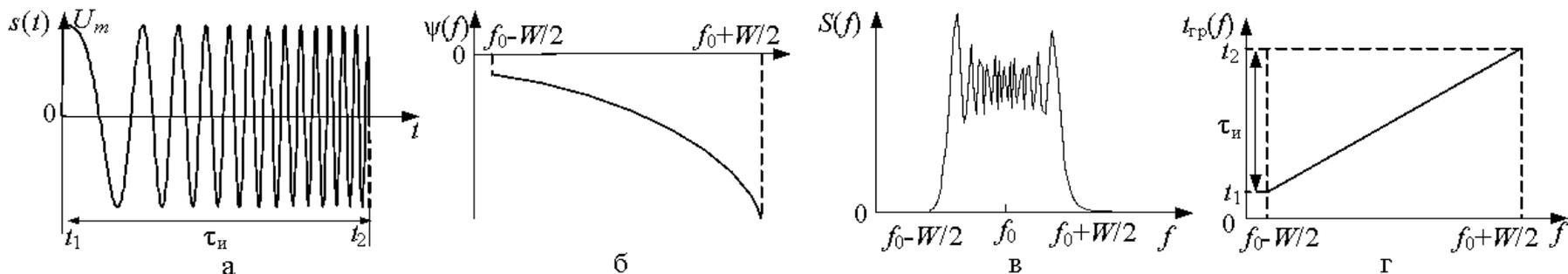
$$K_{\varphi r} = \sum_{r=1}^R \{K_{\omega H} + \sum_{r=0}^R K_{\beta}\} - N \text{ent} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{r=1}^R \{K_{\omega H} + \sum_{r=0}^R K_{\beta}\} \right\},$$



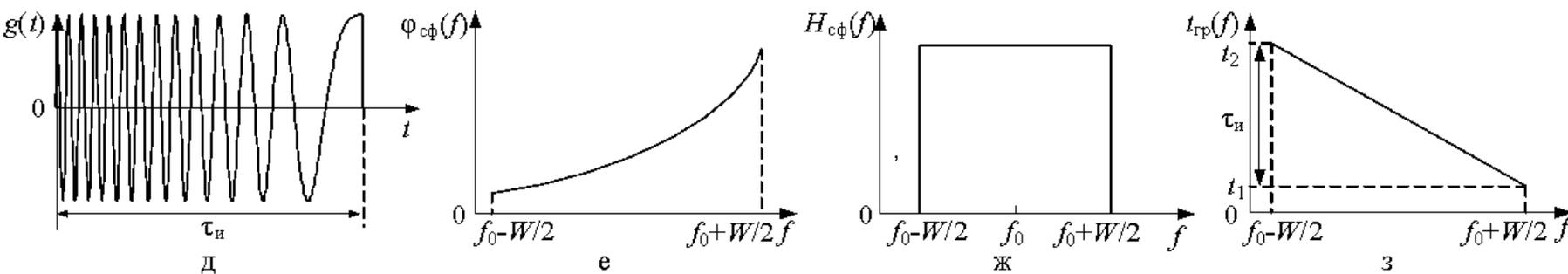


Согласованная фильтрация ЛЧМ сигнала

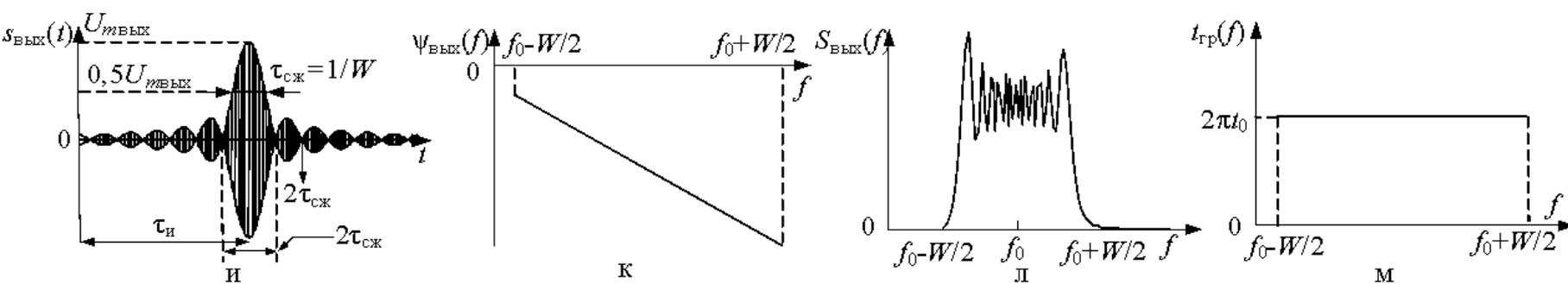
1 Характеристики сигнала на входе согласованного фильтра



2 Характеристики согласованного фильтра



3 Характеристики сигнала на выходе согласованного фильтра



С учетом некоторых допущений фазовый и амплитудный спектры ЛЧМ сигнала : $\psi(f) \approx -\pi\tau_{\text{и}}(f-f_0)^2/2W, S(f) \approx U_m \tau_{\text{и}} / (2 \sqrt{2W\tau_{\text{и}}})$

Групповое время замедления спектральных составляющих ЛЧМ сигнала:

$$t_{\text{гр}}(f) = -d\psi(f)/df = \pi\tau_{\text{и}}(f-f_0)/W.$$

Амплитудный спектр сигнала на выходе СФ: $S_{\text{ВЫХ}}(f) = H_{\text{сф}}(f) S(f) \approx a U_m \tau_{\text{и}} / (2 \sqrt{2W\tau_{\text{и}}})$

Фазочастотная характеристика $\varphi_{\text{сф}}(f) = -\psi(f) - 2\pi f t_0$ СФ обратна по знаку фазовому спектру

входного сигнала, поэтому фазовый спектр выходного сигнала СФ:

$$\psi_{\text{ВЫХ}}(f) = \psi(f) + \varphi_{\text{сф}}(f) = -2\pi f t_0,$$

где t_0 – постоянная временная задержка фильтра $t_0 > \tau_{\text{и}}$.

Групповое время замедления спектральных составляющих выходного сигнала:

$$t_{\text{гр}}(f) = -d\psi_{\text{ВЫХ}}(f)/df = -d(-2\pi f t_0)/df = 2\pi t_0.$$

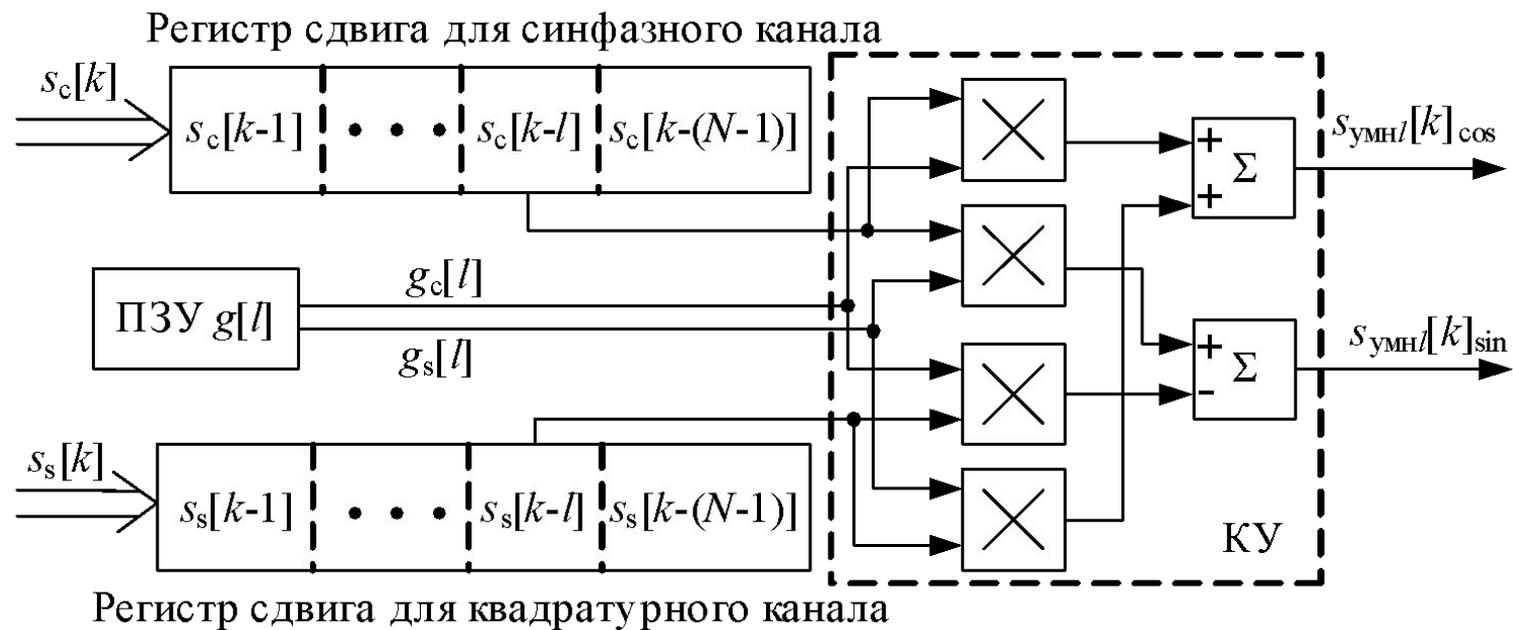
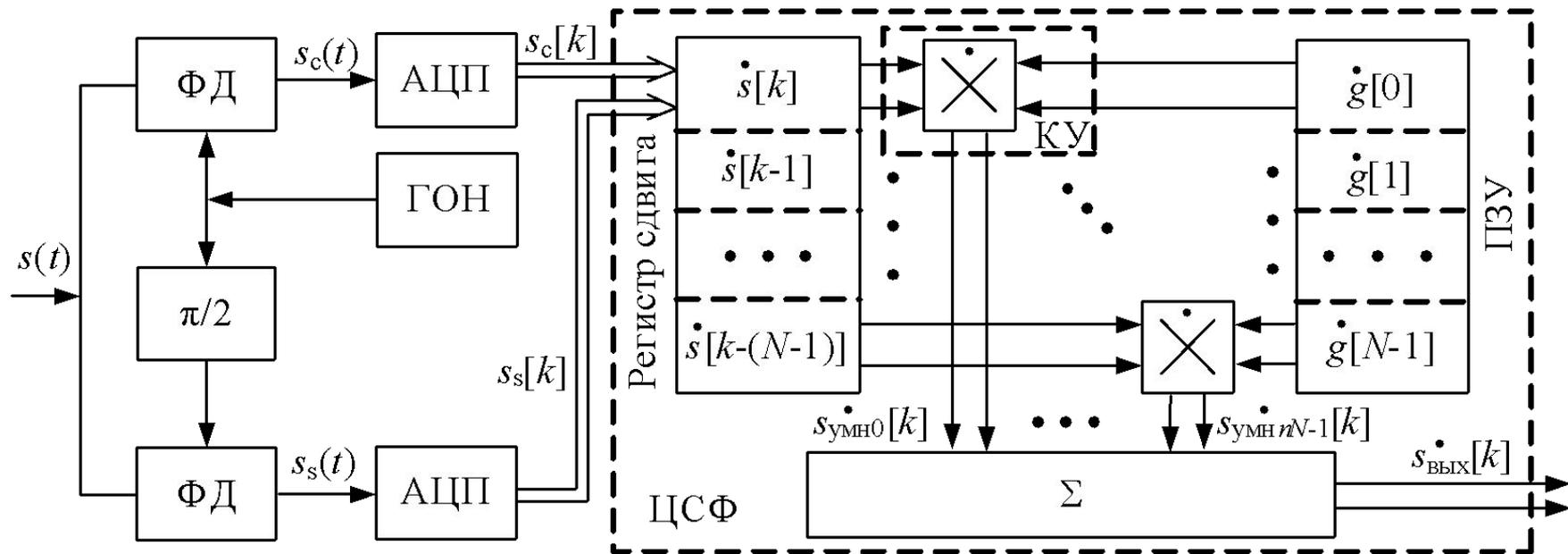
Сигнал на выходе СФ [автокорреляционная функция (АКФ)] определяется операцией свертки входного сигнала $s(t)$ с импульсной характеристикой (ИХ) $g(t)$:

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t-\tau) g(\tau) d\tau \approx 0,5 U_m^2 \tau_{\text{и}} \cos(2\pi f_0 t) \frac{\sin(\pi W \tau_{\text{и}} t)}{\pi W \tau_{\text{и}} t}.$$

Увеличение амплитуды сжатого импульса $U_{\text{мВЫХ}}$ можно определить из закона сохранения энергии.

$$E_{\text{ВХ}} = E_{\text{ВЫХ}} = U_m^2 \tau = U_{\text{мВЫХ}}^2 \tau_{\text{сж}} \quad U_{\text{мВЫХ}} / U_m = \sqrt{\tau / \tau_{\text{сж}}} = \sqrt{\tau W} = \sqrt{B}$$

$$K_{\text{сж}} = \tau_{\text{и}} / \tau_{\text{сж}} = \tau_{\text{и}} W = B$$



$$s(t) = s_c(t) + js_s(t) = U_m (\cos(\pi b t^2) + j \sin(\pi b t^2)). \quad b = \pm W/\tau_{\text{и}}$$

$$s_c[k] = U_m \cos(\pi b [k]^2), \quad s_s[k] = U_m \sin(\pi b [k]^2) \quad k=0..N-1$$

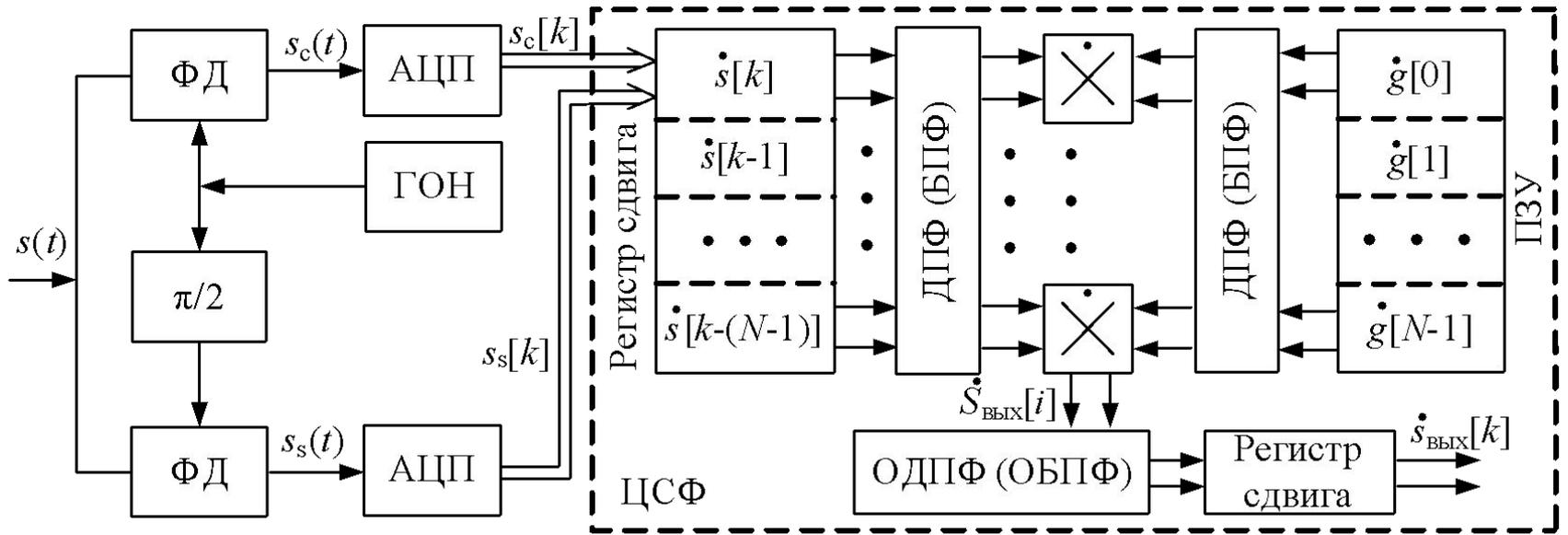
$$g[l] = a s^*[N-l],$$

$$g[l] = g_c[l] + j g_s[l] = U_m (\cos(\pi b [N-l]^2) - j \sin(\pi b [N-l]^2)),$$

$$s_{\text{ББЛХ}}(k) = \sum_{l=0}^{N-1} g(l) s[(k-l)] = \sum_{l=0}^{N-1} s^*[(N-l)] s[(k-l)]$$

$$\begin{aligned} s_{\text{yMHL}}[k] &= s^*[(N-l)] s[(k-l)] = s_{\text{yMHL}}[k]_{\text{cos}} + js_{\text{yMHL}}[k]_{\text{sin}} = \\ &= U_m^2 ((\cos(\pi b [N-l]^2) - j \sin(\pi b [N-l]^2)) \times (\cos(\pi b [k-l]^2) + j \sin(\pi b [k-l]^2))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{\text{yMHL}}[k]_{\text{cos}} &= U_m^2 (\cos(\pi b [N-l]^2) \cos(\pi b [k-l]^2) + \sin(\pi b [N-l]^2) \sin(\pi b [k-l]^2)), \\ s_{\text{yMHL}}[k]_{\text{sin}} &= U_m^2 (\cos(\pi b [N-l]^2) \sin(\pi b [k-l]^2) - \sin(\pi b [N-l]^2) \cos(\pi b [k-l]^2)). \end{aligned}$$

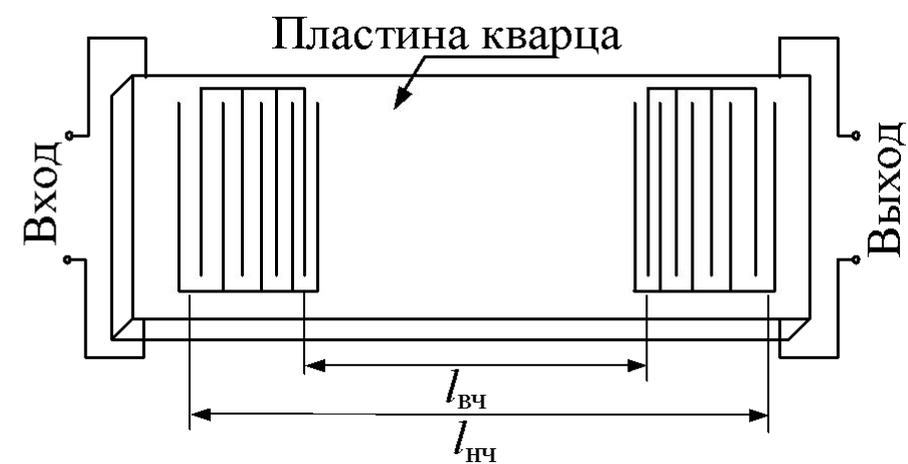
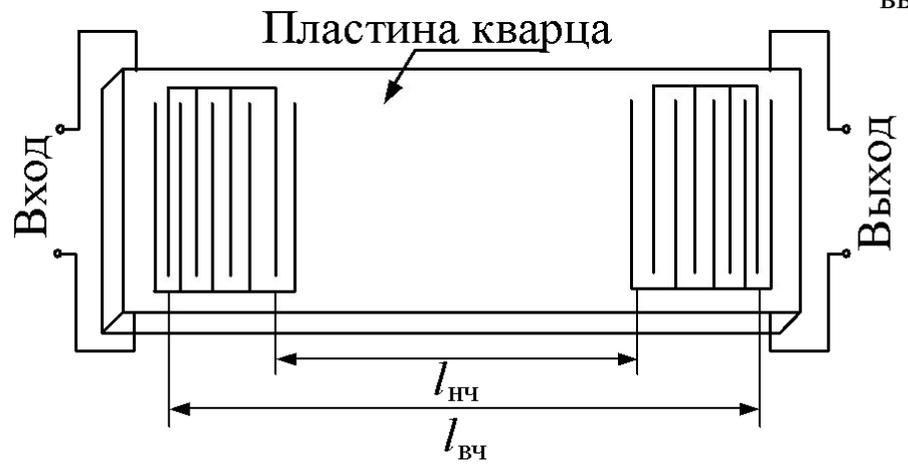


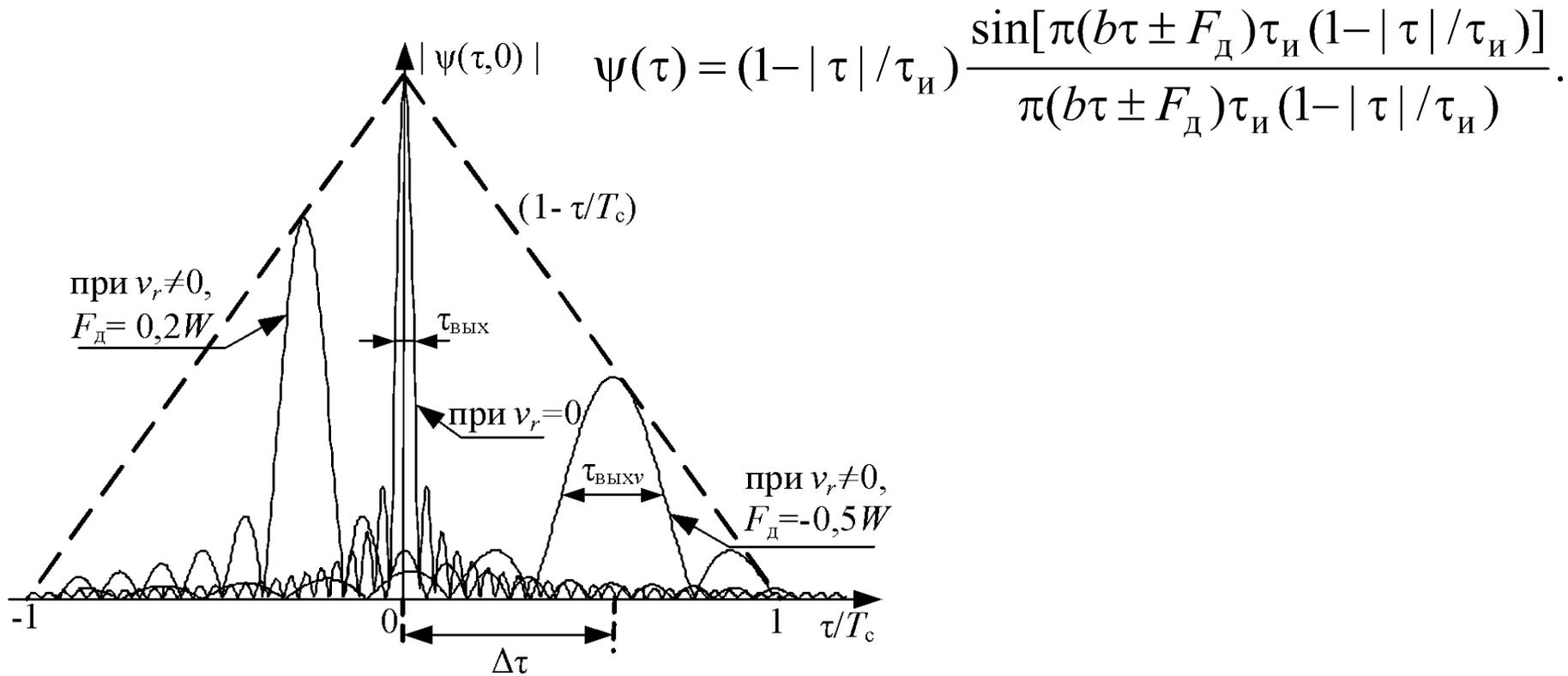
$$S_{\text{ВХ}}[i] = \sum_{k=0}^{N-1} s[k] \exp(-j2\pi ki / N)$$

$$G[i] = \sum_{l=0}^{N-1} g[l] \exp(-j2\pi li / N)$$

$$S_{\text{ВЫХ}}[i] = S_{\text{ВХ}}[i] G[i]$$

$$s_{\text{ВЫХ}}[k] = (1/N) \sum_{i=0}^{N-1} S_{\text{ВЫХ}}[i] \exp(-j2\pi ki / N)$$



