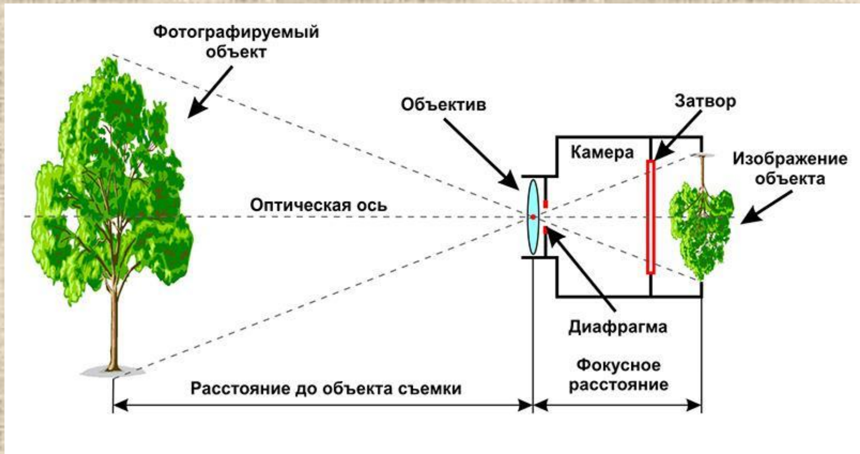
Структура изображения



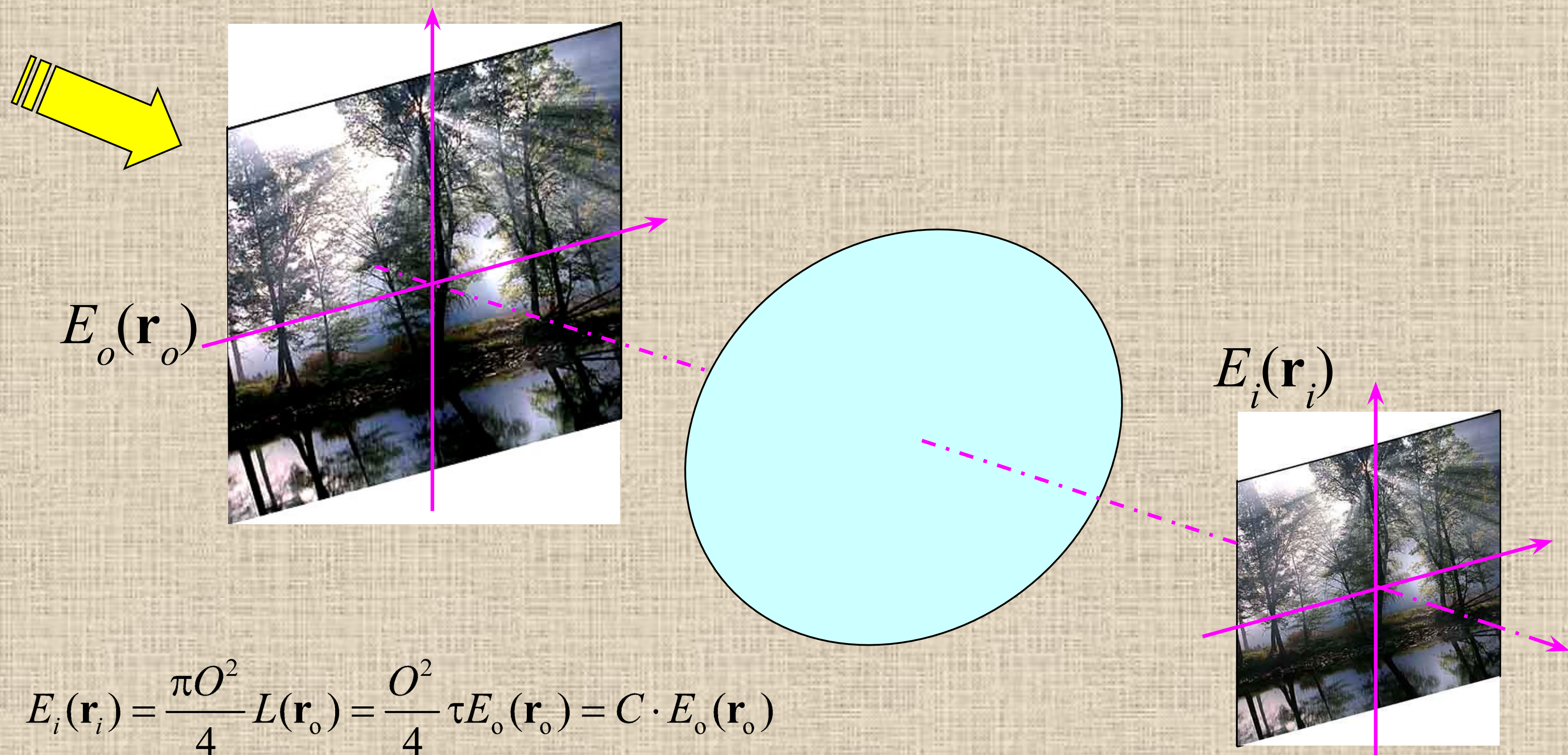
Будак Владимир Павлович,

НИУ «МЭИ»

кафедра светотехники

: +7 (495) 763-5239 BudakVP@mpei.ru

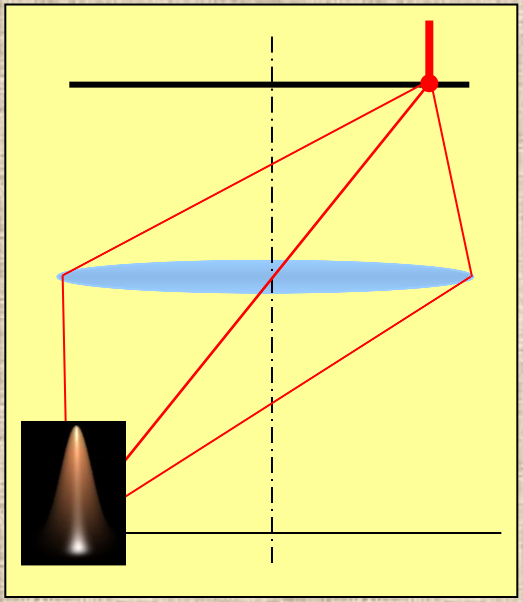
Оптическое изображение



$$E_i(\mathbf{r}_i)=\frac{\pi O^2}{4}L(\mathbf{r}_\text{o})=\frac{O^2}{4}\tau E_\text{o}(\mathbf{r}_\text{o})=C\cdot E_\text{o}(\mathbf{r}_\text{o})$$

Вследствие неидеальности ОС – аберрации, дифракция, – изображение точки превращается в пятно

Свертка – convolution



$h(\mathbf{r}_o \to \mathbf{r}_i)$ – функция рассеяния точки (ФРТ, Point Spread Function, PSF) – распределение облученности в изображении от светящейся точки объекта

$$E_i(\mathbf{r}_i) = \int E_\mathrm{o}(\mathbf{r}_\mathrm{o}) h(\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}_\mathrm{o})\, d^2 r_\mathrm{o}$$

- ФРТ не зависит от абсолютного положения точки в плоскости объекта – системы инвариантные к сдвигу
- Интеграл суперпозиции переходит в интеграл свертки

$$E_i(\mathbf{r}_i) = \int E_\mathrm{o}(\mathbf{r}_\mathrm{o}) h(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_\mathrm{o})\, d^2 r_\mathrm{o} \equiv E_\mathrm{o}(\mathbf{r}) * h(\mathbf{r})$$

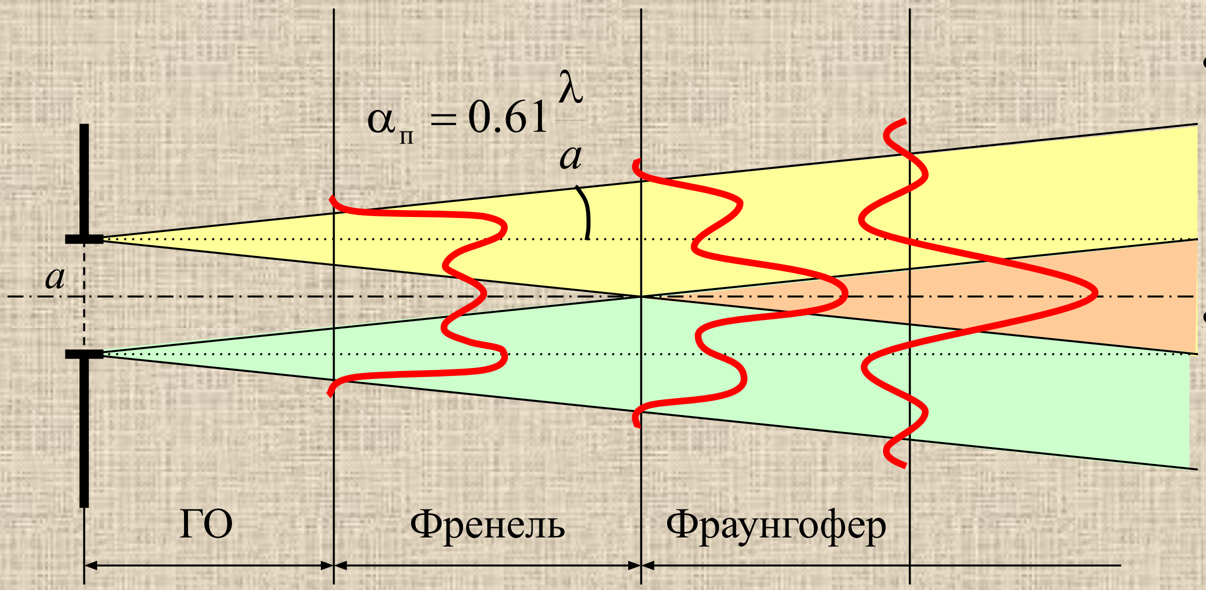
Распределение облученности в плоскости изображения связано с распределением облученности плоскости анализа через свертку

Фурье-оптика (Fourier)

- Duffieux P.M. L’Intégrale de Fourier et ses Applications à L’Optique. – Besançon, 1946
- Schade O.H. Electro- optical characteristics of television systems // RCA Rev., 9, 5 (Part I), 245 (Part II), 490 (Part III), 653 (Part IV) (1948)
- Марешаль А., Франсон М. Структура оптического изображения. – М.: Мир, 1964
- О'Нейл Э. Введение в статистическую оптику. – М.: Мир, 1966
- Гудмен Дж. Введение в фурье-оптику. – М.: Мир, 1970
- Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике. М.: Мир, 1971

С позиций светового (лучевого) поля также возможен вывод уравнения свертки, но сложнее и выполнен позднее