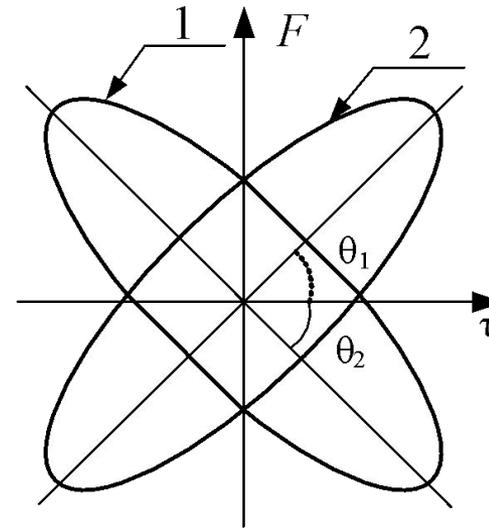
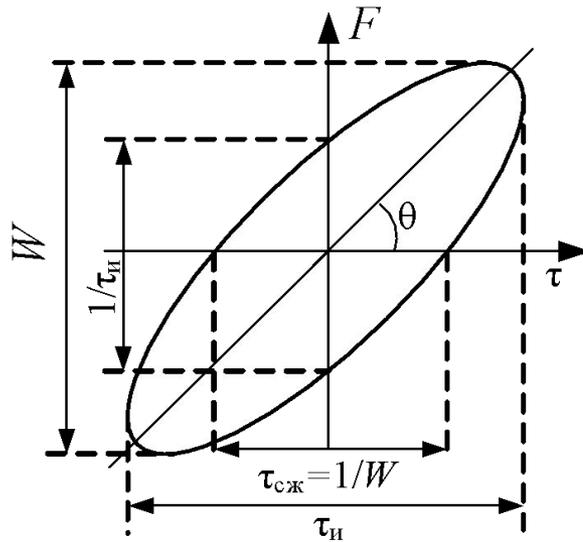


– временное смещение $\Delta\tau = F_{д}/b$ – для линейно убывающего закона изменения частоты; $\Delta\tau = -F_{д}/b$ – для линейно возрастающего;

– амплитуда основного лепестка уменьшается пропорционально $(1 - F_{д}/W)$;

– ширина основного лепестка по уровню 0,5:

$$\Delta\tau_{\text{выху}} = 1/(W - |F_{д}|).$$

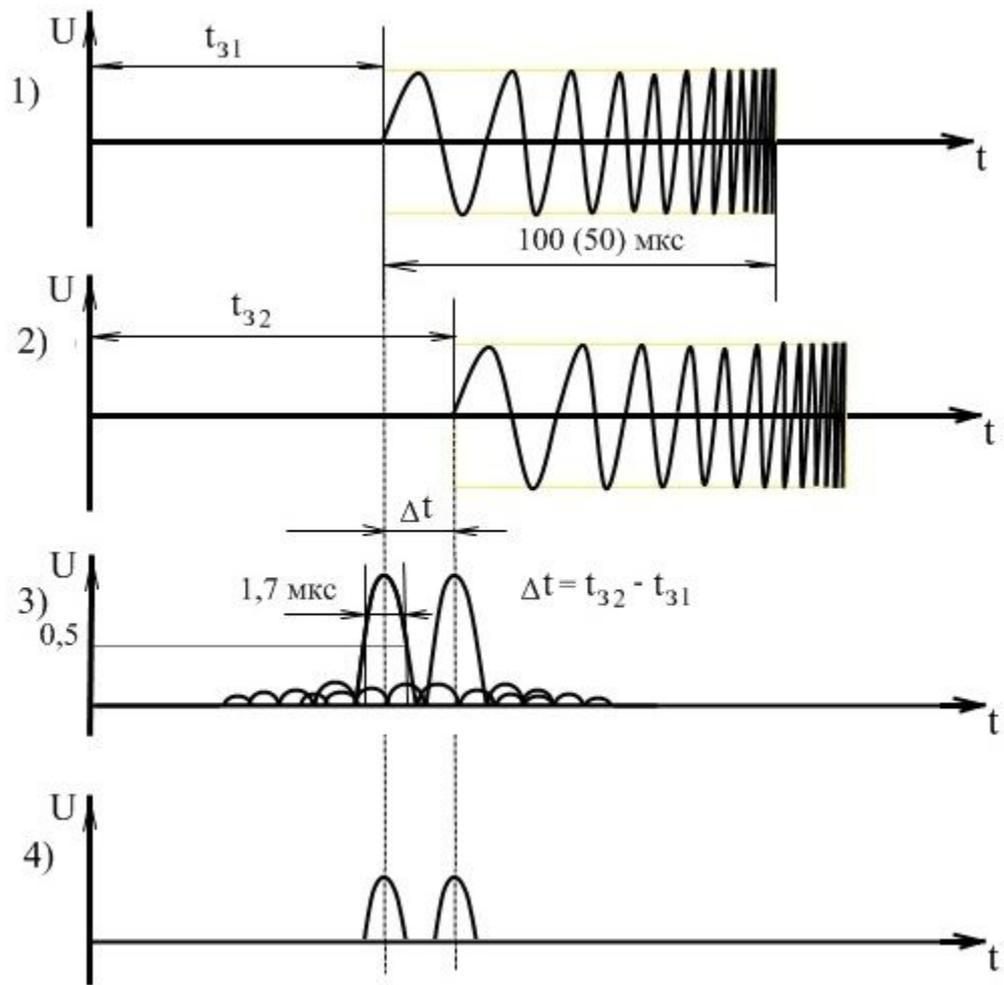


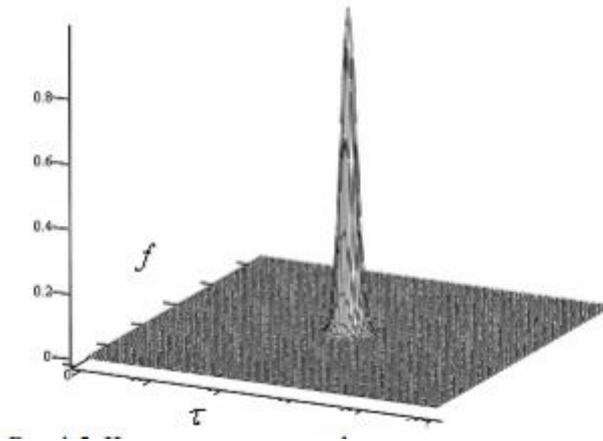
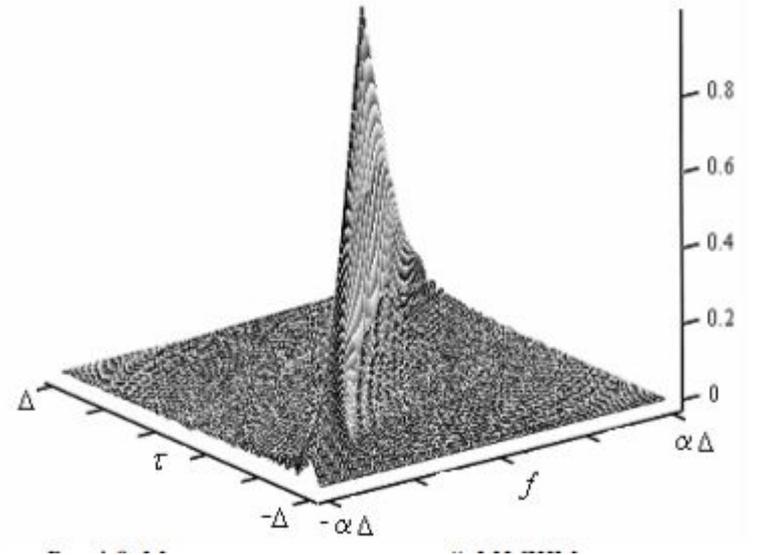
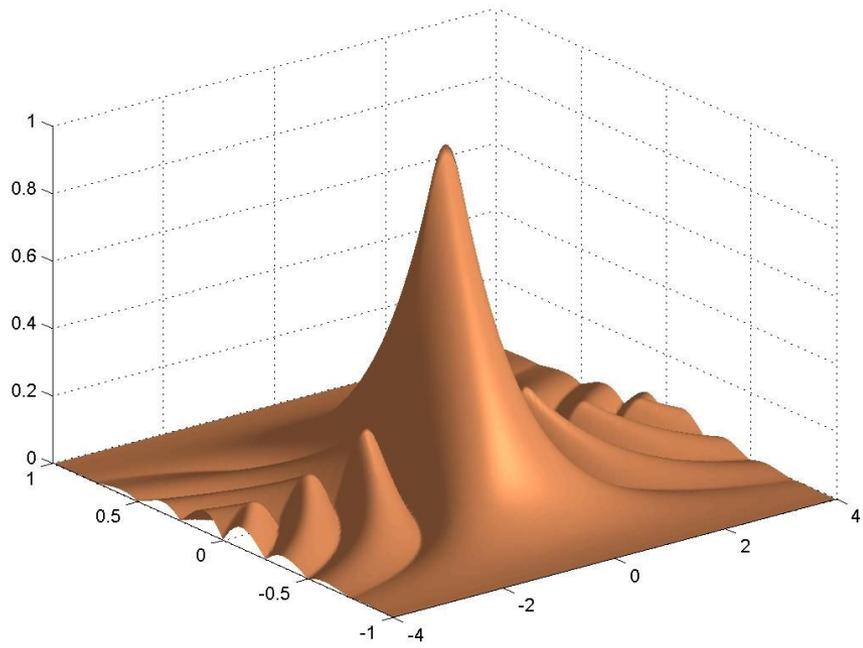
$\theta_2 = -\arctg(W/\tau_{и})$ – для линейно убывающего закона изменения частоты(1); $\theta_1 = \arctg(W/\tau_{и})$ – для линейно возрастающего (2).

Для ЛЧМ сигнала разрешение по дальности и скорости РЛС соответственно:

$$\Delta R = c\tau_{и}/2B = c\tau_{сж}/2 = c/2W,$$

$$\Delta v_r = (\lambda\Delta f)/2 = 0,5\lambda/\tau_{и}.$$



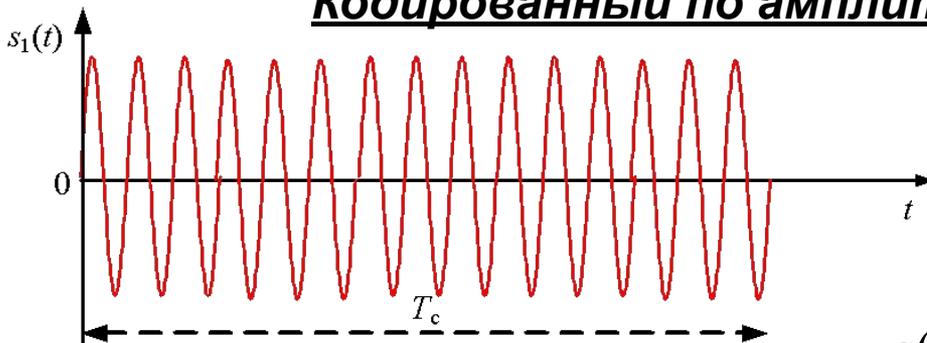


Дискретно-кодированные сигналы

$$s(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \alpha_i U_{mi}(t) \exp(j[(\omega_{\text{н}} + \omega_i)t + \varphi + \varphi_i]) & 0 \leq t \leq T \\ \text{При других } t & \end{cases}$$

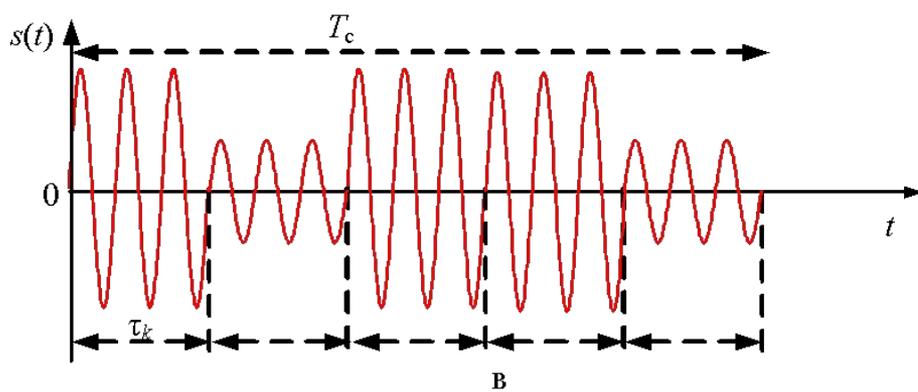
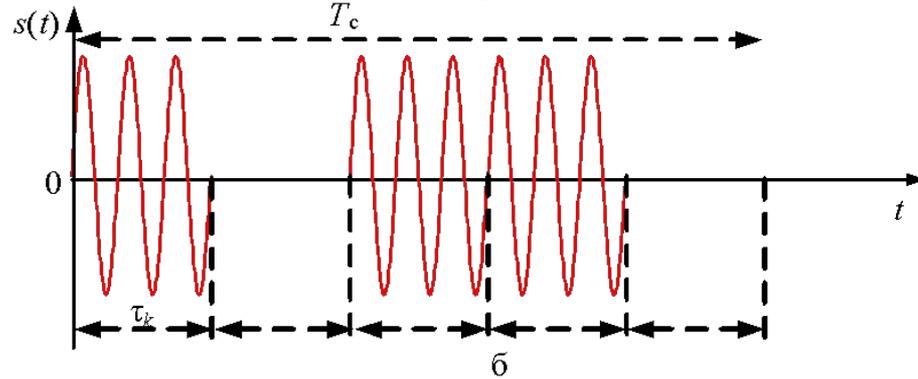
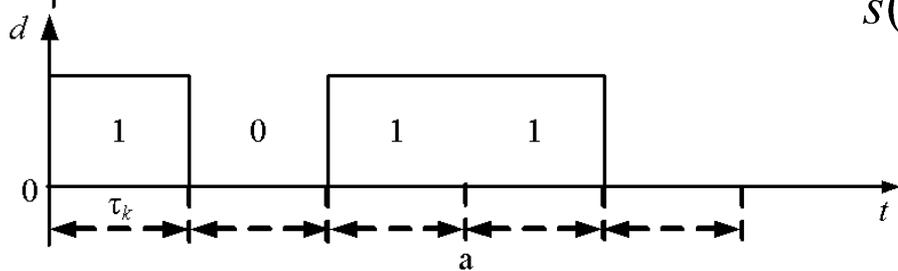
$$U_{mi}(t) = \begin{cases} A \exp(j(\omega_i - 1)t) & i\tau_k \leq t \leq (i+1)\tau_k \\ \text{При других } t & \end{cases}$$

Кодированный по амплитуде дискретный сигнал

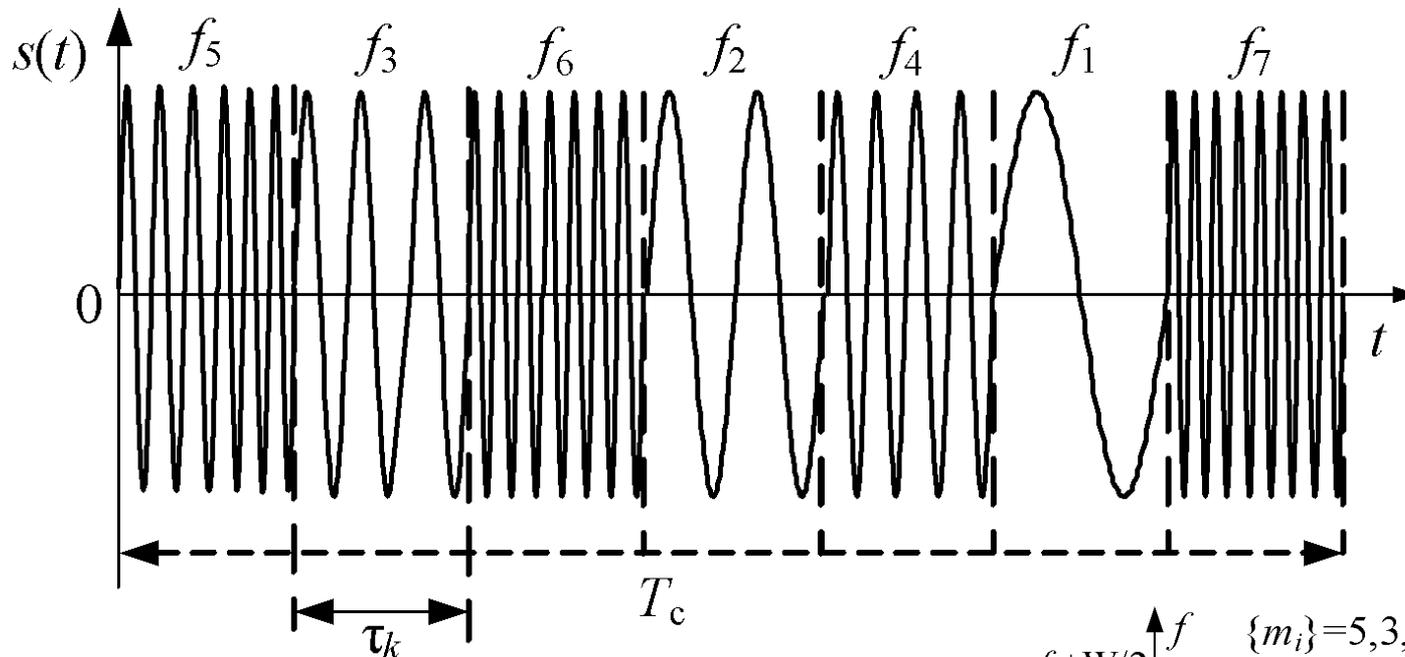


$$s(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \alpha_i U_{mi}(t) \exp(j[\omega_0 t + \theta_i]) & \leq t \leq T_c \\ \text{при других } t & \end{cases}$$

$$\{\theta_i\} = \{\alpha_i\}, \quad \{\omega_i\} = \{\varphi_i\} = 0$$

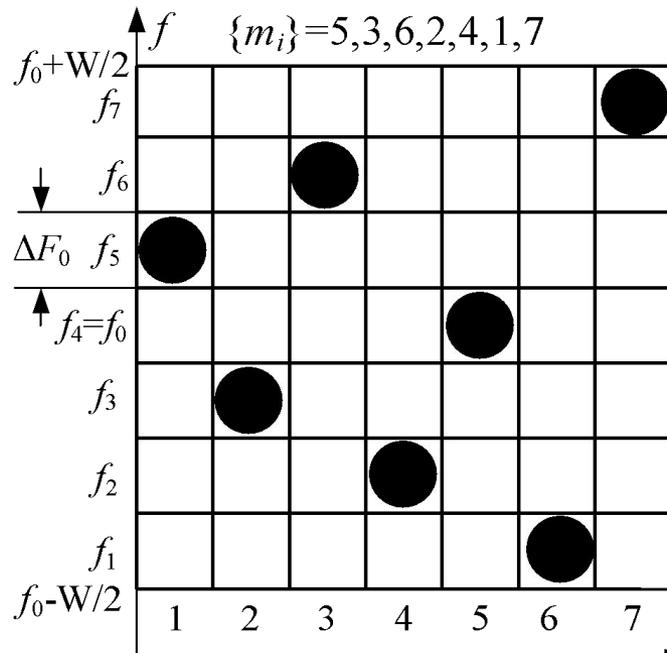


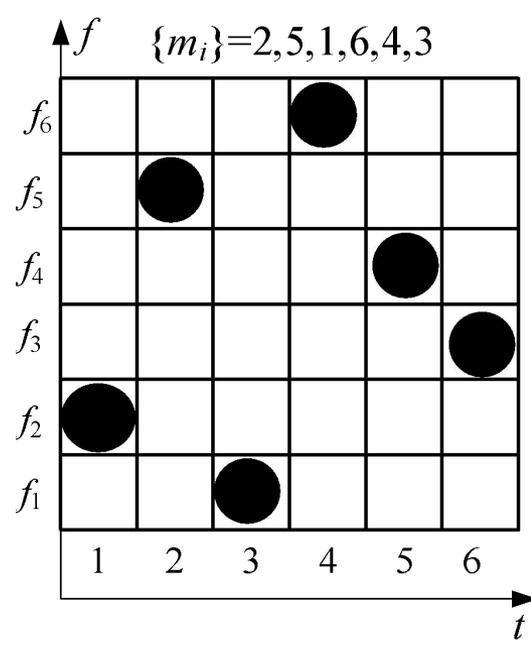
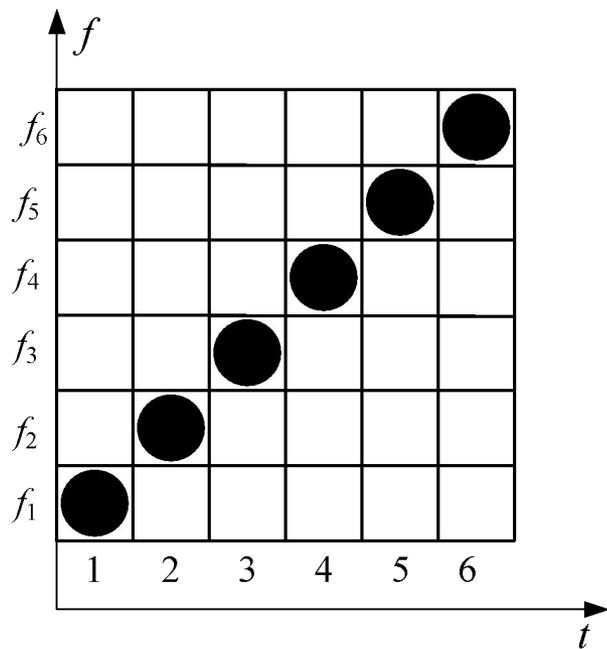
Частотно-кодированный сигнал



$$s(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N U_{mi}(t) \exp(j[2\pi(f_0 + f_i)t]) & \leq t \leq T_c \\ \text{при других } t & \end{cases}$$

$$\{\theta_i\} = \{f_i\}, \quad \{\alpha_i\} = 1, \quad \{\varphi_i\} = 0$$



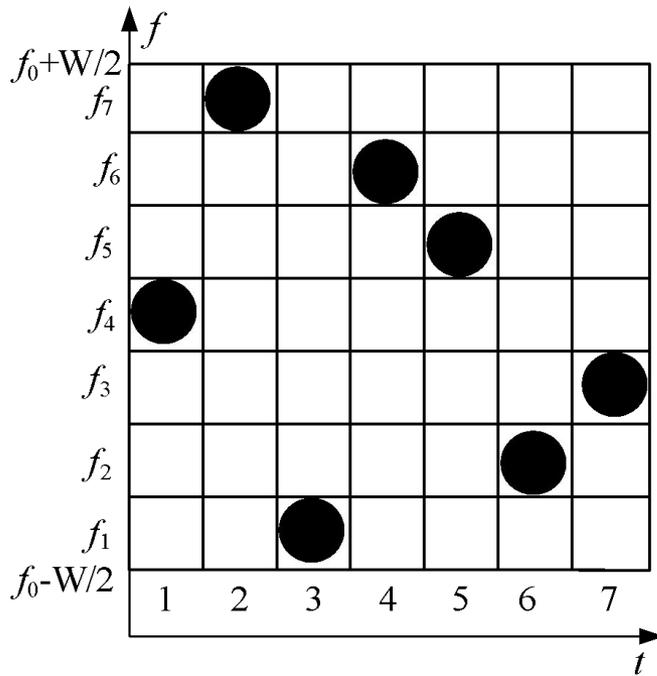


$$\Psi(\mathbf{F}, F) = \sum_{i=1}^{N-1} e^{j2\pi i F \tau} \left\{ \left(\tau F \right) + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq i}}^{N-1} \tau - i - n \tau_k F \right\}$$

$$\Phi_{in}(\tau, F) = \tau_k \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_k} \right) \frac{\sin \alpha}{\alpha} e^{-j\beta - j2\pi \Delta f_n \tau}, \quad |\tau| \leq \tau_k$$

$$\alpha = \pi(\Delta f_i - \Delta f_n - F)(\tau_k - |\tau|), \quad \beta = \pi(\Delta f_i - \Delta f_n - F)(\tau_k + \tau)$$

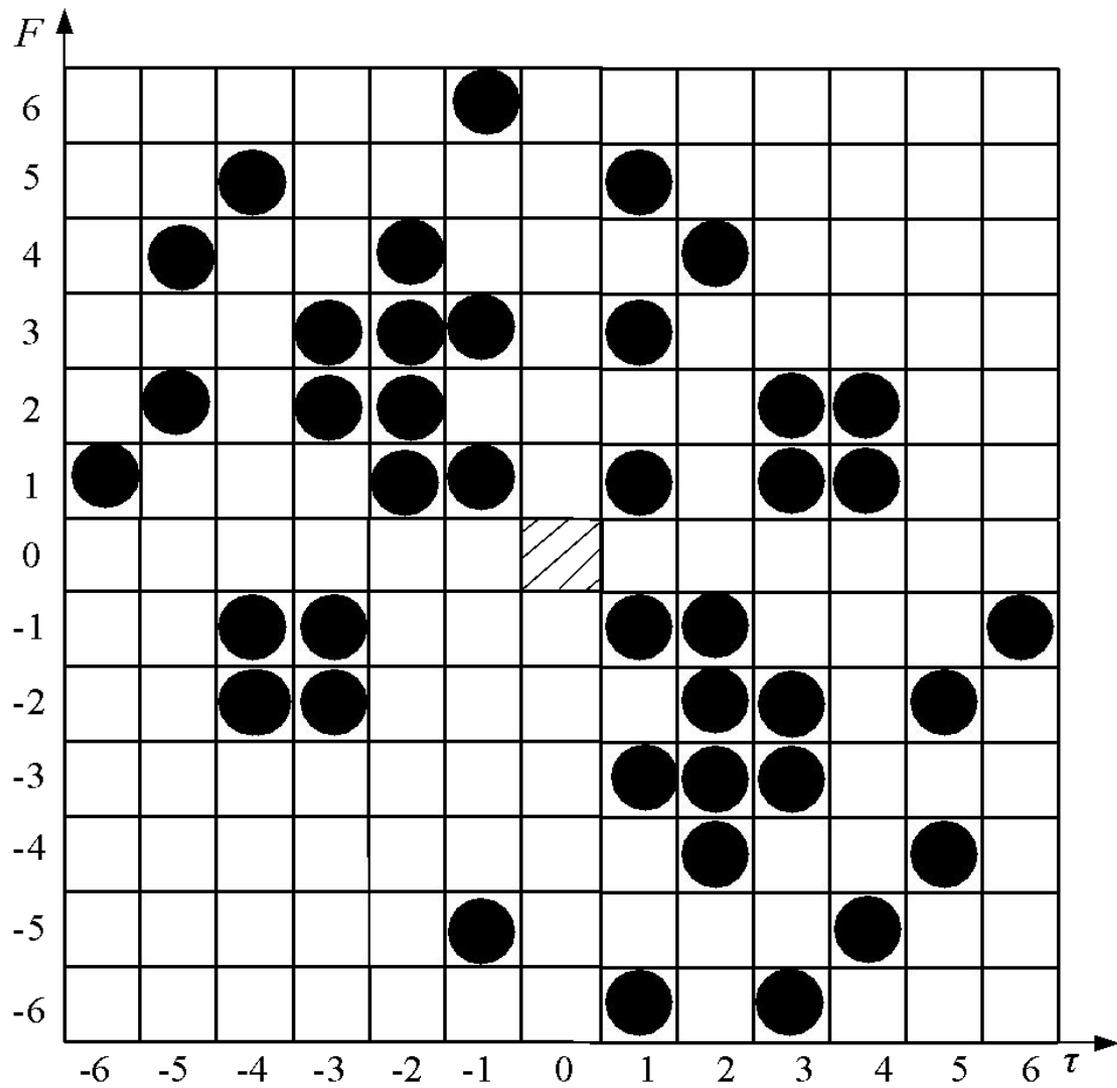
N	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
M	4	12	40	116	200	444	760	2160	4368	7852
N!/M	1.5	2	3	6.2	25.2	90.8	477	1680	9138	61003

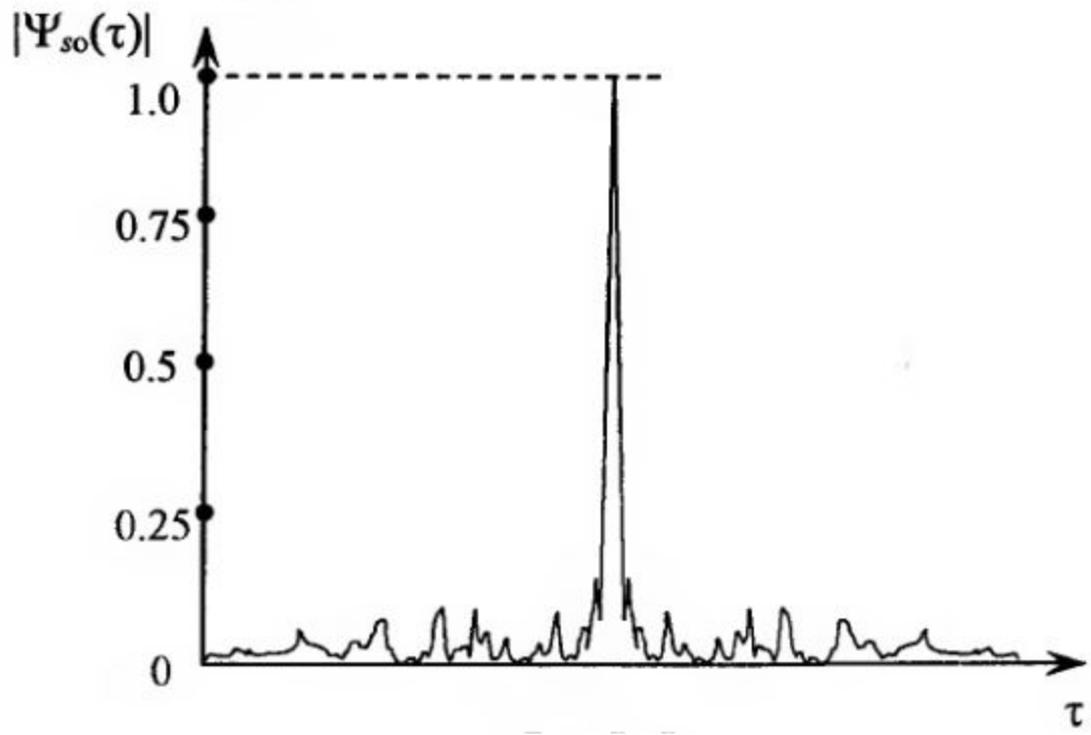


$$D_{ij} = m_{i+j} - m_i, \quad i+j \leq N,$$

$$D_{ij} = m_{i+j} - m_j.$$

i	1	2	3	4	5	6	7
m_i	4	7	1	6	5	2	3
$j=1$	3	-6	5	-1	-3	1	
$j=2$	-3	-1	4	-4	-2		
$j=3$	2	-2	1	-3			
$j=4$	1	-5	2				
$j=5$	-2	-4					
$j=6$	-1						





$$\tau_{\text{БЫХ}} = 1 / (N \Delta f),$$

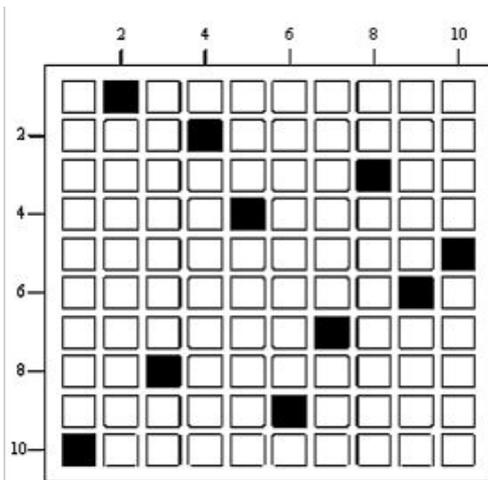
$$\tau_{\text{БЫХ}} = \tau_k / N$$

Алгоритмы Голомба, Уэлча и Лемпеля

Для произвольного простого числа $p > 2$ конструкция Уэлча дает $(n \times n)$ массив Костаса W_1 с $n=p-1$ и массив W_2 с $n=p-2$. Для некоторых простых чисел можно построить массив Костаса W_3 с $n=p-3$.

Эти конструкции используют таблицу логарифмов поля $G(p)$, где p – нечетное простое число, а основание a является примитивным элементом этого поля.

Теорема Уэлча: «Пусть q – примитивный корень по модулю простого целого числа p . В этом случае перестановочная матрица размером $(p-1) \times (p-1)$ с $a_{i,j} = 1$ тогда и только тогда, когда $j = q^i \bmod p$, $1 < i, j < p-1$, есть матрица Костаса.



$$j = q^i \bmod p,$$

$$q=2, p=11$$

Рис. 1. Матрица Костаса, полученная с помощью алгоритма Уэлча

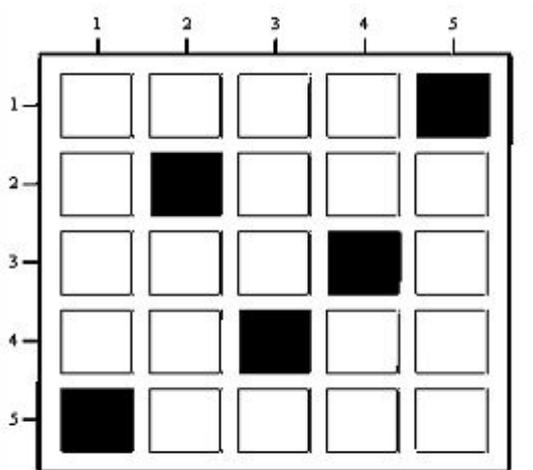


Рис. 2. Матрица Костаса, полученная с помощью алгоритма Лемпеля

$$(a^j + a^i) = 1 \pmod{q},$$

$$q=7, a=5$$

$$1 < i, j < q-2$$

$$(5^j + 5^i) = 1 \pmod{7},$$

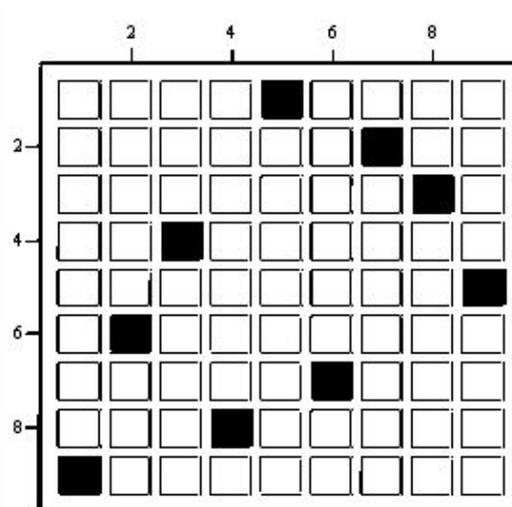


Рис. 3. Матрица Костаса, полученная с помощью алгоритма Голомба.

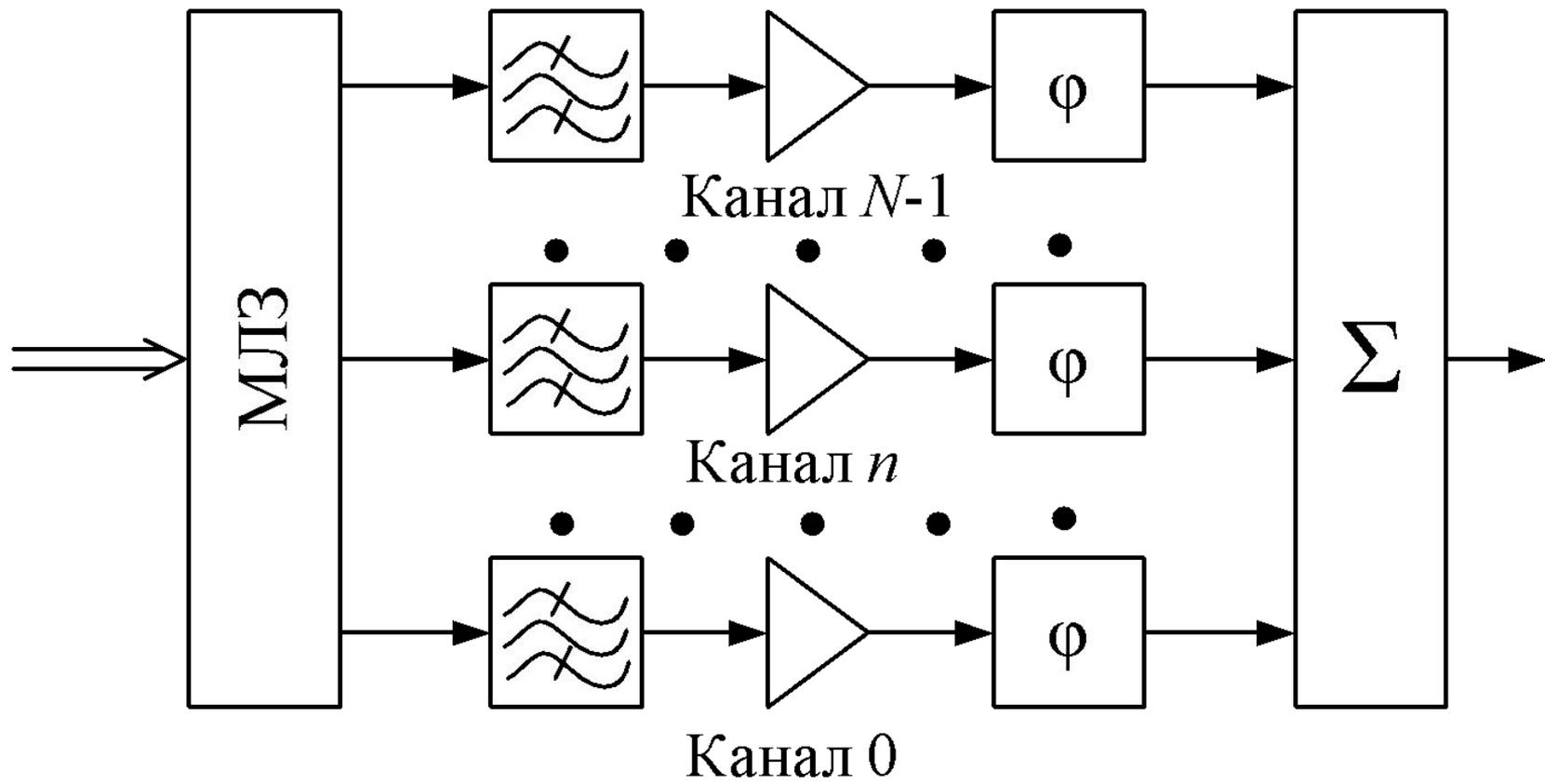
$$(a^j + b^i) = 1 \pmod{q},$$

$$q=11, n=9$$

$$a=2, b=6$$

$$(2^j + 6^i) = 1 \pmod{11},$$

Согласованный фильтр для частотно-кодированного сигнала



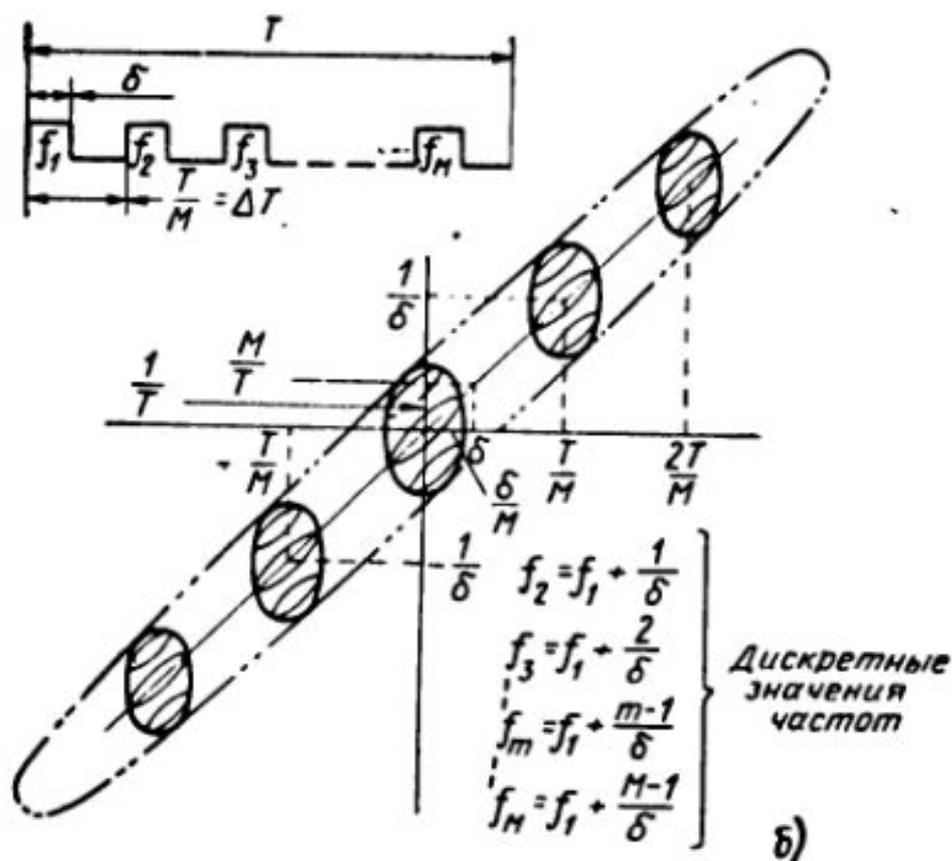
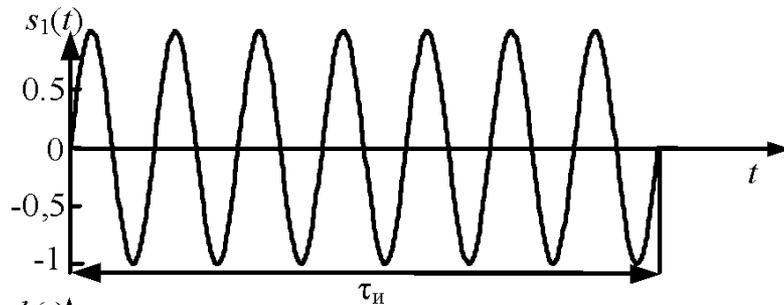


Рис. 8.34. Контурь сечения на заданном уровне функций отклика сигналов со ступенчатой ЧМ:
 а — непрерывная последовательность импульсов; б — последовательность отстоящих друг от друга импульсов.

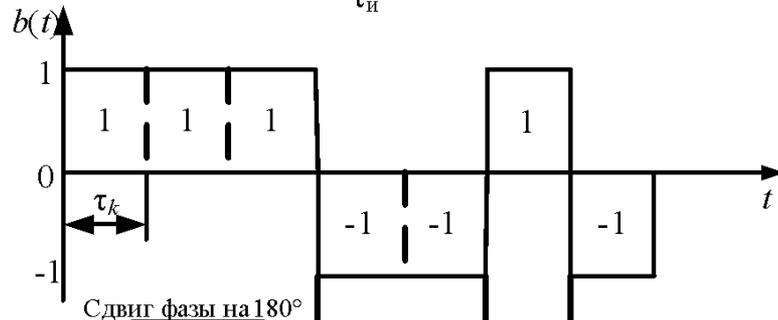
Кодированные по фазе (фазо-кодо-модулированные (ФКМ), фазоманипулированные (ФМн)) (бинарное кодирование)

$$s(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N U_{mi}(t) \exp(j[\omega_{\text{н}} t + \varphi + \varphi_i]), & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & , t > \tau_{\text{н}}, t < 0, \end{cases}, \quad \{\theta_i\} = \{\varphi_i\}, \{\alpha_i\} = 1, \{\omega_i\} = 0$$

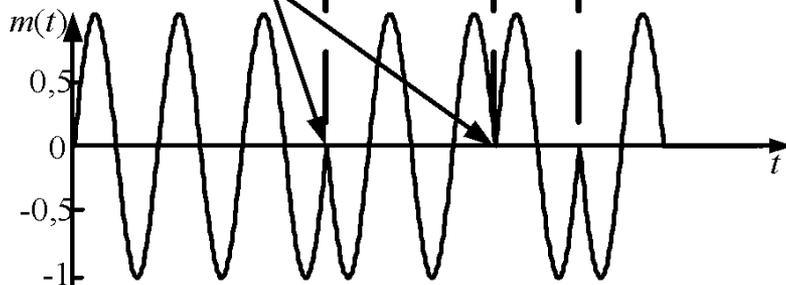


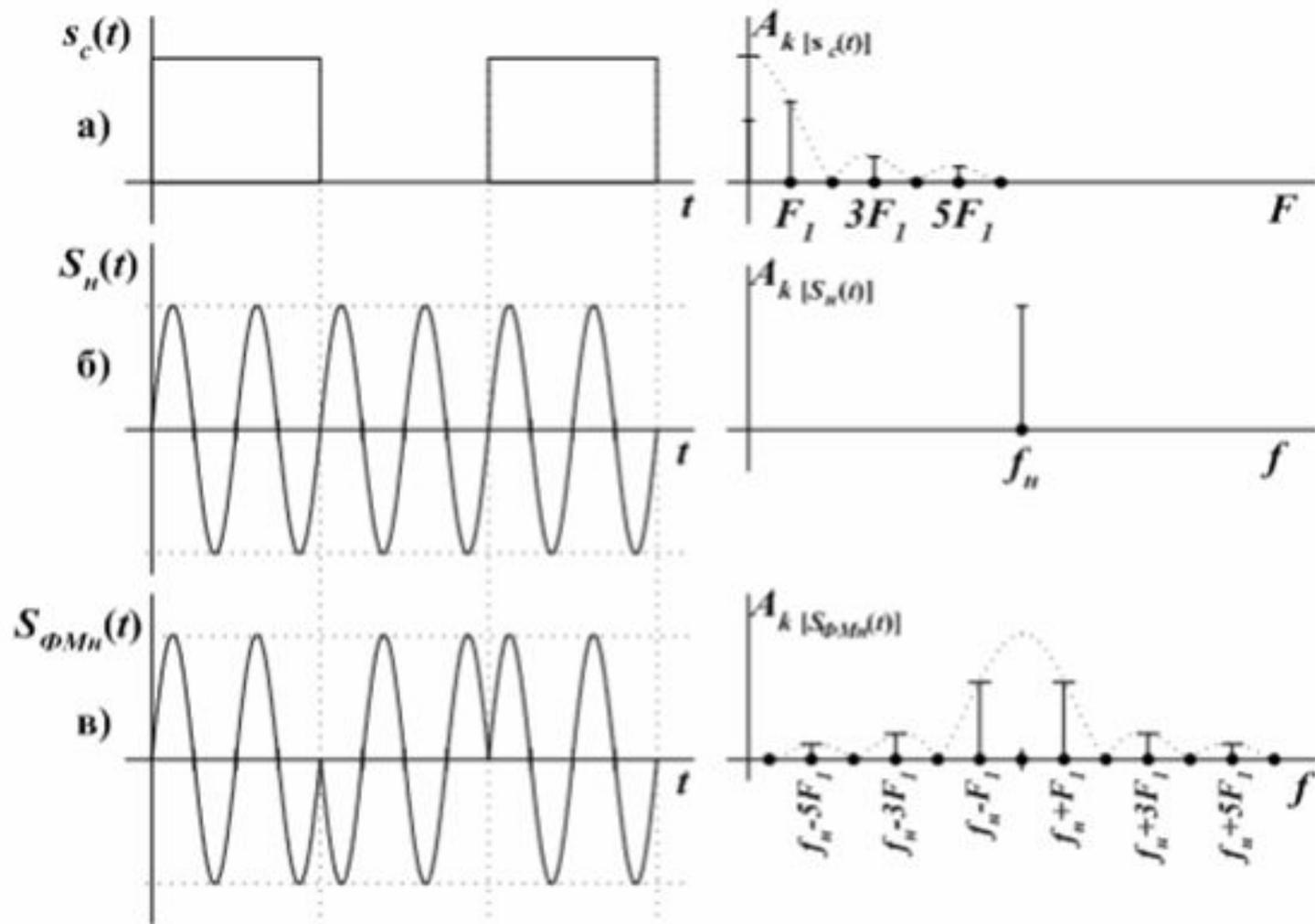
$$m(t) = b(t) s_1(t) = C b(t) \cos \omega_0 t.$$