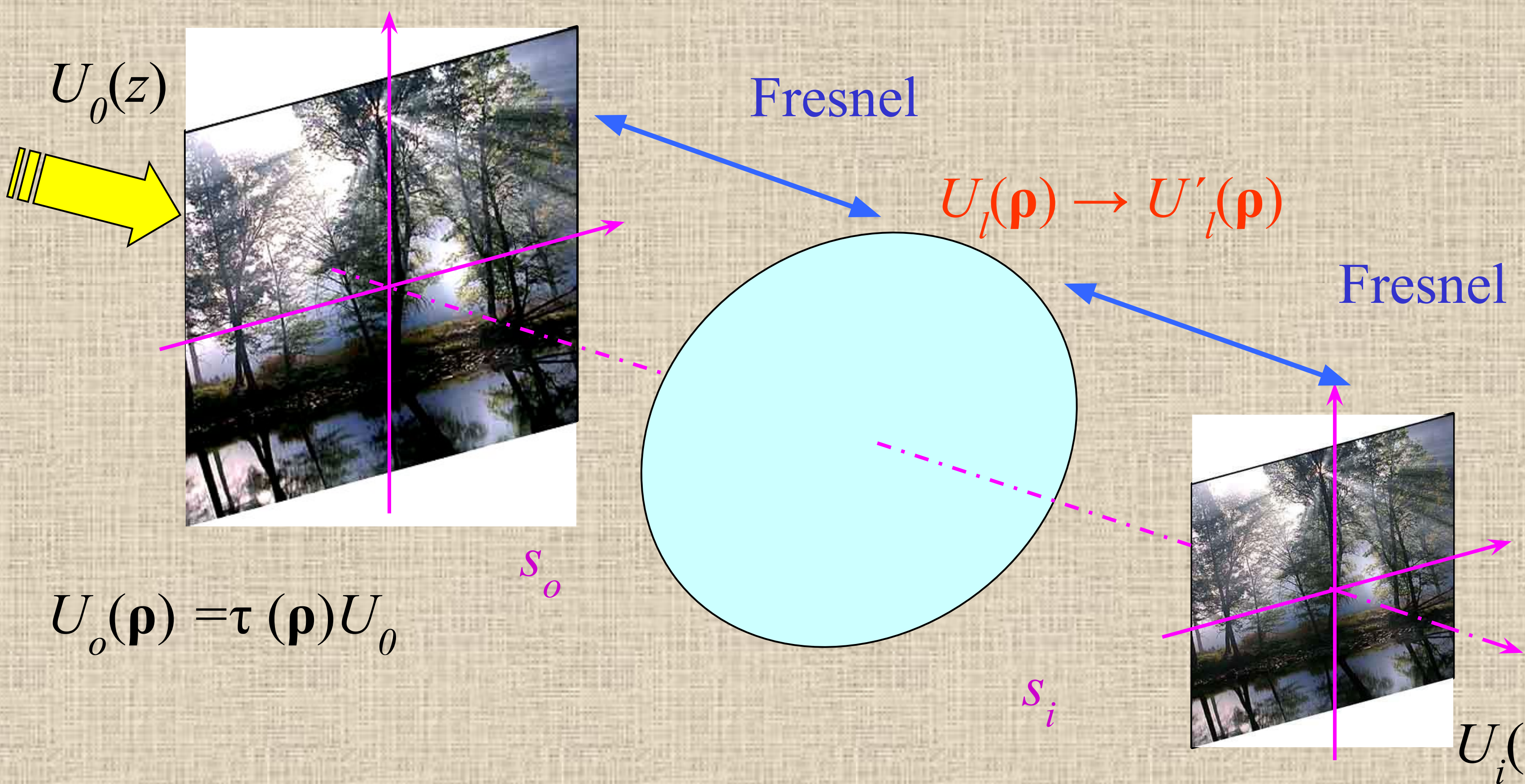
Общая картина электромагнитного поля



- пятно много меньше размера *a*, интенсивность по падающей волне – приближение ГО;
- пятно соизмерим с *a*, влияние соседних областей велико, интенсивность сильно изменяется с расстоянием – дифракции Fresnel;
- пятно много больше *a*, интенсивность мало зависит от расстояния – дифракция Fraunhofer.

Открыватель дифракции монах-иезуит Франческо Гримальди (Grimaldi, 1618-1663)

Поле в плоскости анализа ОС



Для анализа ОС дифракцию Fresnel можно считать точным решением скалярного волнового уравнения

Оптическая передаточная функция

Для систем инвариантных к сдвигу можно предложить иное разбиение входного сигнала на элементарные, что приведет к иной формулировки принципа суперпозиции

$$E_i(\mathbf{k}) = \int E_i(\mathbf{r})\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}}\, d^2r,\;\; E_\mathrm{o}(\mathbf{k}) = \int E_\mathrm{o}(\mathbf{r})\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}}\, d^2r,\;\; H(\mathbf{k}) = \int h(\mathbf{r})\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}}\, d^2r$$