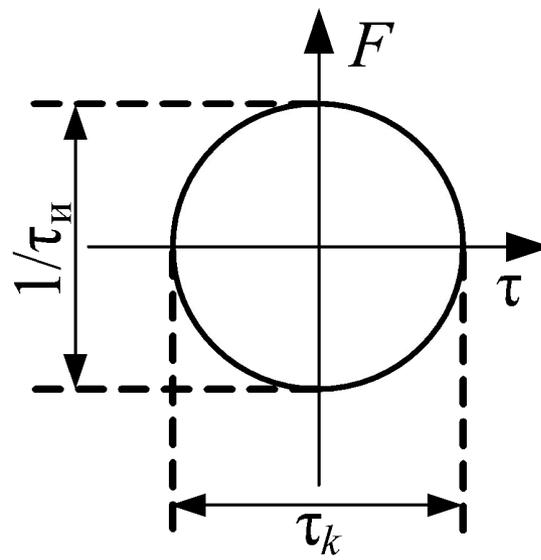
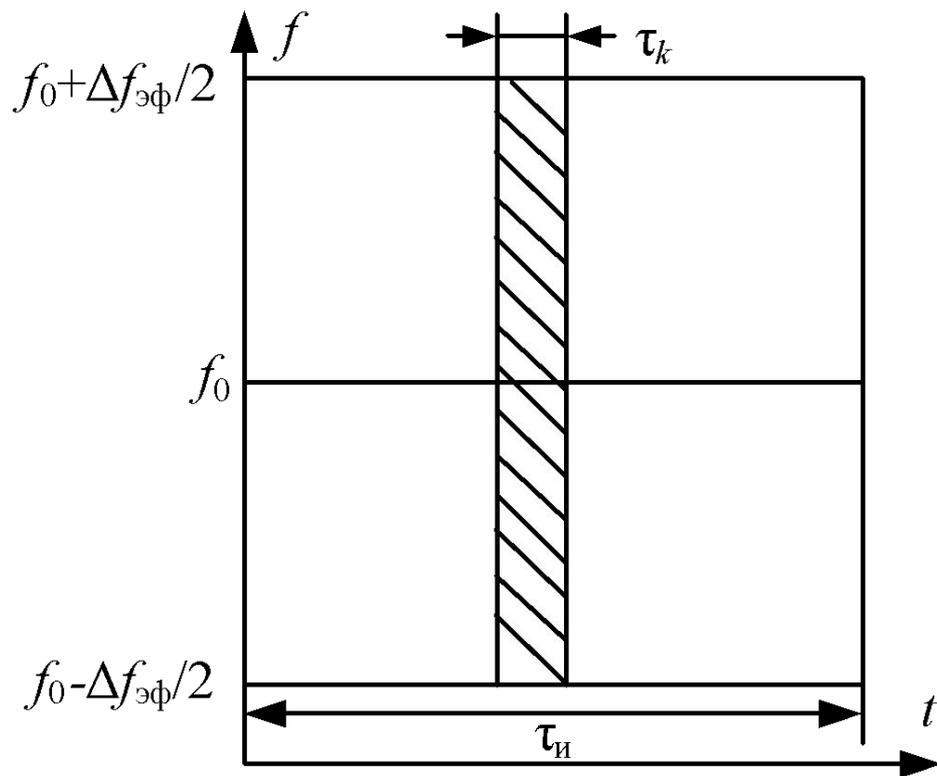
$$m_1(t) = +C \cos \omega_0 t, m_2(t) = -C \cos \omega_0 t$$



$$m(t) = C \cos (\omega_0 t + \varphi_{\text{н}} + \varphi_i)$$



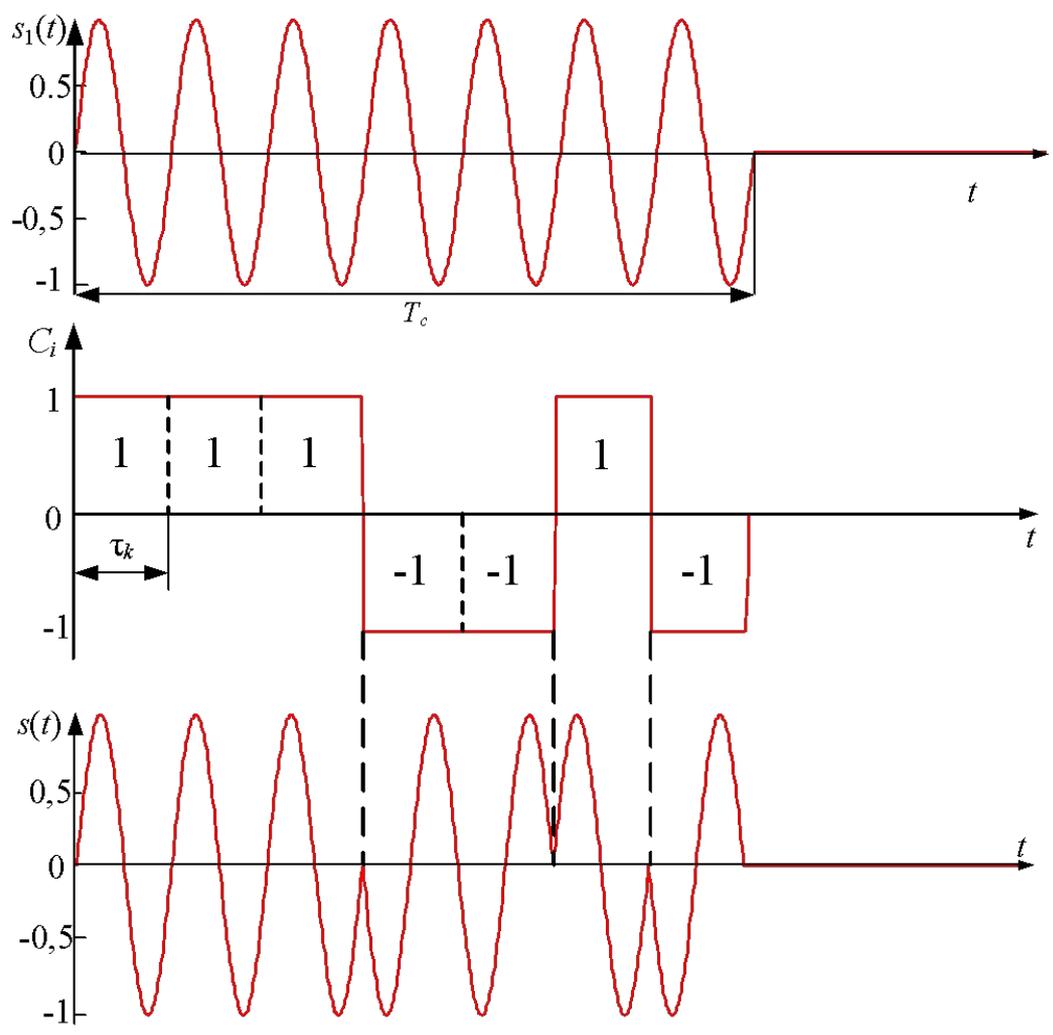


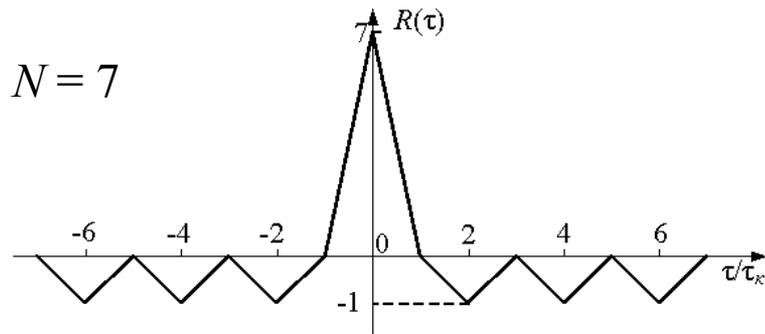


Коды Баркера

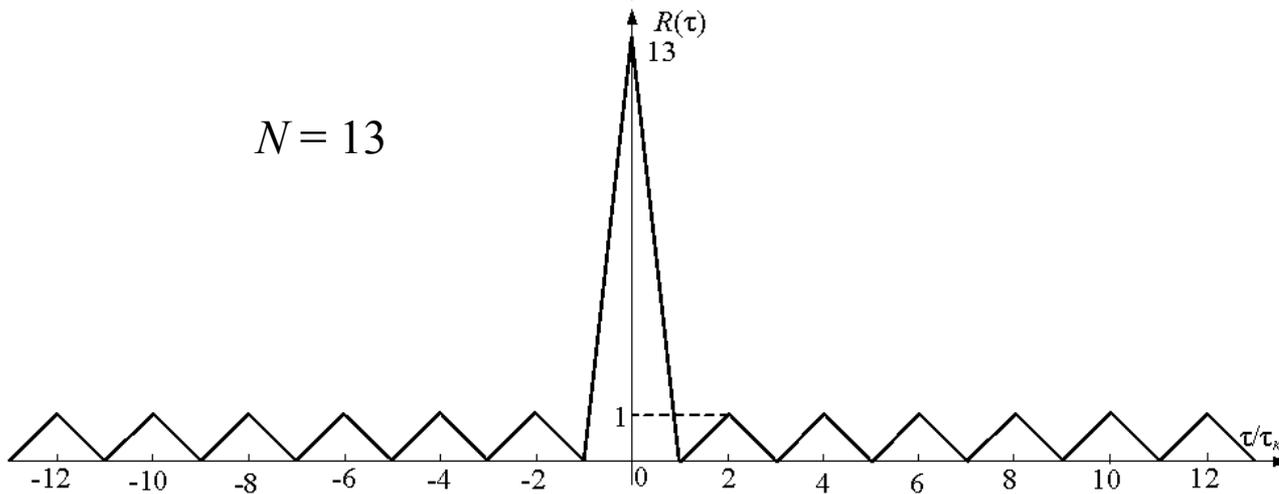
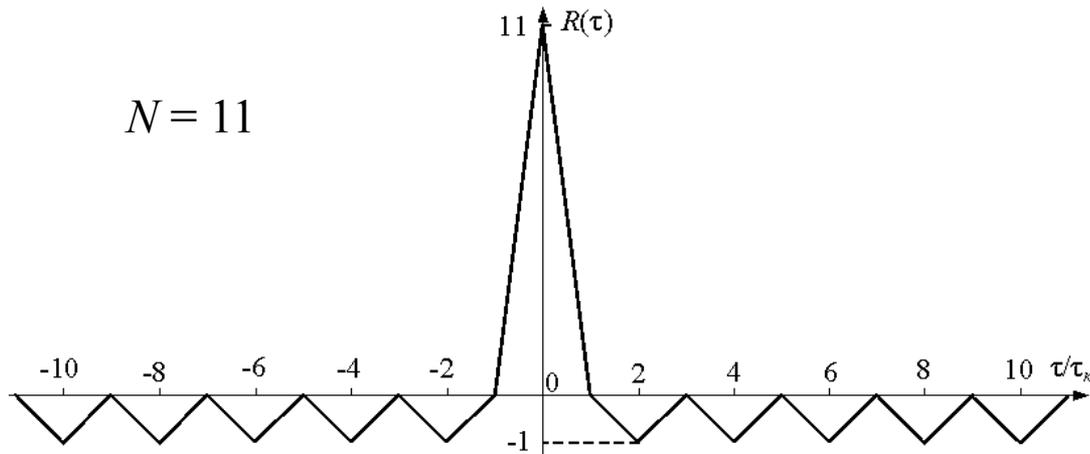
Длина	Уровень БЛ АКФ	Кодовые последовательности
2		а) +1 -1 б) +1 +1
3	-1/3	+1 +1 -1
4	1/4	а) +1 +1 -1+1 б) +1+1+1-1
5	1/5	+1+1+1-1+1
7	-1/7	+1+1+1-1-1+1-1
11	-1/11	+1+1+1-1-1-1+1-1-1+1-1
13	1/13	+1+1+1+1+1-1-1+1+1-1+1-1+1

Сигнал с модуляцией фазы 7-элементным кодом Баркера

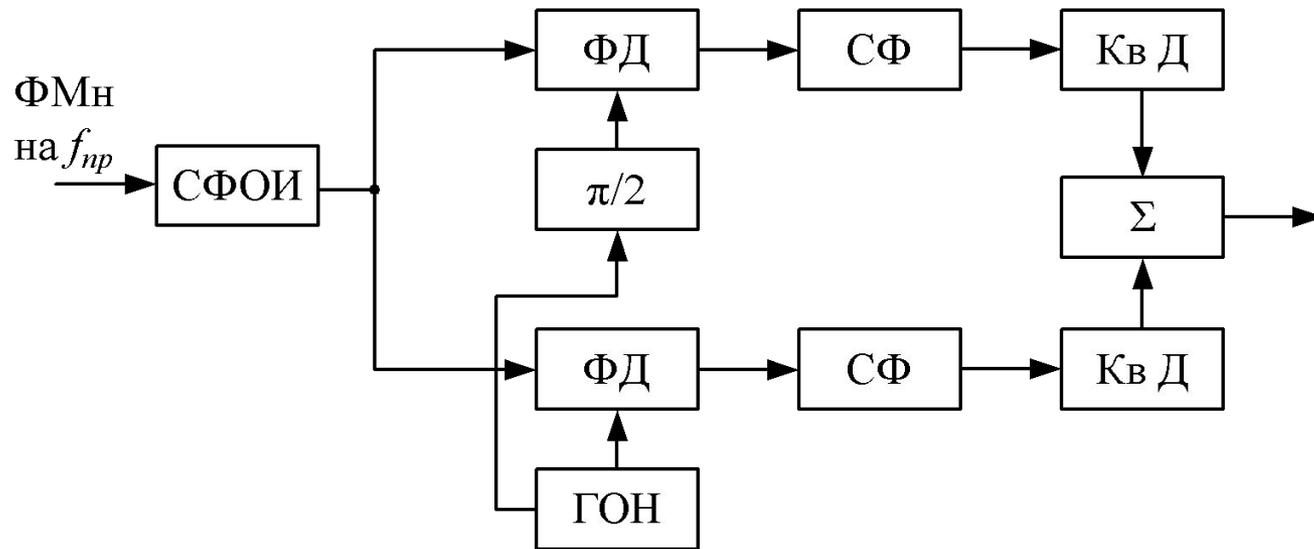




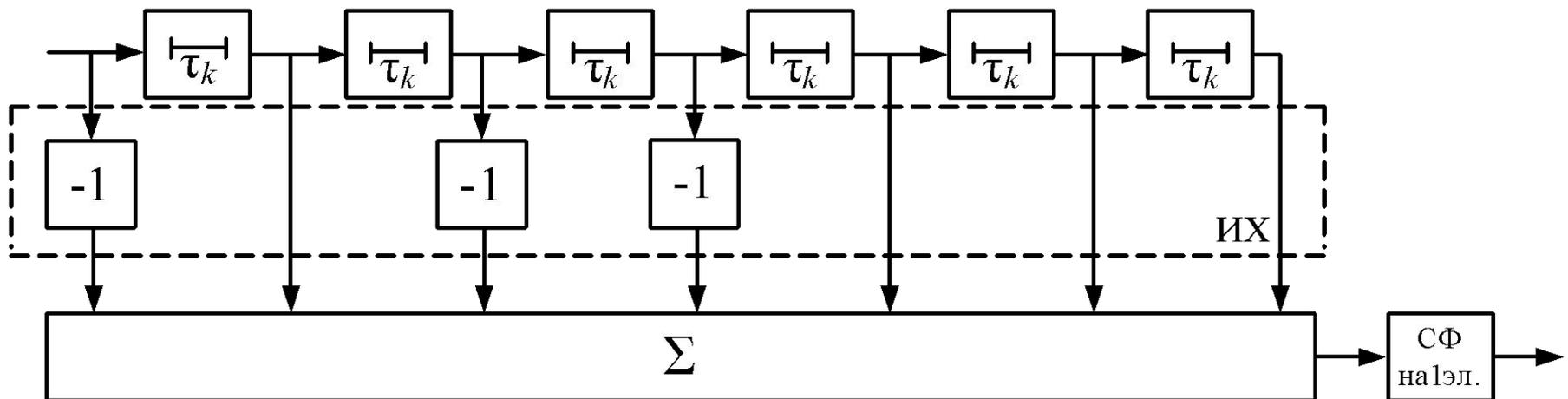
$$R(\tau) = \begin{cases} \text{при } / & 0 \leq \tau \leq \tau_k = l \\ 0 & 2 \leq \tau \leq l + \\ \pm 1 \text{ при } N / & 2\tau \leq l \end{cases}$$

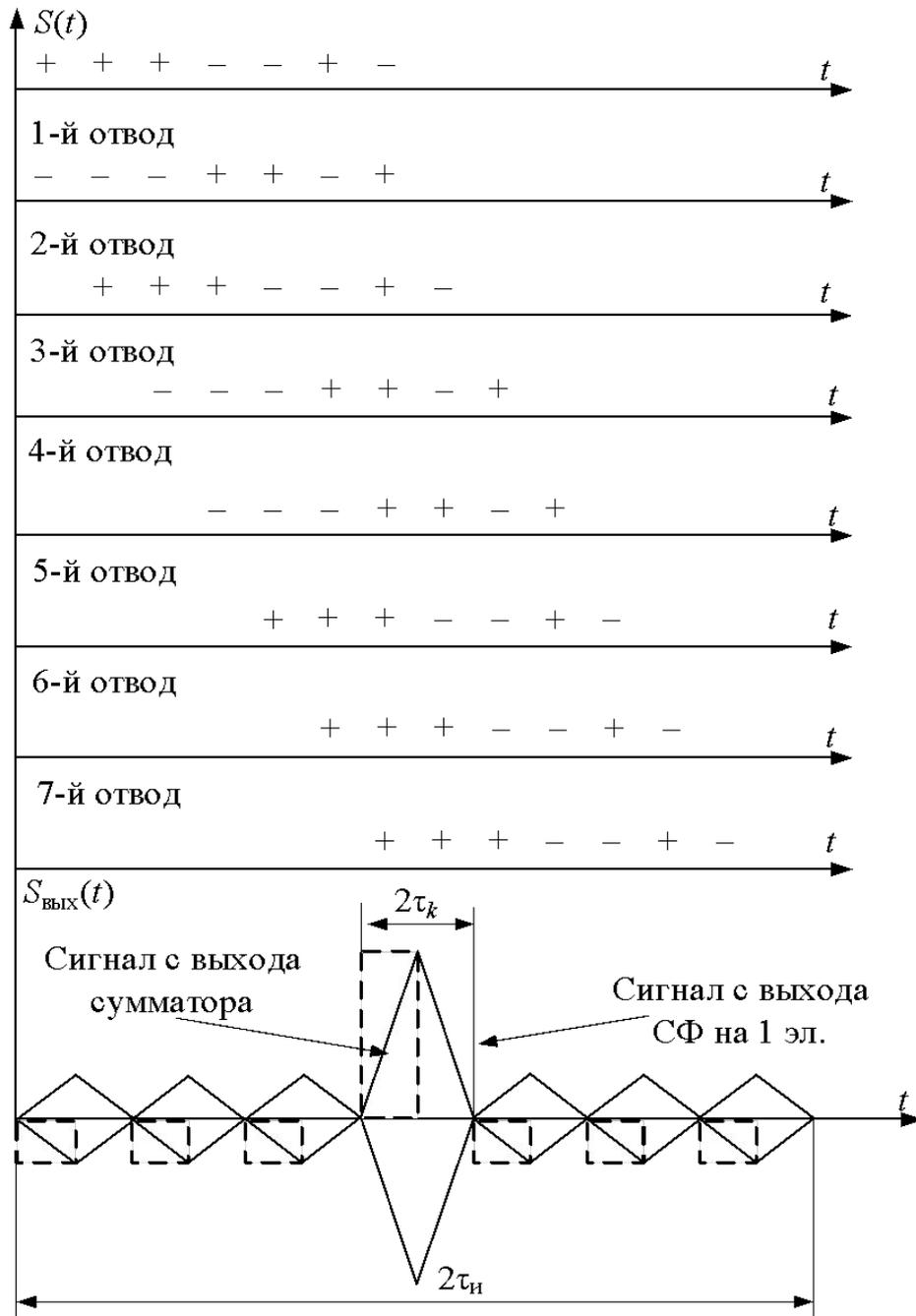


Согласованная фильтрация на видеочастоте



СФ 7-элементного кода Баркера





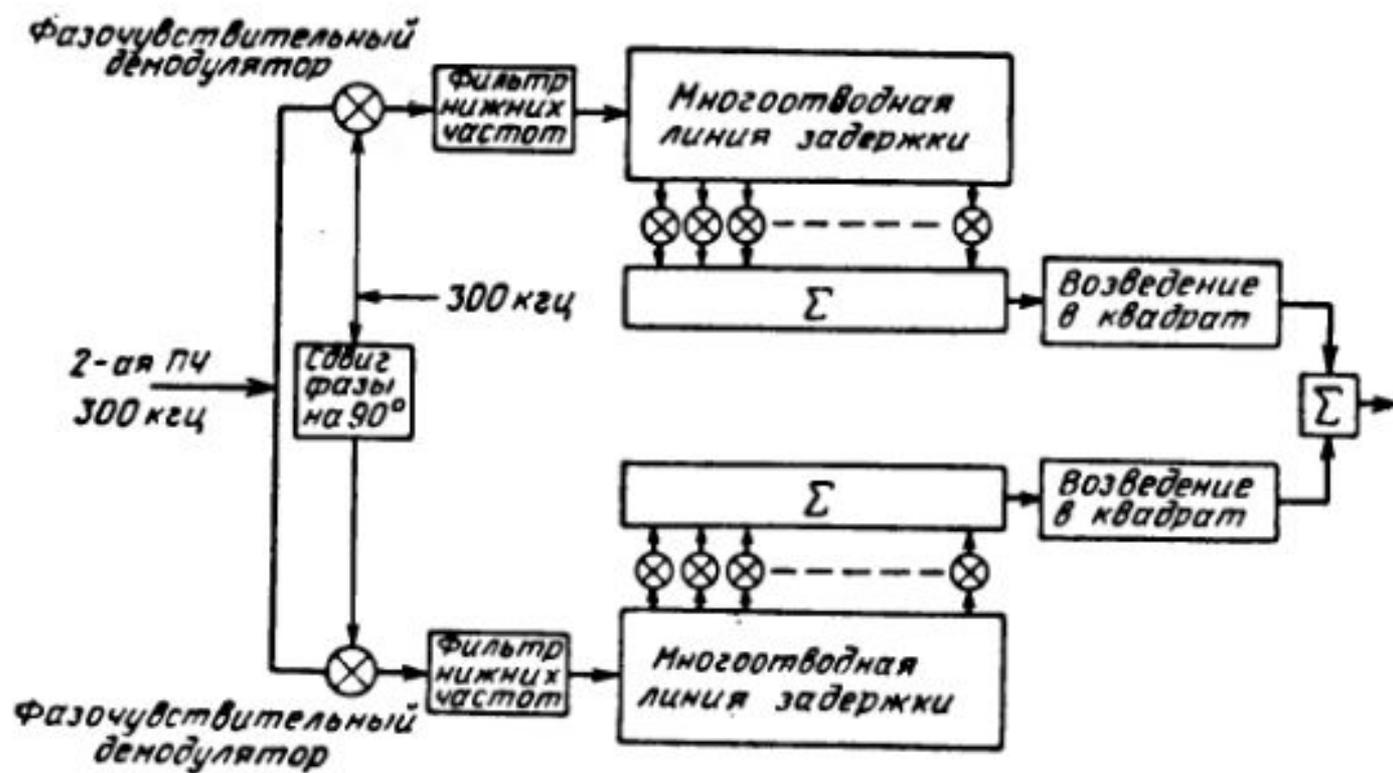
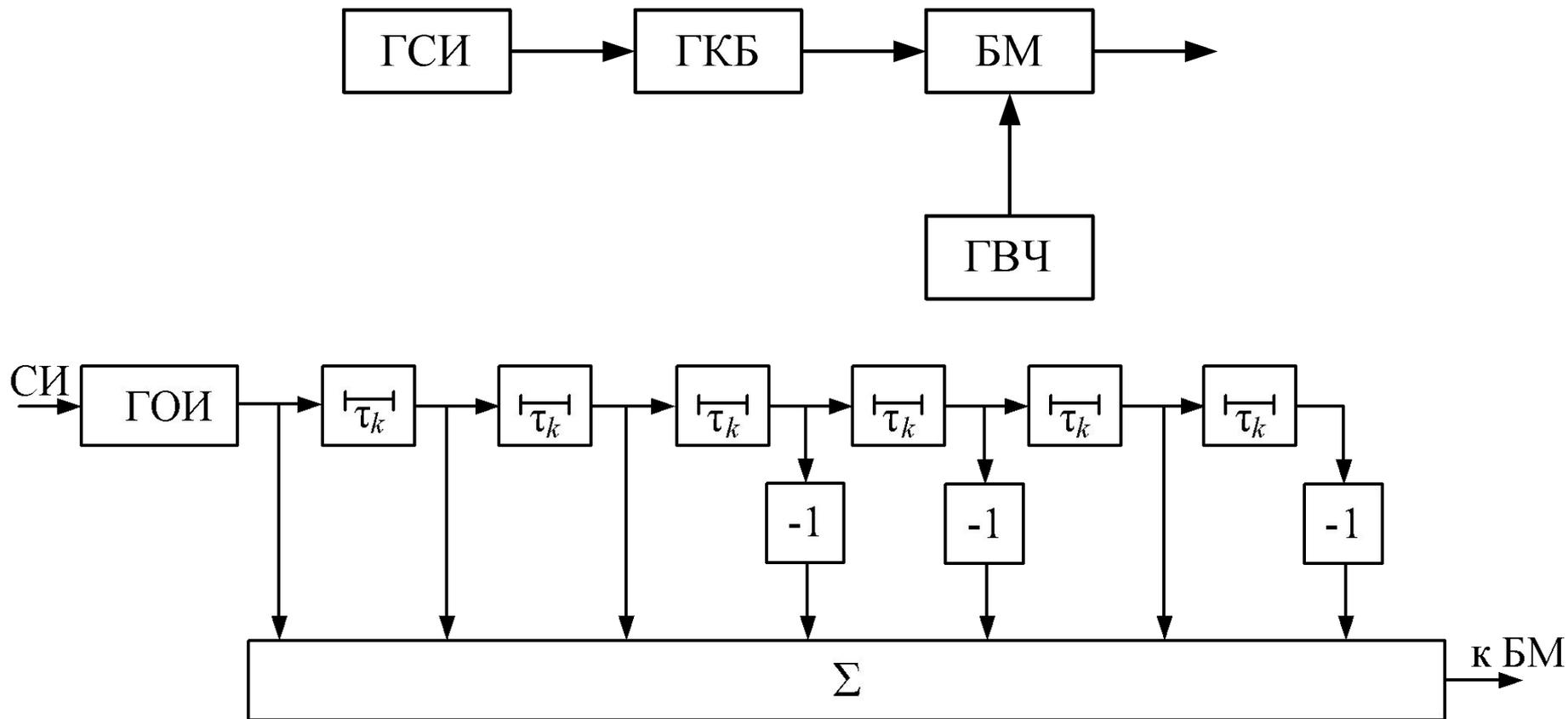
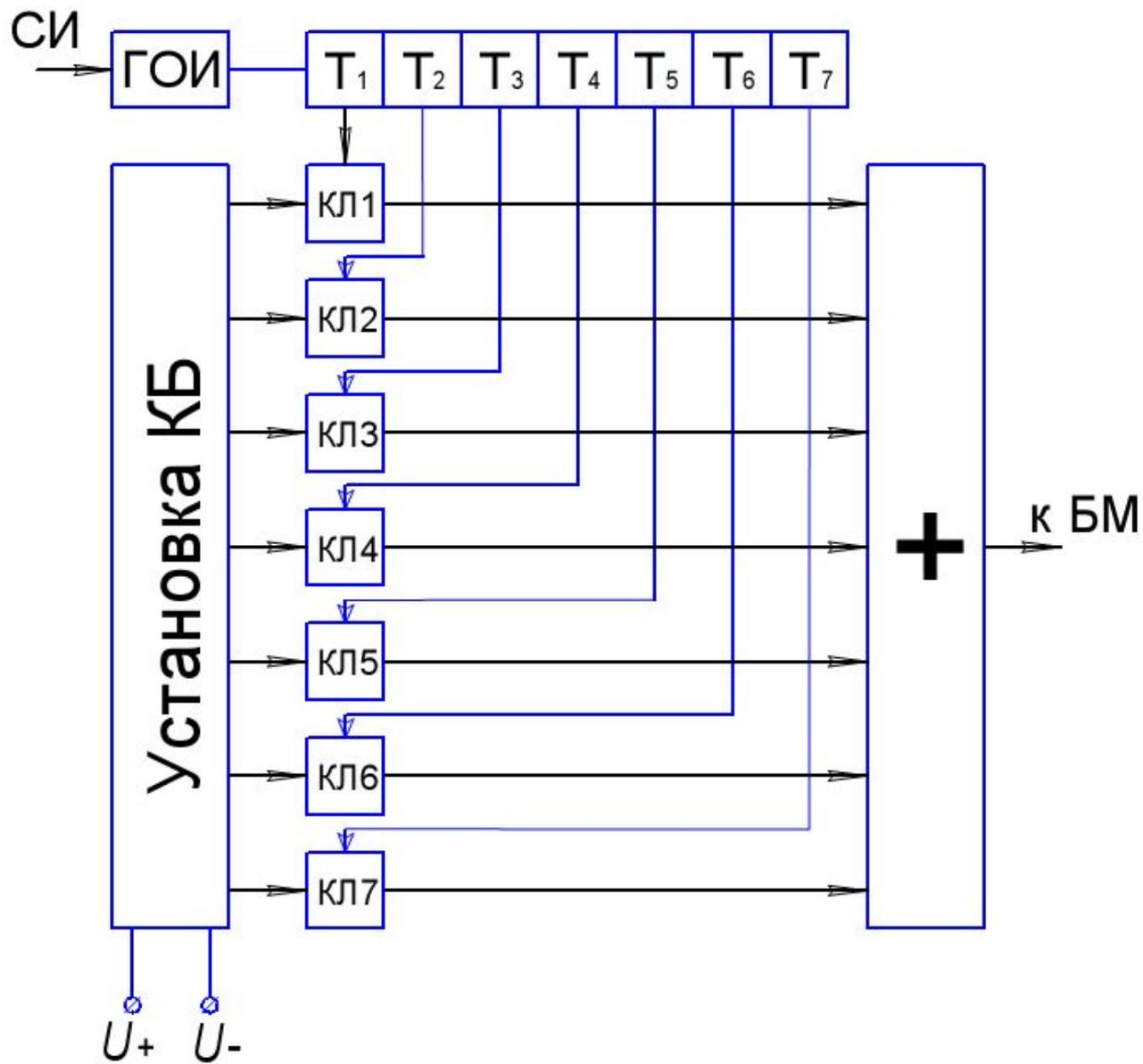


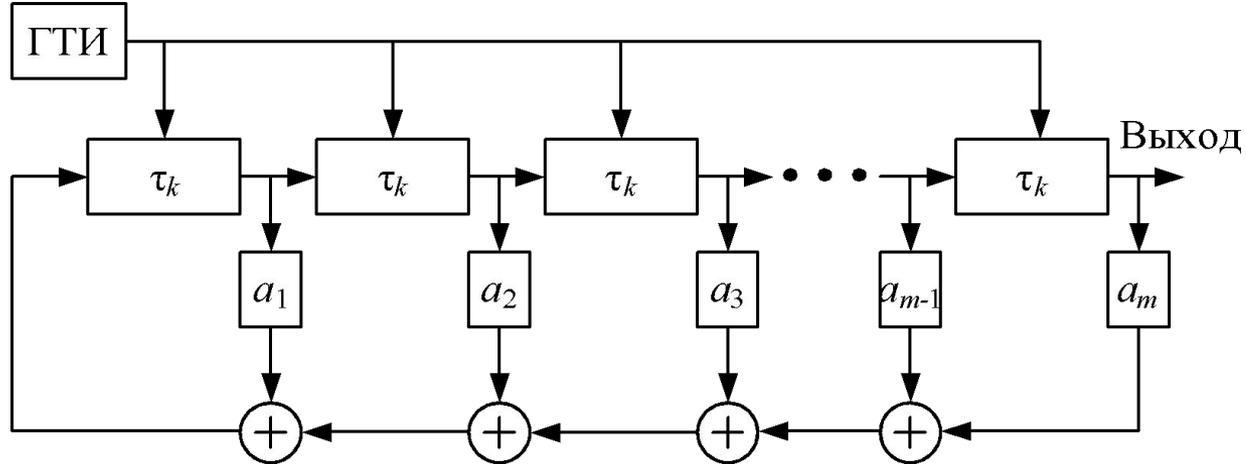
Рис. 8.47. Схема обнаружения, использующая квадратурные согласованные фильтры.

Формирование сигналов, модулированных по фазе кодом Баркера





- М-последовательности содержат $2^m - 1$ элементов и имеют длительность $T_c = \tau_k(2^m - 1)$; так как основание системы счисления (число различных символов) $p = 2$, а число разрядов регистра m , то число возможных различных состояний регистра равно $p^m = 2^m$. Однако из всех возможных состояний регистра запрещено одно, представляющее собой m нулей, так как появление этой комбинации приводит к обращению в нуль символов во всех других комбинациях;
- сумма 2-х М-последовательностей по модулю 2 является М-последовательностью;
- любые комбинации символов длины n на длине одного периода М-последовательности за исключением комбинации из n нулей встречаются не более одного раза. Комбинация из n нулей является запрещенной: на ее основе может генерироваться только последовательность из одних нулей; последовательности на единицу больше, чем количество символов;
- УБЛ АКФ периодической М-последовательности равен $1/N$; УБЛ АКФ усеченной М-последовательности, под которой понимается непериодическая последовательность длиной в период N , близок к $1/$

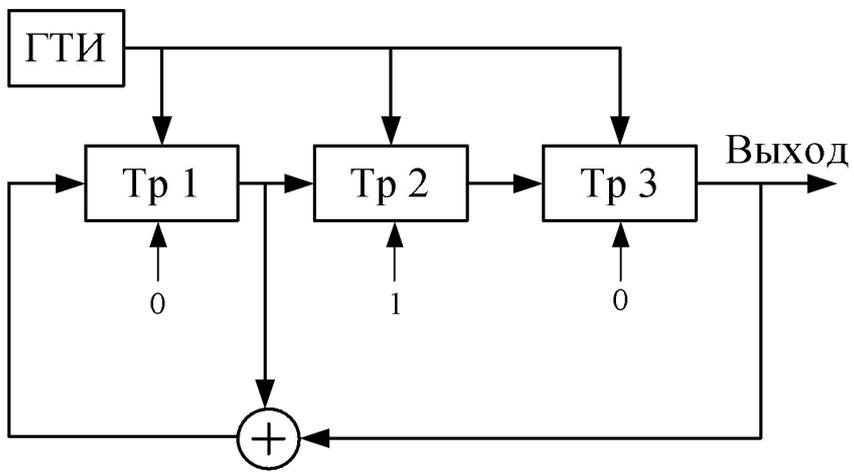


$$d_j = \sum_{i=1}^m a_i d_{j-i} = a_1 d_{j-1} \oplus a_2 d_{j-2} \oplus \dots \oplus a_m d_{j-m}$$

$$P(x) = x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_m x^m = 1 + a_1 x^1 + \dots + a_m x^m \quad x^i \rightarrow d_i$$

$$P(x) = d_i \oplus a_1 d_{i-1} \oplus \dots \oplus a_m d_{i-m} \quad x^i \rightarrow \tau_k^i$$

$$P(\tau_k) = \tau_k^0 \oplus a_1 \tau_k^1 \oplus \dots \oplus a_m \tau_k^m.$$

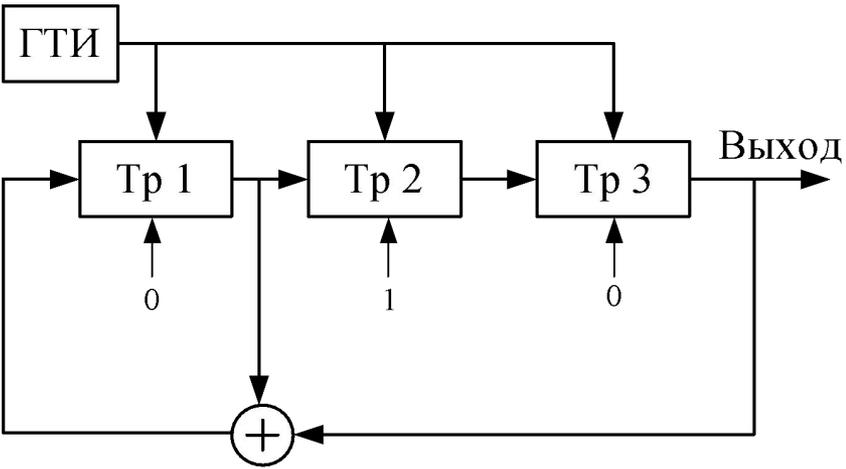


Для $m=3, N=7$

$$a_1 = a_3 = 1, a_2 = 0$$

$$P(\tau_k) = 1 \oplus a_1 \tau_k^1 \oplus a_2 \tau_k^2 \oplus a_3 \tau_k^3.$$

$$P(\tau_k) = 1 \oplus \tau_k^1 \oplus \tau_k^3.$$



Для $m=3, N=7$

$$a_1 = a_3 = 1, a_2 = 0$$

$$P(\tau_k) = 1 \oplus \tau_k^1 \oplus \tau_k^3.$$

№ такта	Состояние Tp1	Состояние Tp2	Состояние Tp3	Выход схемы
1	0	1	0	0
2	0	0	1	1
3	1	0	0	0
4	1	1	0	0
5	1	1	1	1
6	0	1	1	1
7	1	0	1	1

Правила синтеза схемы формирования M-последовательности на регистре сдвига:

- 1) число ячеек регистра $m = \lg(N+1)/\lg 2$, где N определяется требуемым уровнем боковых лепестков АКФ;
- 2) количество обратных связей определяется не равными 0 коэффициентами a_i ;
- 3) суммирование слагаемых производится по модулю 2;
- 4) последовательность смены кодовых символов определяется начальным блоком кода, т.е. начальной установкой символов бинарного кода в ячейке регистра;
- 5) В каждом периоде последовательности общее число единиц отличается от общего числа нулей не более чем на 1.

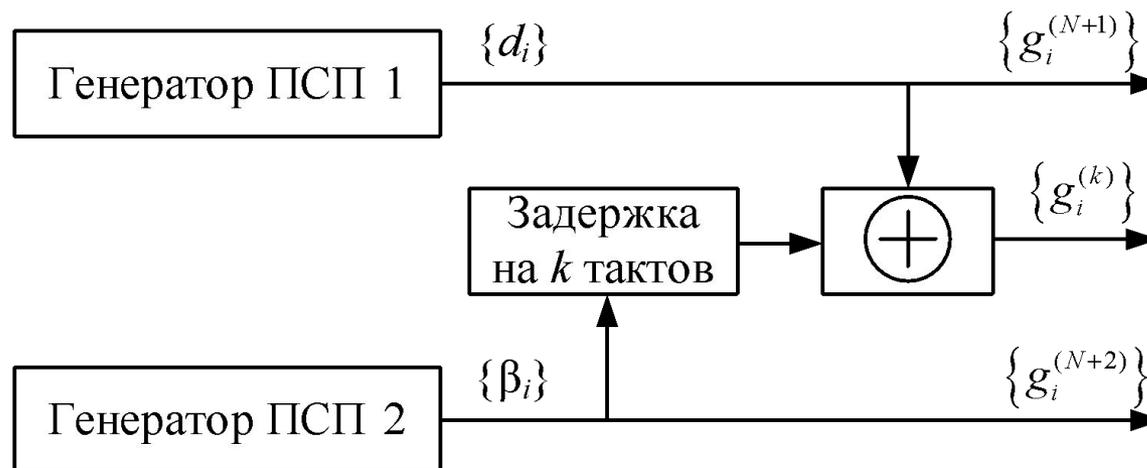
Коды Голда - тип псевдослучайных последовательностей

$\{d_i\}$ – бинарная M-последовательность длины (периода) $N = 2^m - 1$;

$\{\beta_i\}$ – бинарная M-последовательность длины (периода) $N = 2^m - 1$, полученная в результате проведения операции децимации с индексом ν , где ν взаимно прост с N . Децимация с индексом ν – выбор каждого ν -го символа $d_{i(\nu)}$ последовательности $\{d_i\}$, т.е. $\{\beta_i\} = \{d_{i(\nu)}\}$.

Индекс
децимации:

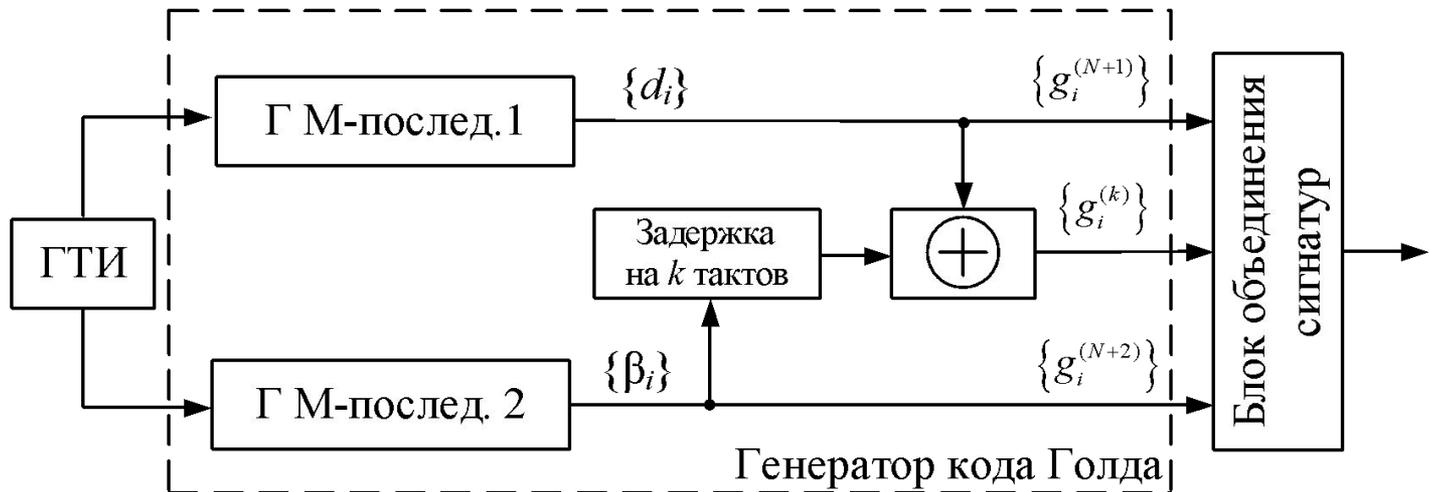
$$\nu = \begin{cases} 2^{(m+1)/2} + 1, & m \equiv 1 \pmod{2} \\ 2^{(m+2)/2} + 1, & m \equiv 4 \pmod{4} \end{cases}$$

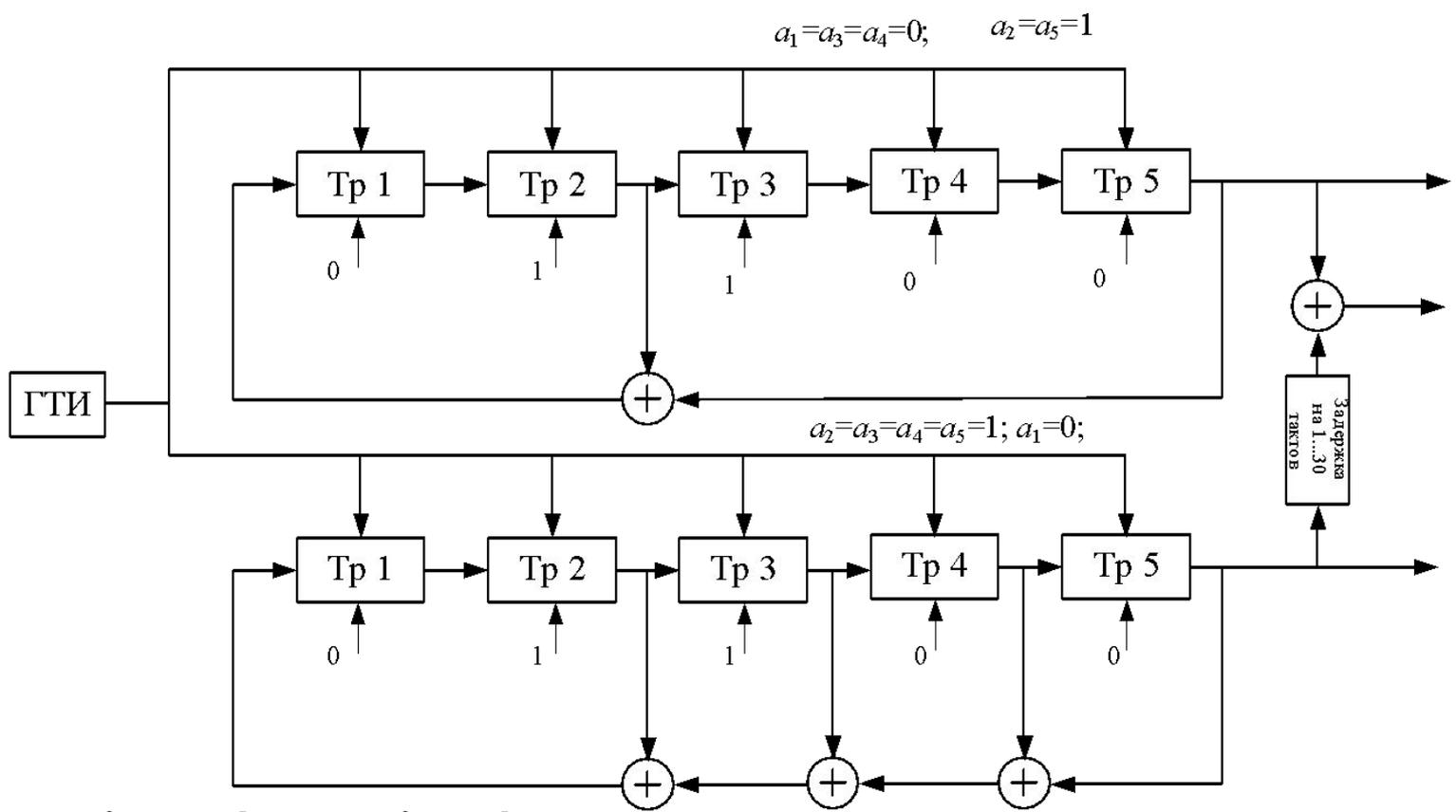


Построение сигнатур происходит посимвольным перемножением M -последовательности $\{d_i\}$ на циклически смещенные копии M -последовательности $\{\beta_i\}$, а в качестве еще двух сигнатур берутся исходные M -последовательности.

$$\begin{cases} g_i^{(k)} = d_i \oplus \beta_{i-k}, k = 1, 2, \dots, N, \\ g_i^{(N+1)} = d_i, \\ g_i^{(N+2)} = \beta_i. \end{cases} \quad \text{Ансамбль последовательностей Голда } \{g_i\}$$

В ансамбле содержится $K = N+2 = 2^m + 1$ сигнатур последовательностей Голда.





$$P_1(x) = a_1 x^2 + a_5 x^5 = 1 \oplus \tau^2 \oplus \tau^5,$$

$$P_2(x) = a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + a_5 x^5 = 1 \oplus \tau^2 \oplus \tau^3 \oplus \tau^4 \oplus \tau^5.$$

М-последовательность 1: 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 1 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0

М-последовательность 2: 1 1 1 1 1 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 0 0 1 1 1 0

Код Голда 1 (нет сдвига): 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 0 0 0 1 0

Код Голда 2 (сдвиг = 1): 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1

Код Голда 31 (сдвиг = 30): 1 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 1 0 1 0 1 1

Корреляционный пик ансамбля Голда:

$$\rho_{\max} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2(N+1)} + 1}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{N}, m = 1 \pmod{2}, \\ \frac{2\sqrt{(N+1)} + 1}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{N}}, m = 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

Для вариантов взаимосвязанных параметров m и ν :

1) m – нечетное число, $\nu = 2s + 1$, s взаимно просто с m ;

2) m – четное число, не кратное четырем, $\nu = 2s + 1$, s четно и взаимно просто с $m/2$;

боковые лепестки нормированной периодической КФ:
для первого варианта –

$$\rho(m) \in \left\{ \frac{\sqrt{2(N+1)} - 1}{N}, \frac{-2\sqrt{(N+1)} - 1}{N}, -\frac{1}{N} \right\}, m = 1, 2, \dots, N-1;$$

для второго варианта –

$$\rho(m) \in \left\{ \frac{\sqrt{2(N+1)} - 1}{N}, \frac{-\sqrt{2(N+1)} - 1}{N}, -\frac{1}{N} \right\}, m = 1, 2, \dots, N-1.$$

В GPS системе в качестве грубого кода используется код Голда, сформированный из 2-х M-последовательностей с образующими полиномами:

$$P_1(x) = 1 + x^3 + x^{10},$$

$$P_2(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^6 + x^8 + x^9 + x^{10}.$$

Обе M-последовательности имеют одинаковую такую частоту и период. Для получения дальномерного кода эти последовательности складываются

по модулю 2:

$$P_i(t) = P_1(t) \oplus P_{2i}(t) = P_1(t) \oplus P_2(t + n_i \tau_k).$$

где n_i – количество символов, задающее фазовый сдвиг кода i -го спутника.