$$E_i(\mathbf{r}_i) = \int E_\mathrm{o}(\mathbf{r}_\mathrm{o})h(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_\mathrm{o})\, d^2r_\mathrm{o}$$

$$\iint E_\mathrm{o}(\mathbf{r}_\mathrm{o})h(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_\mathrm{o})\, d^2r_\mathrm{o} e^{i\mathbf{kr}_i}\, d^2r_i = \int E_\mathrm{o}(\mathbf{r}_\mathrm{o})\int h(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_\mathrm{o})\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}_i}\, d^2r_i d^2r_\mathrm{o} =$$

$$\int E_\mathrm{o}(\mathbf{r}_\mathrm{o})\int h(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_\mathrm{o})\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}_i - i\mathbf{kr}_\mathrm{o} + i\mathbf{kr}_\mathrm{o}}\, d^2r_i d^2r_\mathrm{o} = \int E_\mathrm{o}(\mathbf{r}_\mathrm{o})\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}_\mathrm{o}}\int h(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_\mathrm{o})\mathrm{e}^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_\mathrm{o})}\, d^2r_i d^2r_\mathrm{o}$$

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_\mathrm{o}:\;\; \int E_\mathrm{o}(\mathbf{r}_\mathrm{o})\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}_\mathrm{o}}\int h(\boldsymbol{\rho})\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}}\, d^2\rho d^2r_\mathrm{o} = \int E_\mathrm{o}(\mathbf{r}_\mathrm{o})\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}_\mathrm{o}}\, d^2r_\mathrm{o}\int h(\boldsymbol{\rho})\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}}\, d^2\rho = E_\mathrm{o}(\mathbf{k})H(\mathbf{k})$$

$$E_i(\mathbf{k}) = E_\mathrm{o}(\mathbf{k})H(\mathbf{k})$$

Преобразование Fourier переводи свертку в произведение

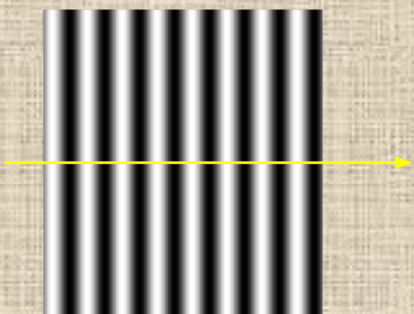
Optical Transmittance Function

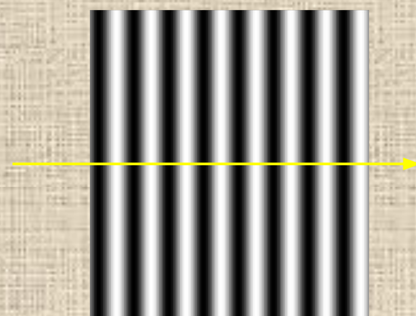
Пространственные гармоники

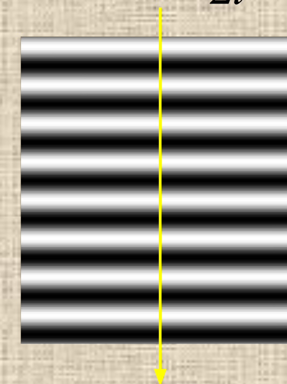
$$\sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$$

$$\sin ky = \frac{e^{iky} - e^{-iky}}{2i}$$

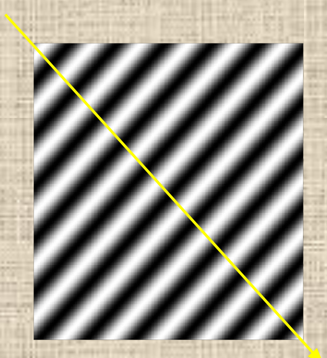


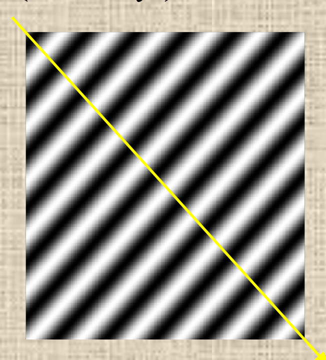


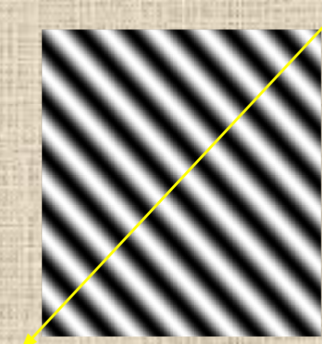


$$\sin(kx + ky) = \sin \mathbf{kr} = \frac{e^{i\mathbf{kr}} - e^{-i\mathbf{kr}}}{2i}$$

$$\cos(kx + ky) = \cos \mathbf{kr} = \frac{e^{i\mathbf{kr}} + e^{-i\mathbf{kr}}}{2}$$





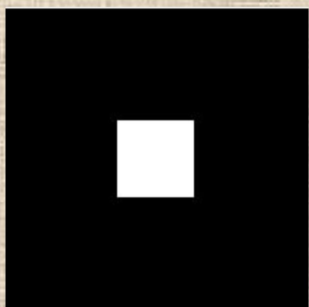


Пространственные гармоники
– специальные элементарные сигналы

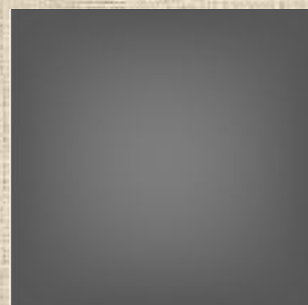
Пространственный спектр изображения

$$E_i(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{M} c_l \, \mathrm{e}^{il\mathbf{k}_0\mathbf{r}}$$