Включение члена $n_i \tau_k$ в дальномерный код связано с применяемой в системе GPS кодовой (структурной) селекцией сигналов спутников.

В основе выделения ШПС требуемого НИСЗ лежит образование корреляционной функции с формируемым в аппаратуре потребителя кодом, соответствующим выбранному спутнику. Поэтому коды, присвоенные каждому из спутников, должны быть ортогональными, т.е. давать ВКФ, близкую к нулю, и обладать низким УБЛ корреляционной функции для уменьшения взаимных помех.

Ортогональность кодов достигается выбором n_i , т.е. сдвигом кода по фазе. Из всей совокупности кодов Голда (1025) выбирают 37 и присваивают их соответствующим спутникам системы.

В системе ГЛОНАСС сигналы спутников идентифицируются по несущей частоте. В диапазонах L_1 и L_2 частоты формируются по правилу, $f_k = f_0 + k\Delta f$, где f_0 – номинальное значение несущей частоты, $\Delta f = 0,5$ МГц – интервал между несущими частотами, соседних по частоте спутников; $k = 1, 2, \dots, 24$. Общий для всех НИСЗ системы ГЛОНАСС грубый дальномерный код формируется с помощью образующего полинома М-последовательности:

$$P_1(x) = 1 + a_5x^5 + a_9x^9.$$

Коды Касами

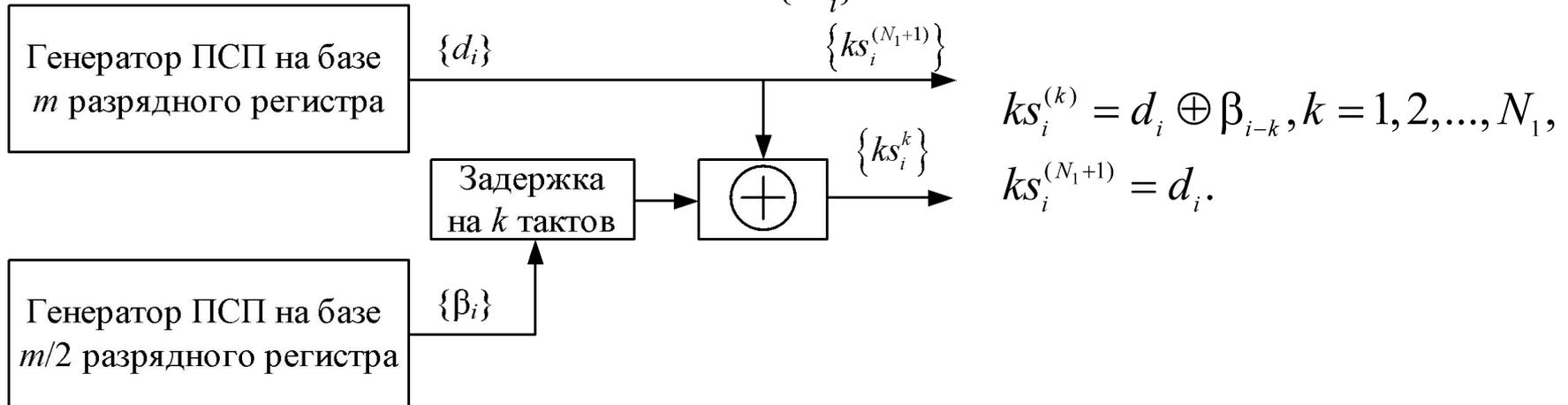
$\{d_i\}$ – бинарная M-последовательность длины (периода) $N = 2^m - 1$.

Проводится операция децимации с индексом ν , где ν невязимо прост с N , которая означает выбор каждого ν -го символа $d_{i(\nu)}$ последовательности $\{d_i\}$ и запись выбранных символов друг за другом в новую последовательность $\{\beta_i\}$ с периодом, значение которого является делителем N , где $\beta_i = d_{i(\nu)}$.

В процессе создания $\nu = 2^{m/2}$ последовательностей Касами выборки берутся через каждые $\nu = 2^{m/2} + 1$ ($\nu = 2^p + 1$) элементов M-последовательности, чтобы сформировать периодическую последовательность и с дальнейшим суммированием по модулю 2 этой последовательность постепенно с первоначальной M-последовательности. Доказано, что при соблюдении некоторых условий на начальное значение последовательности $\{d_i\}$ «короткая» последовательность $\{\beta_i\}$ является бинарной M-последовательностью периодом $N_1 = 2^p - 1$, $p = m/2$.

Ансамбль последовательностей Касами

$\{ks_i\}$



Ансамбль последовательностей Касами содержит N_1 сигнатур Касами длины N , которые образуются посимвольным сложением по модулю 2 исходной «длинной» M -последовательности с N_1 циклическими копиями $\{\beta_i\}$, а еще одной сигнатурой служит сама «длинная» последовательность.

$$K = N_1 + 1 = 2^p = \sqrt{N + 1}$$

Для последовательностей Касами боковые лепестки нормированной периодической КФ принимает три возможных значения:

$$\rho(m) \in \left\{ \frac{\sqrt{(N+1)} - 1}{N}, \frac{-\sqrt{(N+1)} - 1}{N}, -\frac{1}{N} \right\}, m = 1, 2, \dots, N-1.$$

Сравнение двух бинарных ансамблей показывает выигрыш множеств Касами в уровне корреляционного пика у ансамблей Голда той же длины в обмен на значительно меньшее количество сигнатур в ансамбле.

$$(N+2) / \sqrt{N+1} \approx \sqrt{N}$$

Построим ансамбль Касами длины $N=2^4-1=15$ ($p = 2$, $K\sqrt{N+1} = 4$).

Начнем с бинарной M -последовательности $\{d_i\}$ длины $N=15$ на основе примитивного полинома $P(x) = 1+ax+a_4x^4$ с начальным состоянием регистра сдвига с обратной связью $\text{Tr}_4=1$, $\text{Tr}_2 = \text{Tr}_3 = \text{Tr}_1 = 0$. Децимация последовательности с индексом $v=2^p+1=5$ дает M -последовательность периода три $\{\beta_i\}$. Сумма по модулю 2 последовательности $\{d_i\}$ с тремя сдвинутыми копиями $\{\beta_i\}$ после перехода образует первые три сигнатуры Касами

$$\{d_i\} = \{1,0,0,0,1,0,0,1,1,0,1,0,1,1,1\}$$

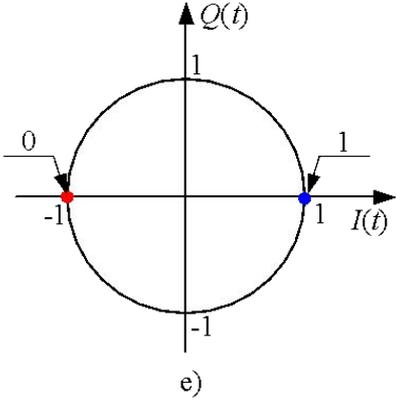
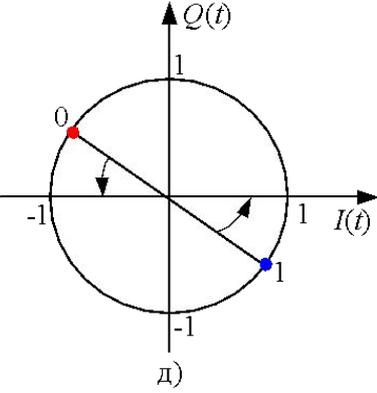
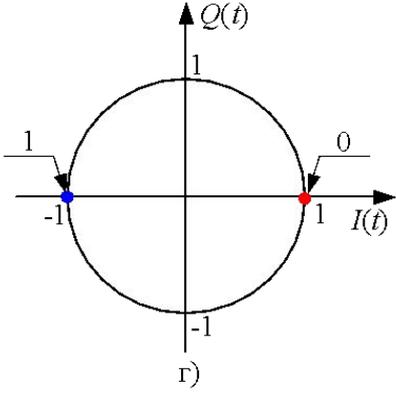
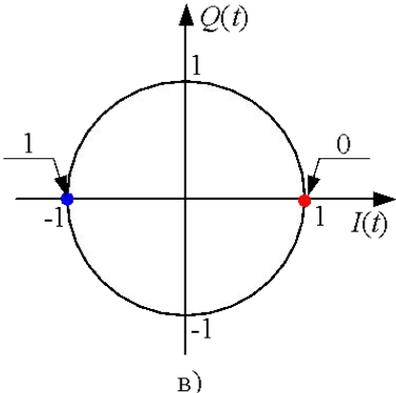
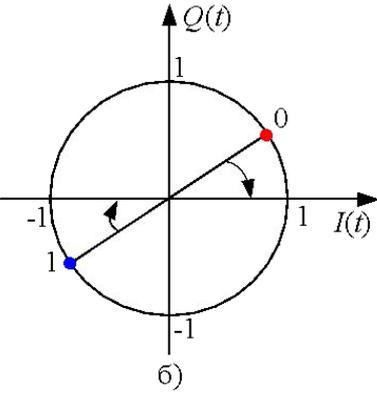
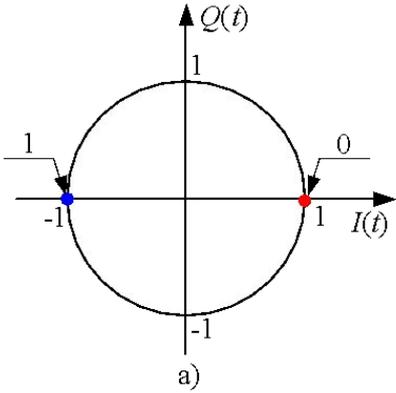
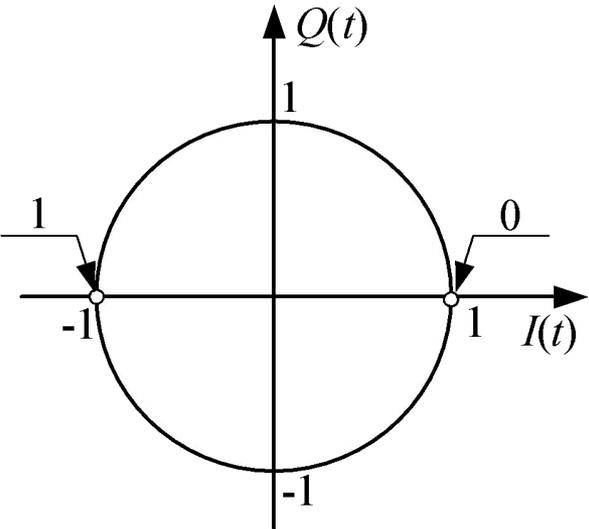
$$\{\beta_i\} = \{1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1\}$$

$$ks_i^{(1)} = \{1,1,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,1\},$$

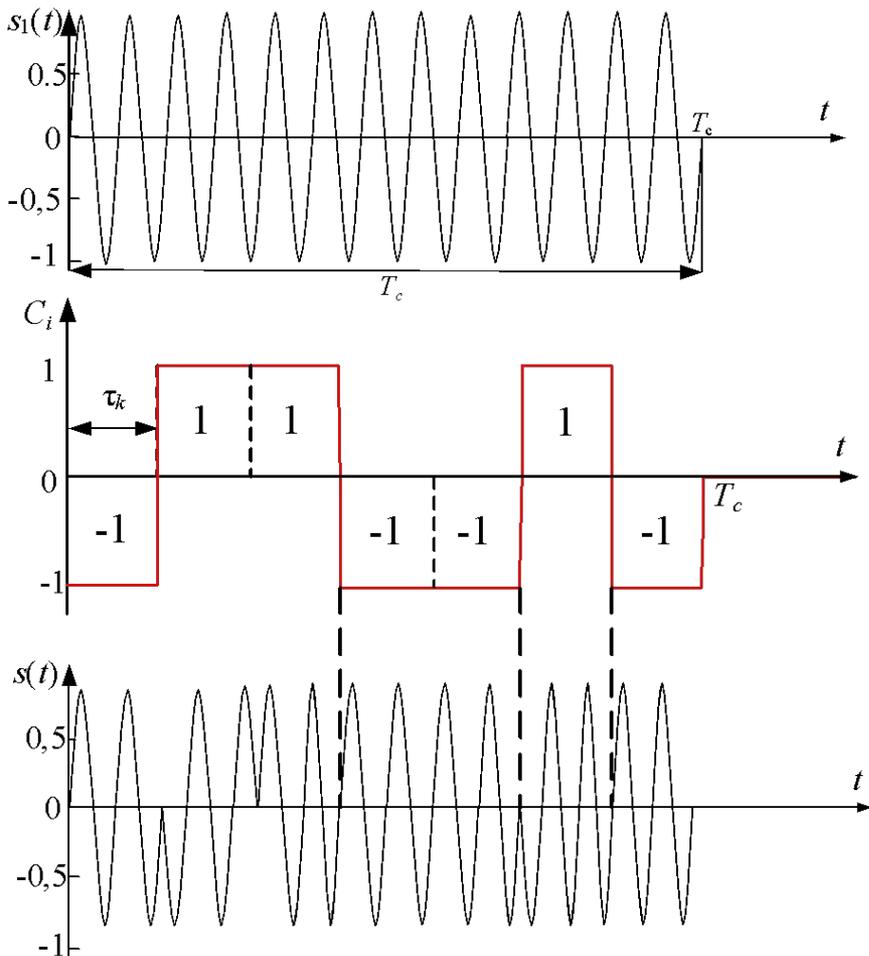
$$ks_i^{(2)} = \{1,0,1,0,1,1,0,1,0,0,1,1,1,1,0\},$$

$$ks_i^{(3)} = \{0,0,0,1,1,0,1,1,1,1,1,0,0,1,1\},$$

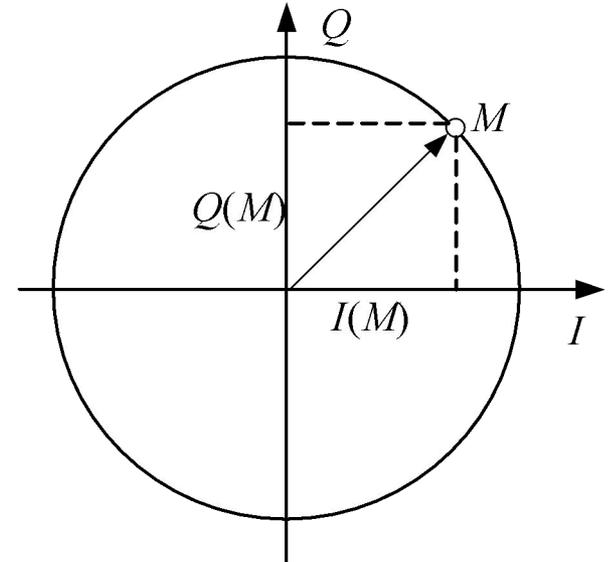
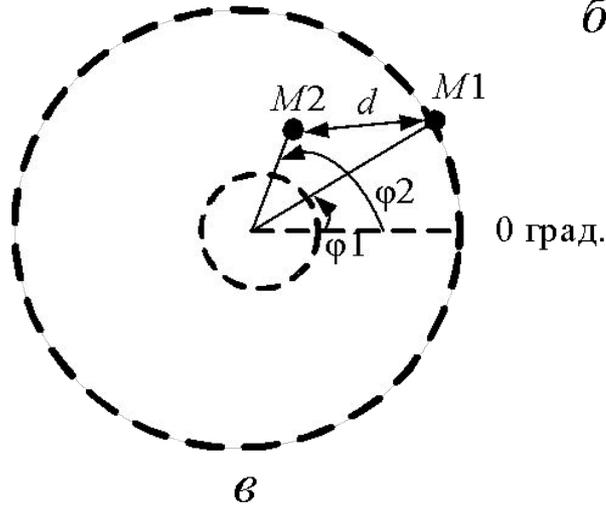
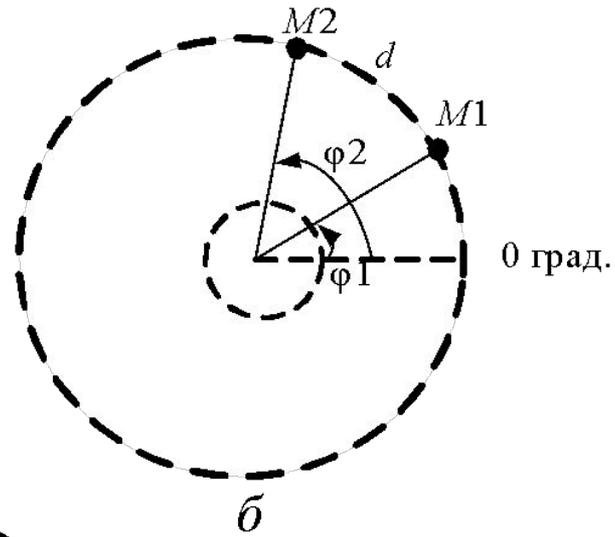
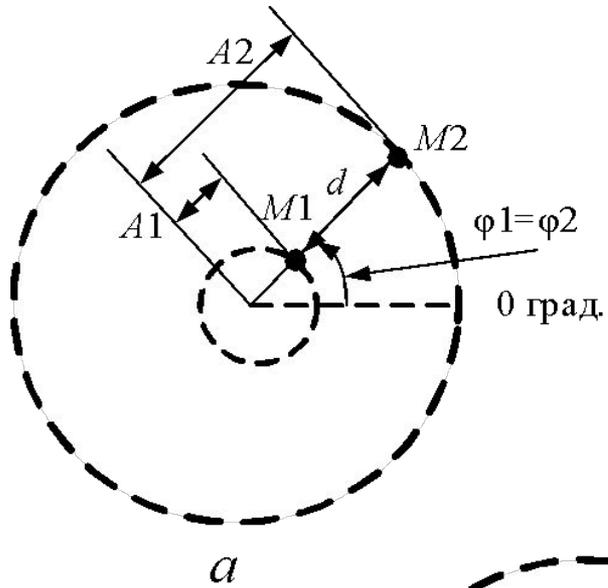
$$ks_i^{(4)} = \{0,1,1,1,0,1,1,0,0,1,0,1,0,0,0\}.$$



Относительная (дифференциальная) фазовая манипуляция (ОФМ) (DBPSK)



Полярная и квадратурная диаграммы



Многопозиционная фазовая манипуляция

$$s_i(t) = A \cos(2\pi f_c t + \varphi + \varphi_i), \quad \varphi = 2i\pi / M; \quad i = 1..M.$$

M – количество позиций фазы.

$$s_i(t) = A \cos \varphi_i \cos(\omega_0 t) - A \sin \varphi_i \sin(\omega_0 t) = s_{i1} \phi_1(t) + s_{i2} \phi_2(t)$$

$$\phi_1(t) = \sqrt{2/T} \cos \omega_0 t$$

$$s_{i1} = \int_0^T s_i(t) \phi_1(t) dt = \sqrt{E} \cos \varphi_i$$

$$\phi_2(t) = -\sqrt{2/T} \sin \omega_0 t, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$s_{i2} = \int_0^T s_i(t) \phi_2(t) dt = \sqrt{E} \sin \varphi_i$$

$I_k = \pm 1$ и $Q_k = \pm 1$,

$$E = A^2 T / 2,$$

$$\varphi_i = \arctg(s_{i2} / s_{i1})$$

Для QPSK сигнала:

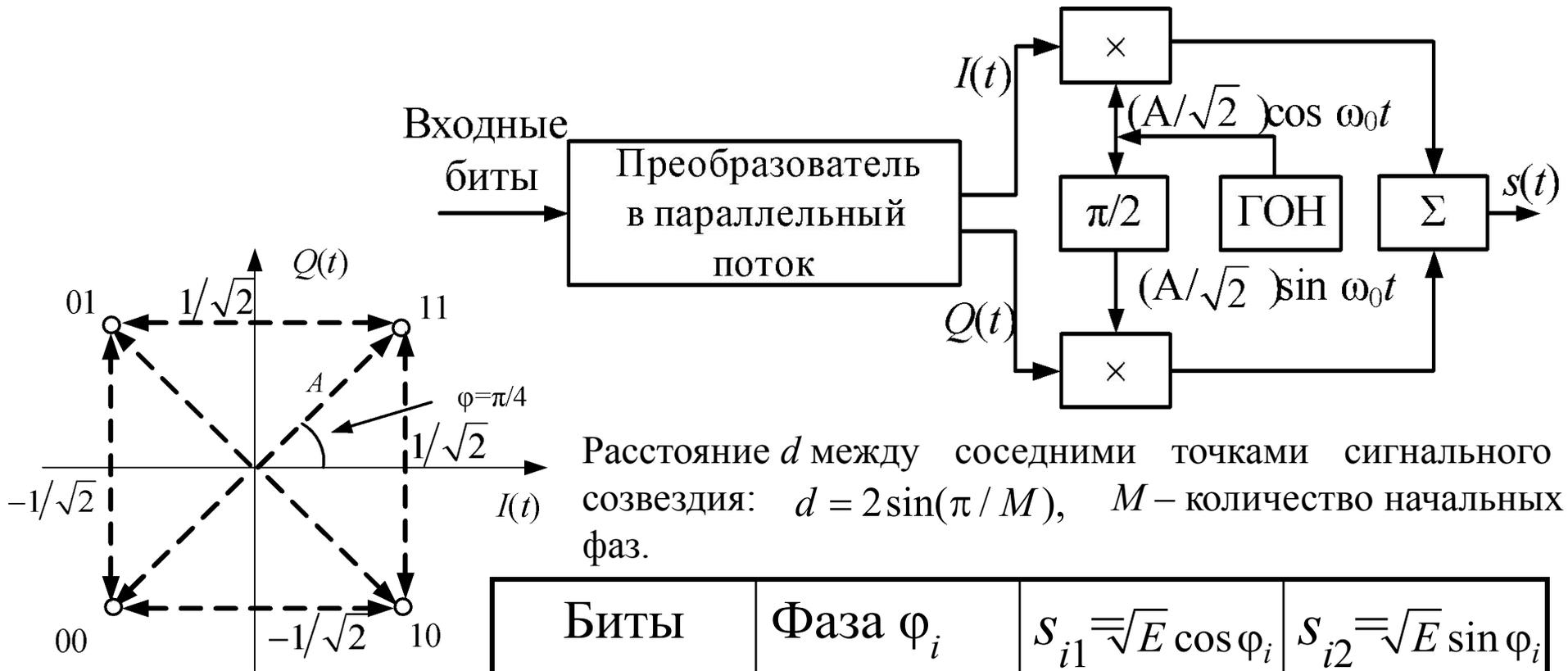
$$s(t) = \frac{A}{\sqrt{2}} I(t) \cos(\omega_0 t) - \frac{A}{\sqrt{2}} Q(t) \sin(\omega_0 t).$$

$$s(t) = \operatorname{Re} \{ z(t) \exp(j\omega_0 t) \}$$

$$I(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k p(t - kT), \quad Q(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q_k p(t - kT),$$

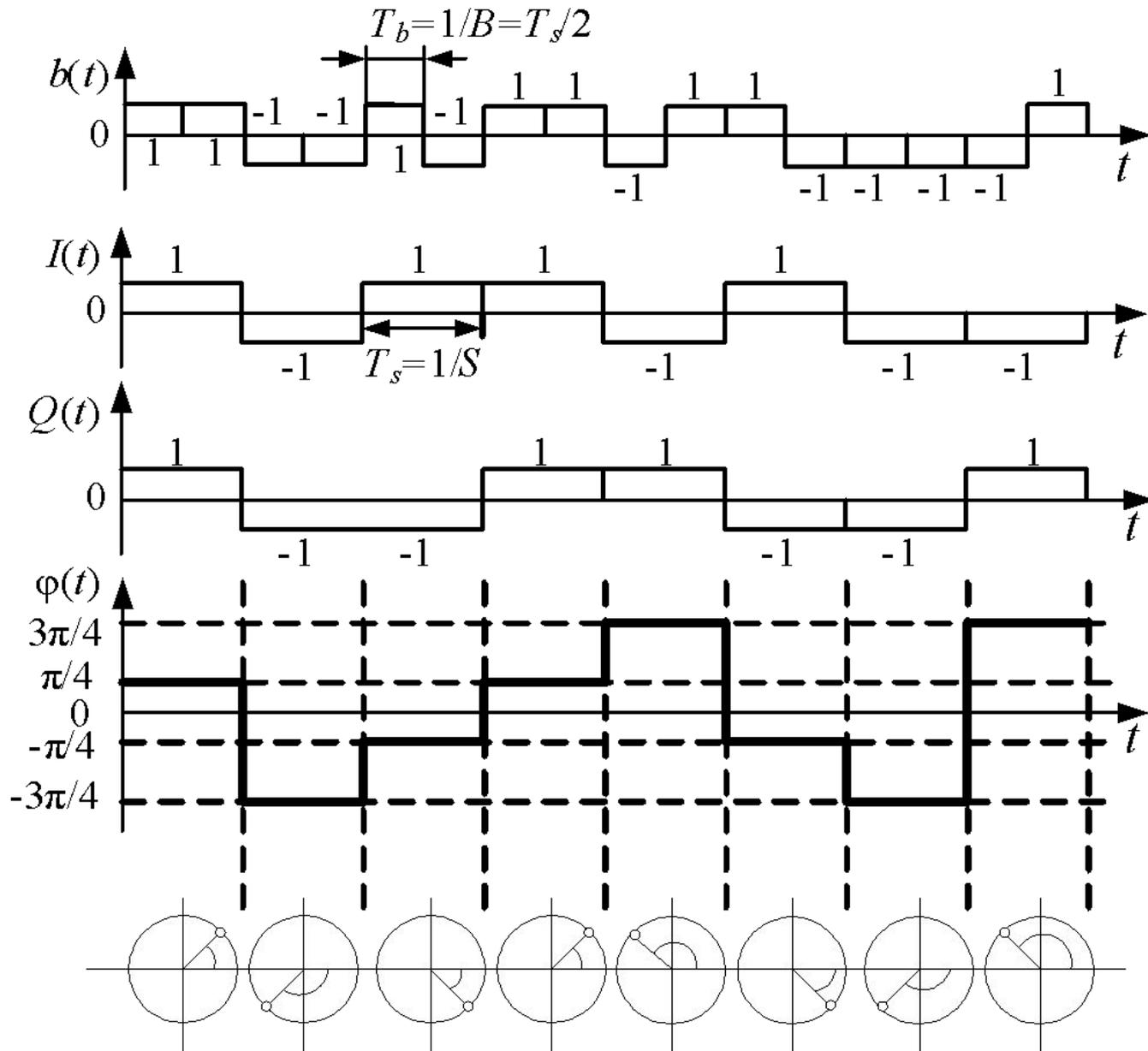
$$\varphi(t) = \operatorname{arctag} \left(\frac{Q(t)}{I(t)} \right)$$

Четырехпозиционная (квадратурная) фазовая манипуляция (QPSK)



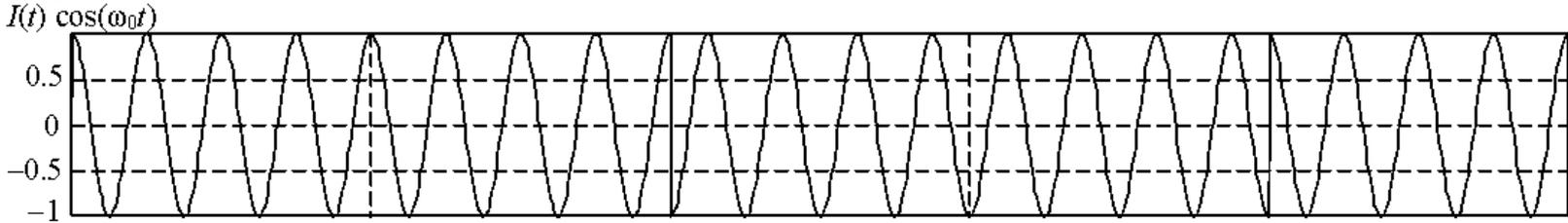
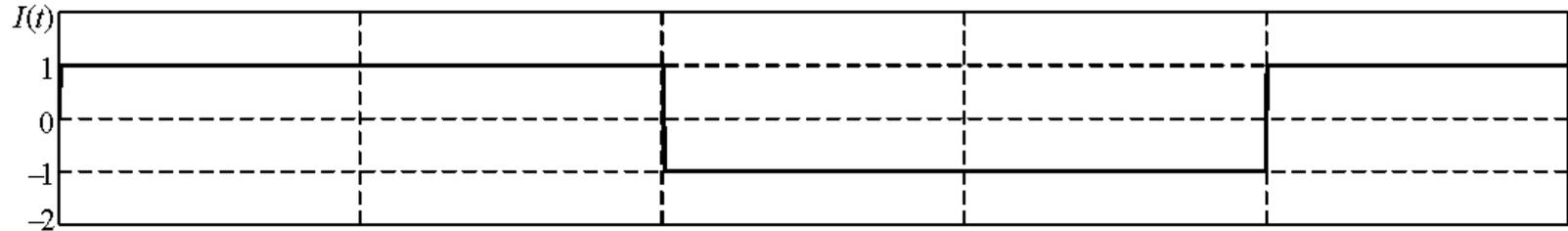
БИТЫ	Фаза φ_i	$S_{i1} = \sqrt{E} \cos \varphi_i$	$S_{i2} = \sqrt{E} \sin \varphi_i$
11	$\pi/4$	$\sqrt{E/2}$	$\sqrt{E/2}$
01	$3\pi/4$	$-\sqrt{E/2}$	$\sqrt{E/2}$
00	$-3\pi/4$	$-\sqrt{E/2}$	$-\sqrt{E/2}$
10	$-\pi/4$	$\sqrt{E/2}$	$-\sqrt{E/2}$

Четырехпозиционная фазовая манипуляция (QPSK)

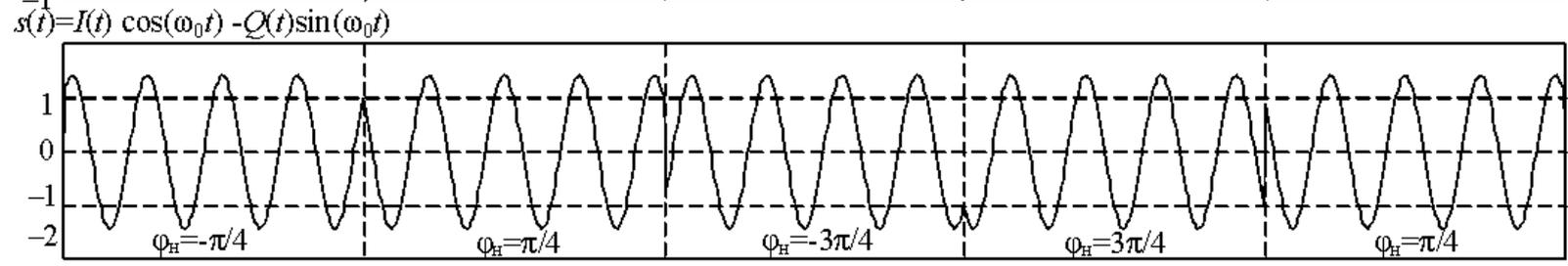
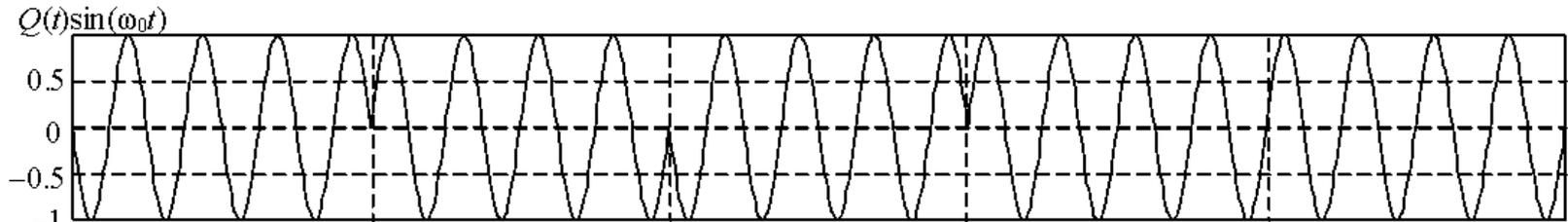
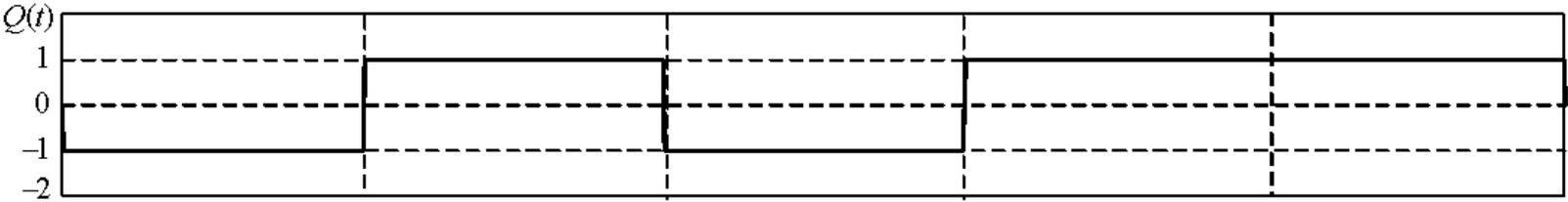


b_k 1 -1 1 1 -1 -1 -1 1 1 1

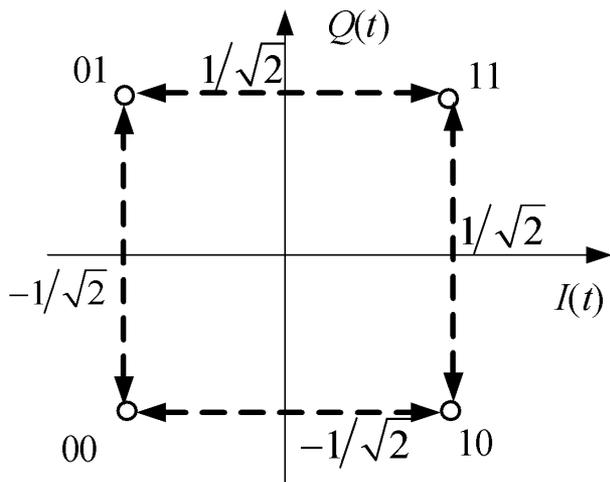
I_k 1 1 -1 -1 1



Q_k -1 1 -1 1 1



Относительная (дифференциальная) квадратурная фазовая манипуляция (DQPSK)

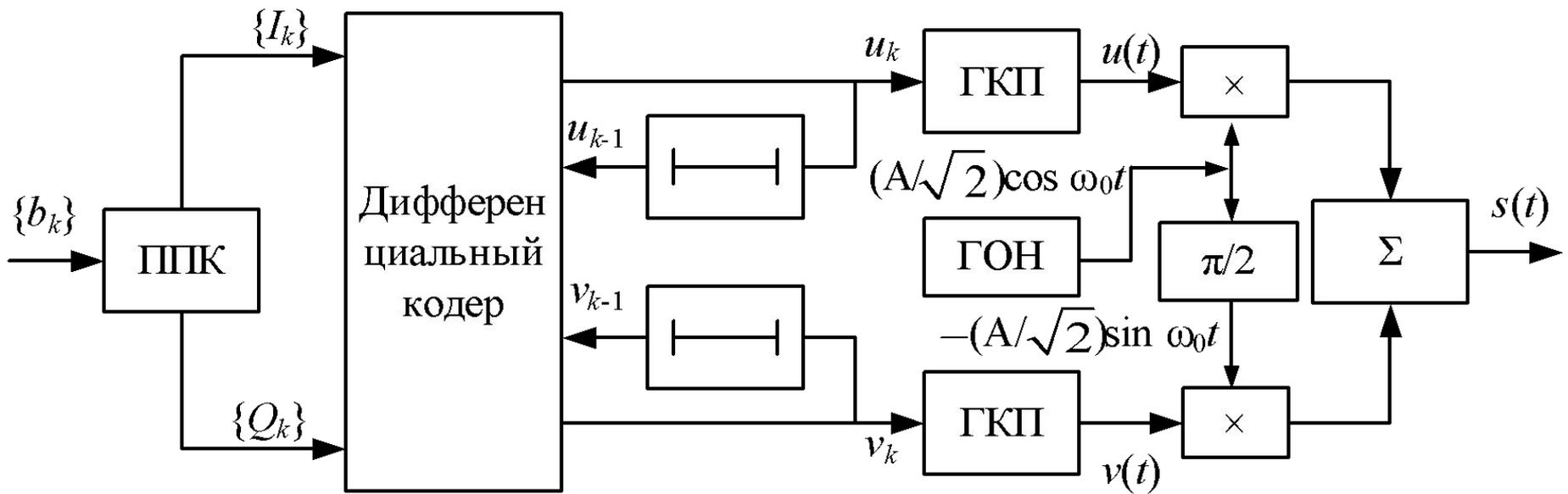


Биты	Фаза $\Delta\varphi_i$	$\cos \Delta\varphi_i$	$\sin \Delta\varphi_i$
11	π	-1	0
01	$\pi/2$	0	1
10	$-\pi/2$	0	-1
00	0	1	0

$$x(t) = x_{2k}(t) + x_{2k+1}(t - T_c)$$

$$S(t) = S_{2k}(t) + S_{2k+1}(t - T_c)$$

$$S_{2k}(t) = \left(\frac{A}{\sqrt{2}} \right) x_{2k}(t) \cos \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4} \right) \quad S_{2k+1}(t - T_c) = \left(\frac{A}{\sqrt{2}} \right) x_{2k+1}(t - T_c) \cos \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4} \right)$$

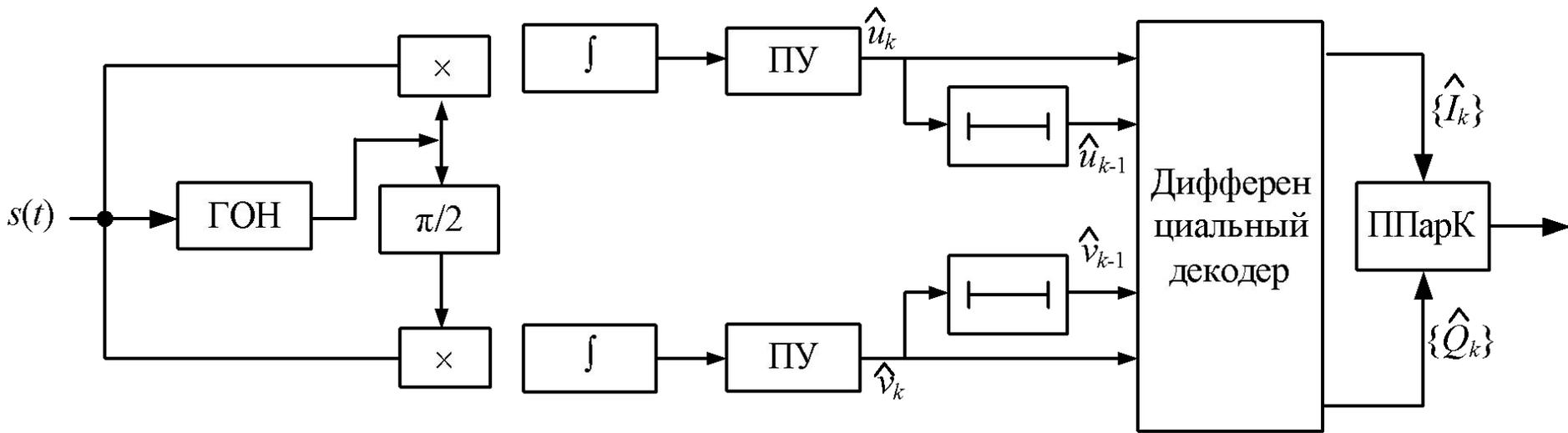


$$u_k = \overline{(I_k \oplus Q_k)}(I_k \oplus u_{k-1}) + (I_k \oplus Q_k)(Q_k \oplus v_{k-1});$$

$$v_k = \overline{(I_k \oplus Q_k)}(Q_k \oplus v_{k-1}) + (I_k \oplus Q_k)(I_k \oplus u_{k-1}).$$

Пара (u_k, v_k) определяет абсолютное значение фазы φ_i .

k		1	2	3	4	5	6	7	8
Последовательность I_k		1	0	1	0	1	1	0	1
Последовательность Q_k		0	1	0	1	1	0	0	1
Закодированная посл-сть u_k	1	1	1	1	1	0	0	0	1
Закодированная посл-сть v_k	1	0	1	0	1	0	1	1	0
Абсолютное значение фазы φ_i	$\pi/4$	$7\pi/4$	$\pi/4$	$7\pi/4$	$\pi/4$	$5\pi/4$	$3\pi/4$	$3\pi/4$	$7\pi/4$



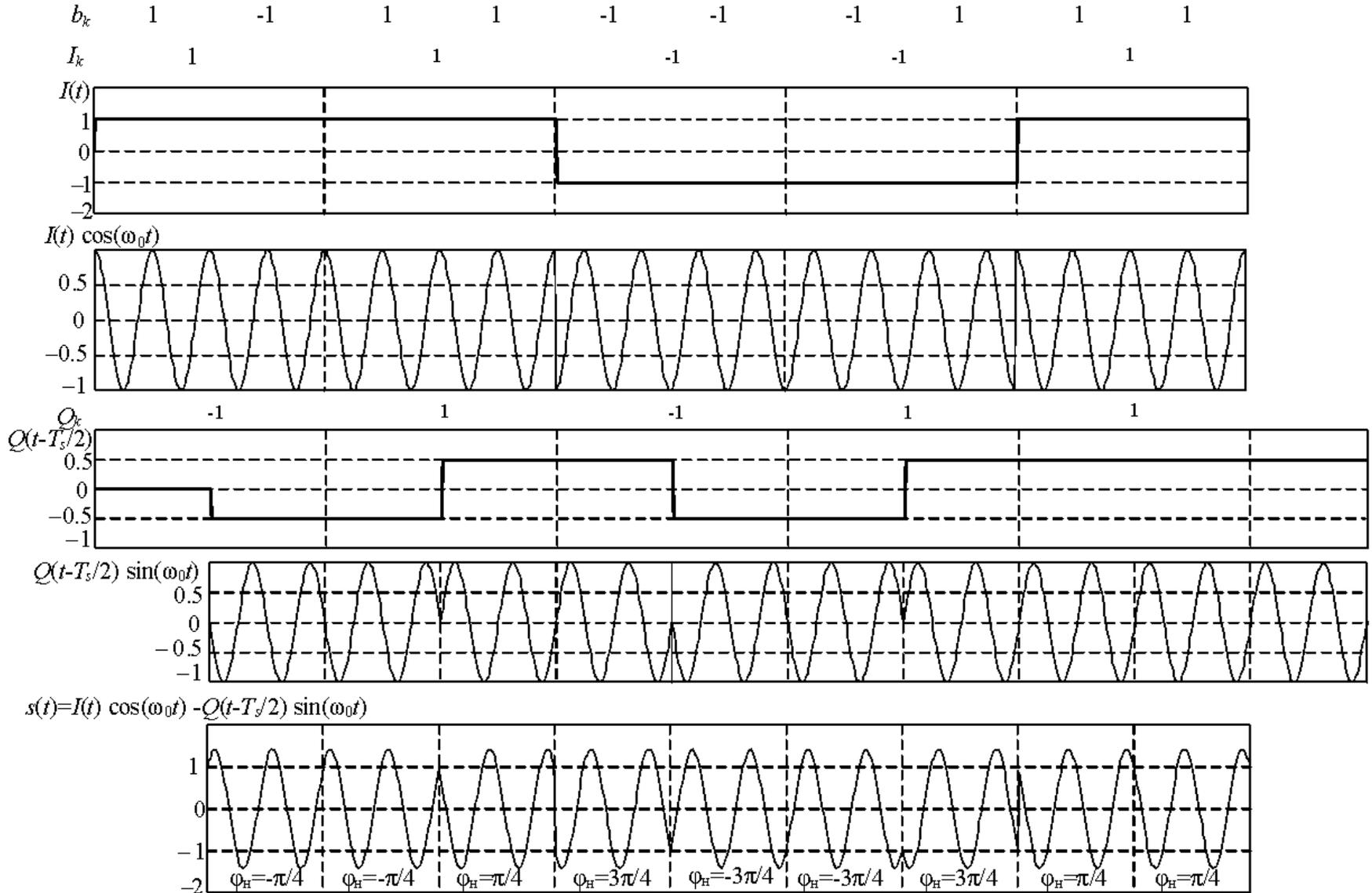
$$\hat{I}_k = \overline{(\hat{u}_k \oplus \hat{v}_k)}(\hat{u}_k \oplus \hat{u}_{k-1}) + (\hat{u}_k \oplus \hat{v}_k)(\hat{v}_k \oplus \hat{v}_{k-1});$$

$$\hat{Q}_k = \overline{(\hat{u}_k \oplus \hat{v}_k)}(\hat{v}_k \oplus \hat{v}_{k-1}) + (\hat{u}_k \oplus \hat{v}_k)(\hat{u}_k \oplus \hat{u}_{k-1}).$$

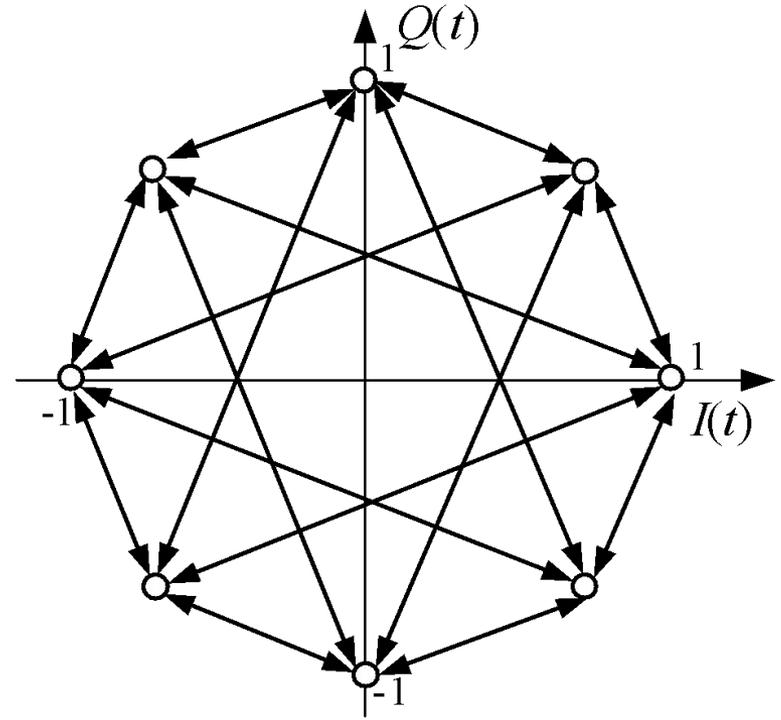
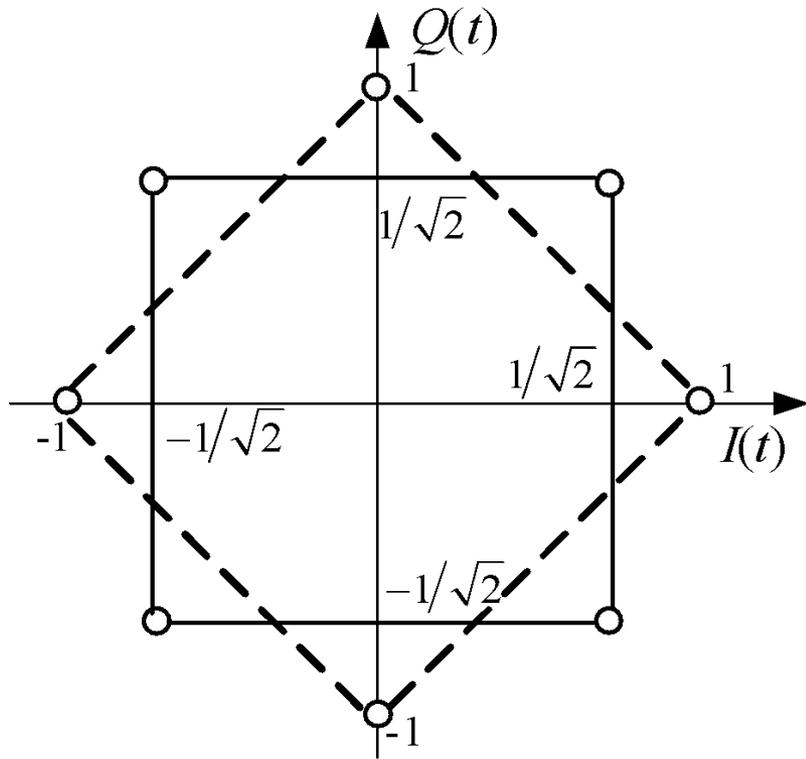
k		1	2	3	4	5	6	7	8
<u>Абсолютное фаза</u> φ_k	$\pi/4$	$7\pi/4$	$\pi/4$	$7\pi/4$	$\pi/4$	$5\pi/4$	$3\pi/4$	$3\pi/4$	$7\pi/4$
$\hat{\varphi}_k$	$3\pi/4$	$\pi/4$	$3\pi/4$	$\pi/4$	$3\pi/4$	$7\pi/4$	$5\pi/4$	$5\pi/4$	$\pi/4$
<u>Обнаруж. посл-сть</u> \hat{u}_k	0	1	0	1	0	1	0	0	1
<u>Обнаруж. посл-сть</u> \hat{v}_k	1	1	1	1	1	0	0	0	1
<u>Обнаруж. посл-сть</u> \hat{I}_k		1	0	1	0	1	1	0	1
<u>Обнаруж. посл-сть</u> \hat{Q}_k		0	1	0	1	1	0	0	1

Квадратурная фазовая модуляция со сдвигом (Offset Quadrature Phase-shift Keying – OQPSK)

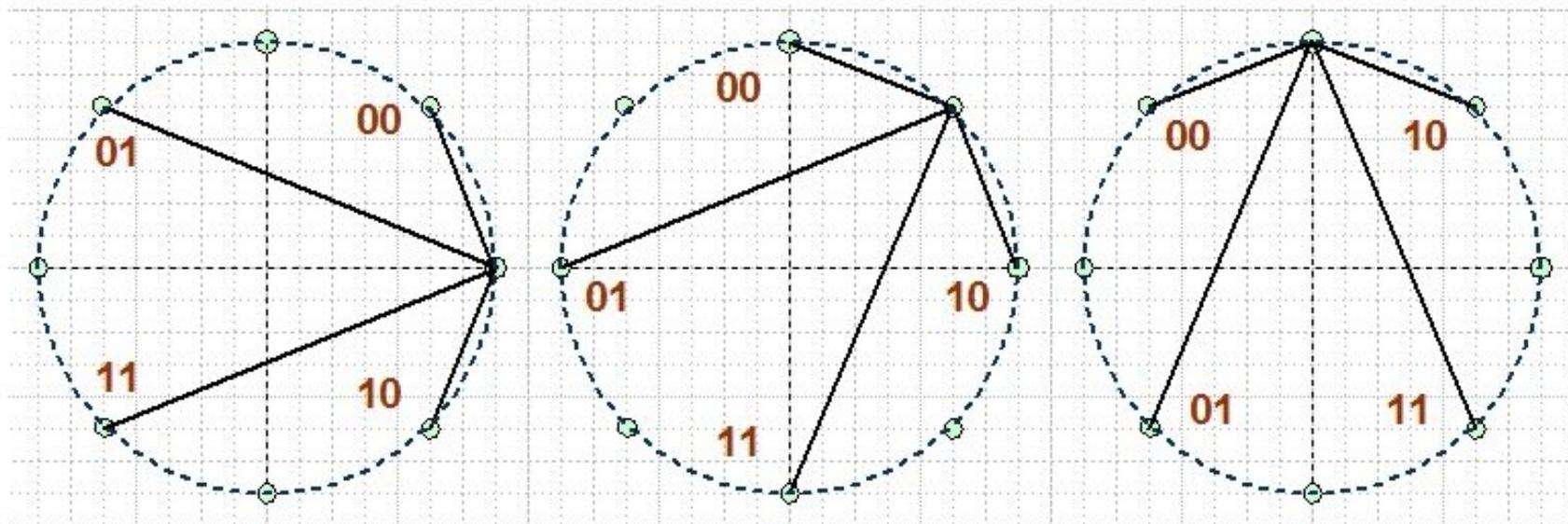
$$s(t) = \frac{A}{\sqrt{2}} I(t) \cos(\omega_0 t) - \frac{A}{\sqrt{2}} Q(t - T_s/2) \sin(\omega_0 t).$$



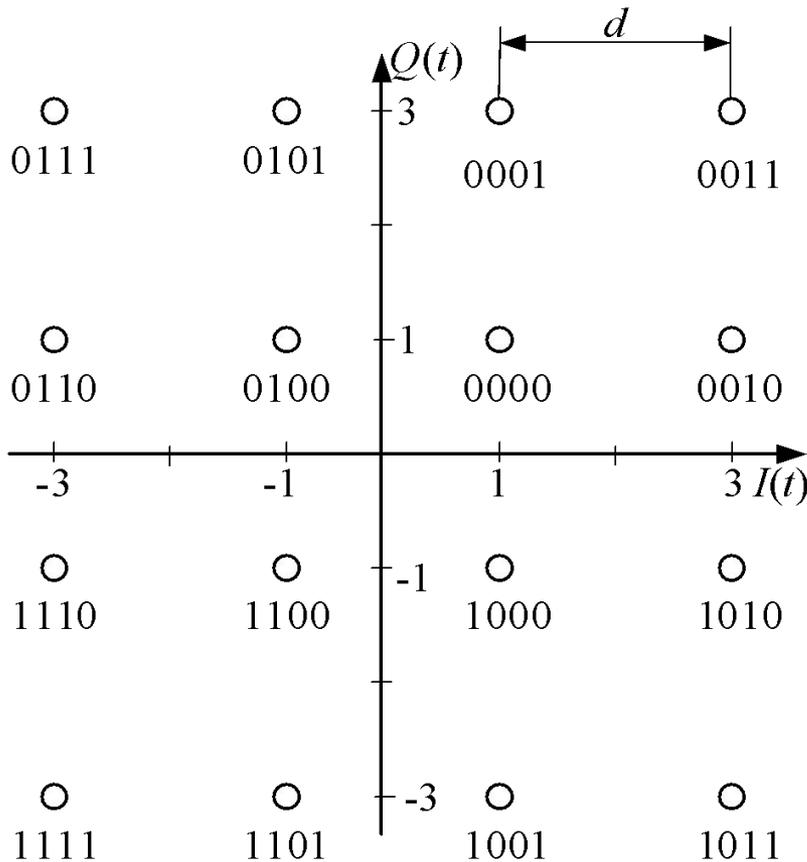
$\pi/4$ -DQPSK (4QAM)



**Алгоритм перемещения сигнальной точки
при использовании кодирования Грея для $\pi/4$ -DQPSK**



Квадратурная амплитудная манипуляция



Значения модуляционных символов, которым соответствуют точки фазового созвездия модулированного колебания: $\{m_3, m_2, m_1, m_0\}$.

$\{m_3, m_2\}$ определяет номер квадранта фазовой плоскости (знаки действительной и мнимой координаты вектора модулированного колебания);

$$a_n = q^{m_i},$$

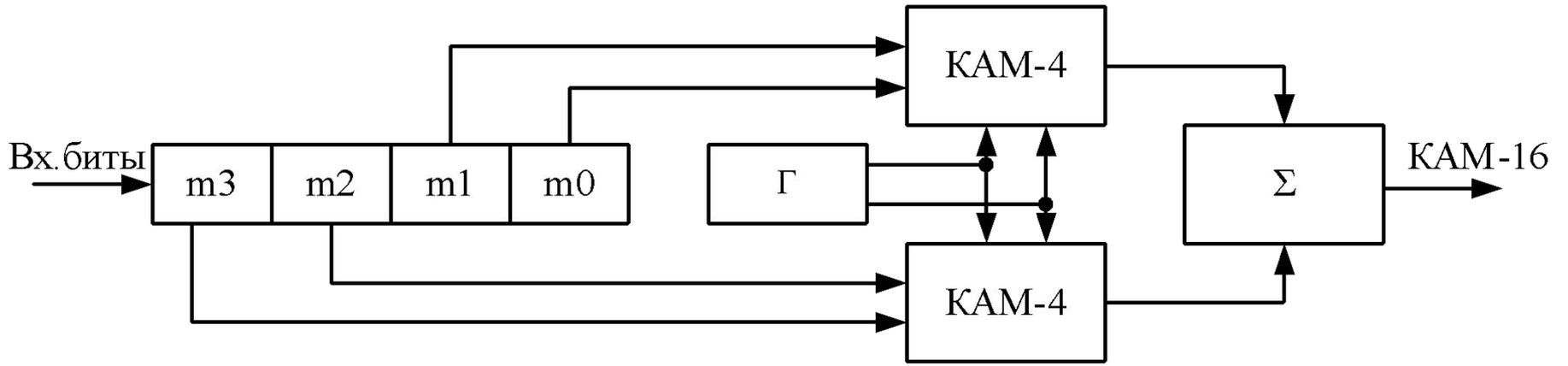
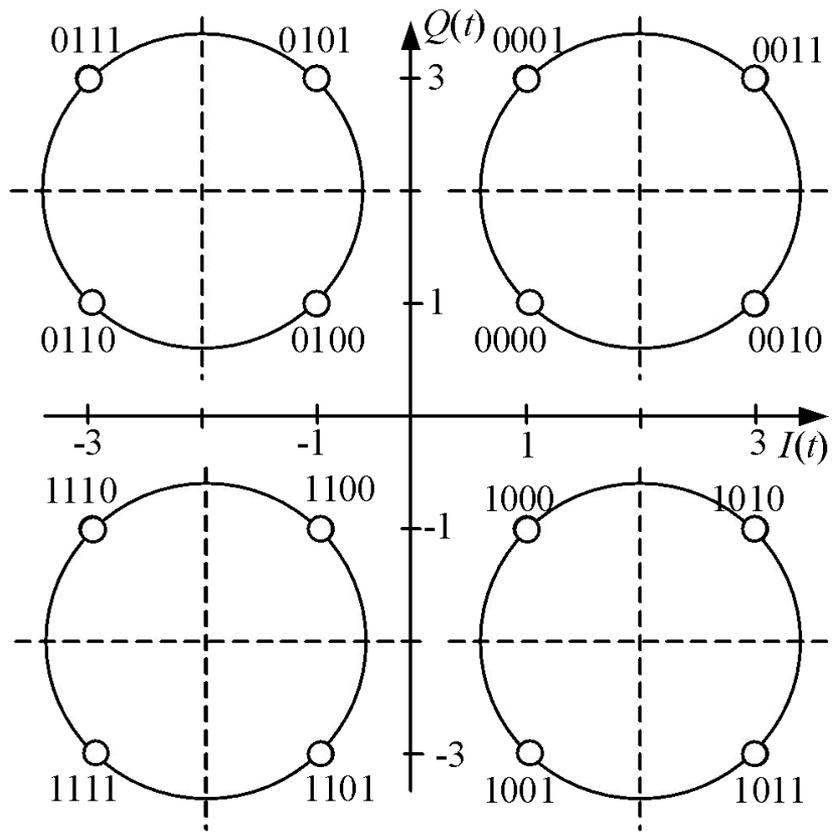
$\{m_1, m_0\}$ определяет значение амплитуды действительной и мнимой части модулированного сигнала.

Расстояние d между соседними точками сигнального созвездия с L уровнями модуляции:

$$d = \sqrt{2} / (L - 1).$$

m1	m0	α	β
0	0	1	1
0	1	1	3
1	0	3	1
1	1	3	3

Стандарт DVB-C, Стандарт DVB-S



Многофазное кодирование. Коды Фрэнка.

Количество элементов кода: $N = M^2$, где M – целое число.

Символы сигналов Фрэнка a_n , $n = 1 \dots N$: $a_n = q^{v\mu}$,

где $q = \exp(j2\pi p/M)$, p – число, взаимно простое с M , а $v\mu$ произведения определяются квадратной матрицей порядка M :

Каждый элемент матрицы B – произведение $v\mu$, $v, \mu = 0, 1, \dots, M-1$, v – номер строки, μ – номер столбца.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & (M-1) \\ 0 & 2 & 4 & \dots & 2(M-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & (M-1) & 2(M-1) & \dots & (M-1)^2 \end{pmatrix}$$

Номер элементов по индексу n определяется, начиная с левого верхнего элемента
 :
 по строкам, выписывая строку за строкой. Номер символа: $n = v\mu + \mu + 1$.

Последовательность символов в сигнале в записи по правилу присоединения:

$$\{q^{0\mu} | q^{1\mu} | q^{2\mu} \dots | q^{(M-1)\mu}\}, \mu = 0, 1, \dots, M-1.$$

Фаза v -го элемента в μ -ой последовательности: $\Phi_{v,\mu} = (2\pi p / M) v\mu$

Для $M=3, p=1$.

$\Phi_{0,0}$	$\Phi_{0,1}$	$\Phi_{0,2}$	$\Phi_{1,0}$	$\Phi_{1,1}$	$\Phi_{1,2}$	$\Phi_{2,0}$	$\Phi_{2,1}$	$\Phi_{2,2}$
0	0	0	0	$2\pi/3$	$4\pi/3$	0	$4\pi/3$	$8\pi/3$

Если последовательности разместить одну под другой, то образуется матрица фаз размером $M \times M$, элемент которой в ν -й строке и в μ -м столбце

$$\varphi_{\nu,\mu} = (2\pi M / N) \nu \mu$$

Для $M=4, p=1, N=16$.

Таблица 4.4 – Матрица фаз $\varphi_{\nu,\mu}$ кода Фрэнка для $N_3=16$

ν/μ	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
3	0	π	2π	3π
4	0	$3\pi/2$	3π	$9\pi/2$

¶

Таблица 4.5 – Кодовые числа $q_{\nu,\mu}$ для кода Фрэнка для $N_3=16$

ν/μ	1	2	3	4
1	+1	+1	+1	+1
2	+1	+j	-1	-j
3	+1	-1	+1	-1
4	+1	-j	-1	+j

Изменение фазы в отличие от двоичного кодирования осуществляется дискретными значениями из набора конечного значения числа дискретов в пределах 360° .

Количество дискретов фазы определяется:

$$N_\phi = p^n,$$

где p – простое целое число, n – целое число $1, 2, \dots, n$.

Например, при двоичном кодировании фазы $N = 2$ (0° и 180°), что соответствует значениям $p = 2$, $n = 1$.

Если взять $p = 5$, $n = 1$, то получим 5 дискретных значений фазы равномерно распределенных в пределах 360° :

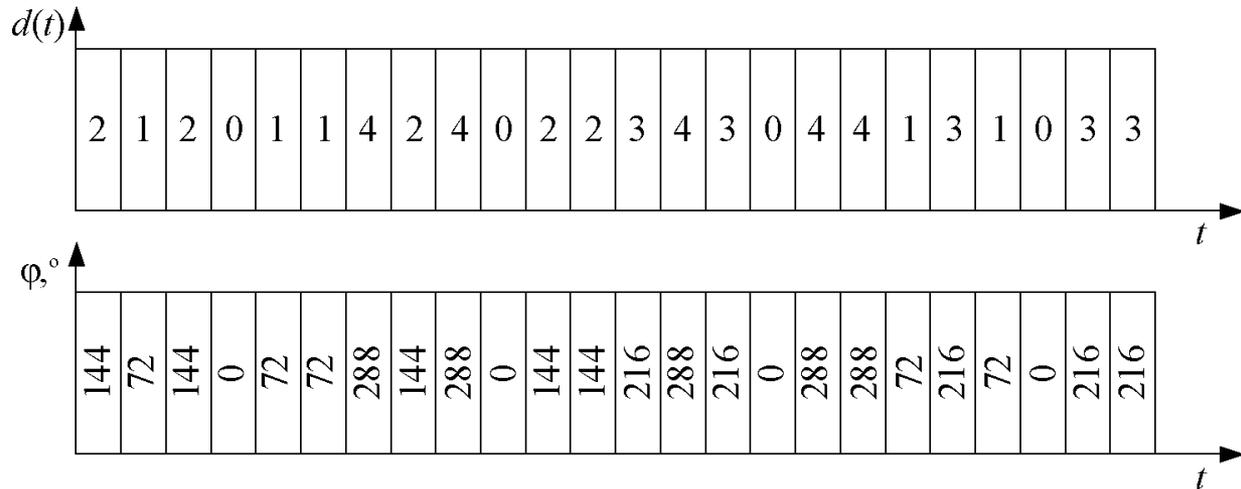
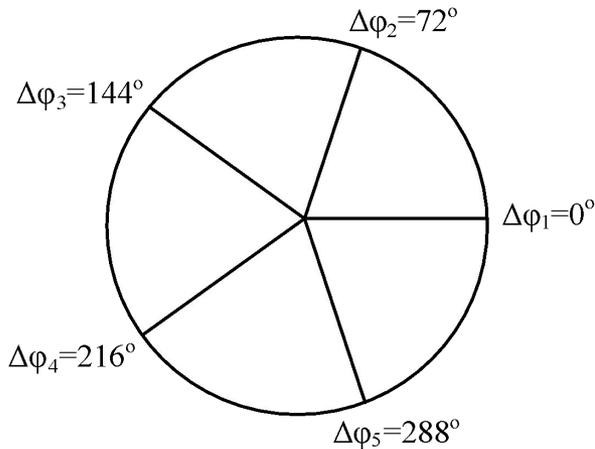
$$\Delta\phi_0 = 0; \Delta\phi_1 = 72^\circ; \Delta\phi_2 = 144^\circ; \Delta\phi_3 = 216^\circ; \Delta\phi_4 = 288^\circ$$

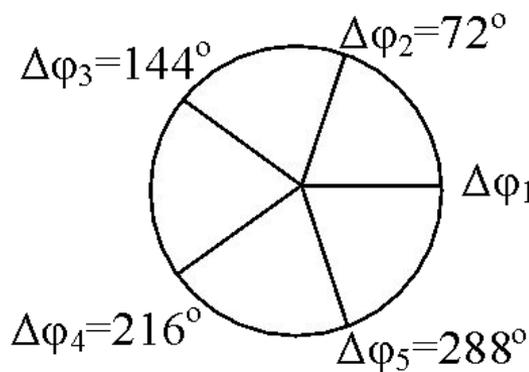
Общее количество элементов последовательности ШПС с многофазным кодом:

$$N = N_\phi^{r-1},$$

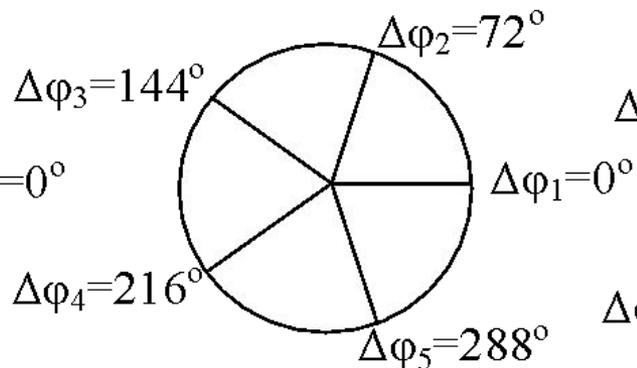
где r – количество кодовых состояний в генераторе псевдослучайного кода.

Последовательность ШПС с многофазной кодовой манипуляцией для $N_\phi = 5$ при $r = 2$, общее число элементов последовательности равно $N = 24$.

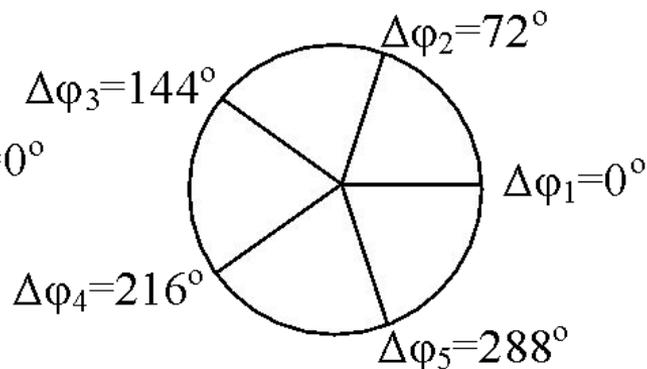




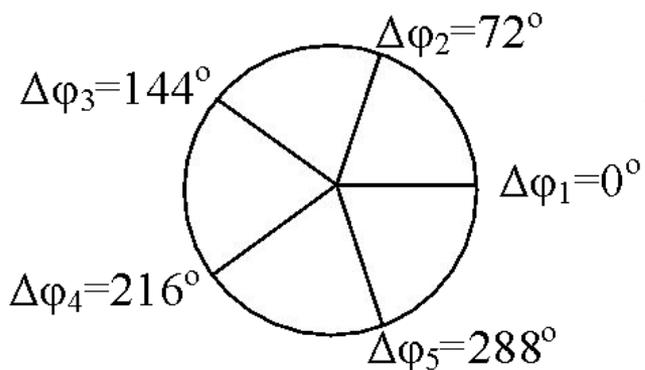
$M=1$



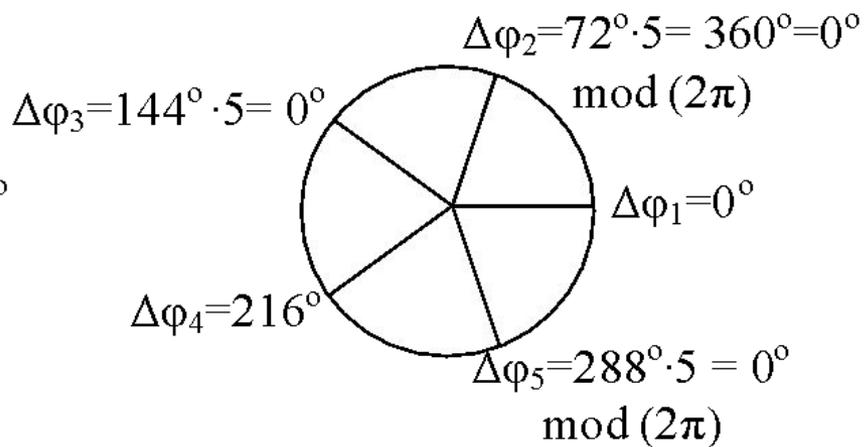
$M=2$



$M=3$



$M=4$



$M=5$

Составные сигналы.