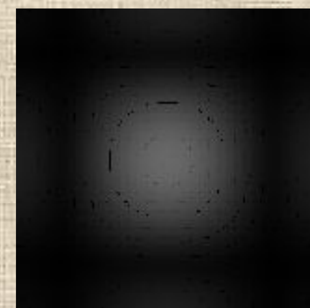
Исходное N=256



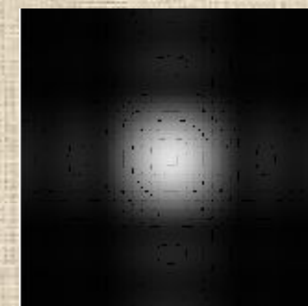
M=1



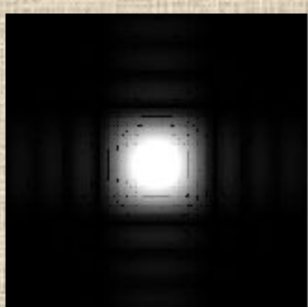
M=2



M=4



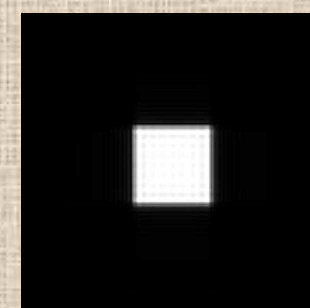
M=8



M=16

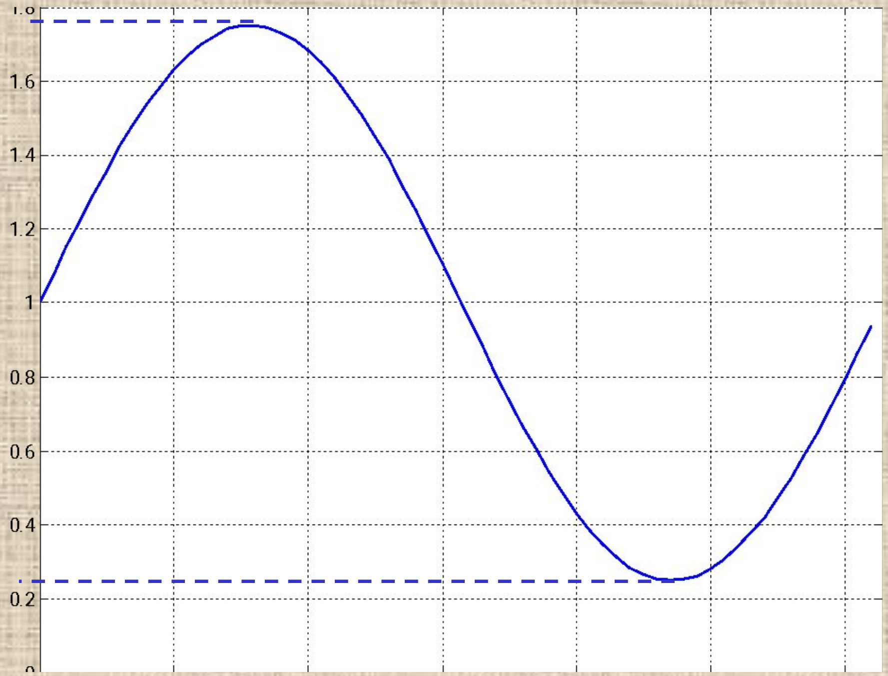
M=32

M=64



Пространственный спектр – разложение изображения на сумму элементов: пространственных гармоник

Преобразование спектра линейной системой



$$\bar{I} = \frac{I_{\max} + I_{\min}}{2}, \quad \Delta I = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2}$$

$$K = \frac{\Delta I}{\bar{I}} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

$$I_o(x) = \bar{I}_o + \Delta I_o \sin(kx), \;\; I_i(x) = \bar{I}_i + \Delta I_i \sin(kx)$$

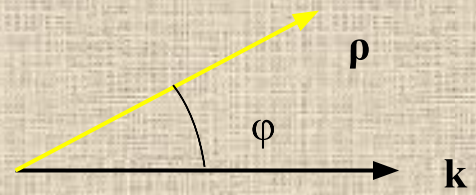
$$K_i = \frac{\Delta I_i}{\bar{I}_i} = \frac{|H(k)|\Delta I_o}{H(0)\bar{I}_o} = \frac{|H(k)|}{H(0)} K_o, \;\; T(k) = \frac{|H(k)|}{H(0)}$$

- $|H(\mathbf{k})|$ - модуляционная передаточная функция (МПФ)
- $\arg H(\mathbf{k})$ – фазовая передаточная функция (ФПФ)

Нормированная МПФ характеризует передачу контраста в изображении

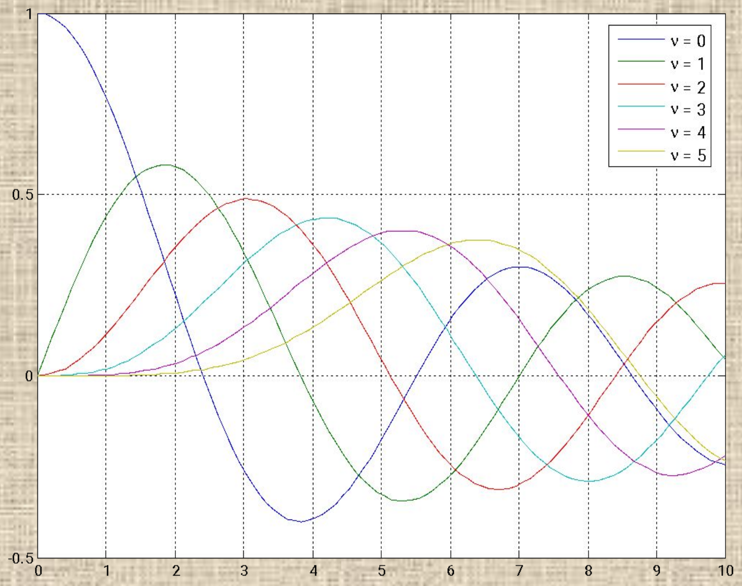
Круглосимметричные системы

$$h(\rho) = h(|\boldsymbol{\rho}|) = h(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_o|)$$



$$H(\mathbf{k}) = \int h(\rho) e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}} d^2\rho = \int_0^\infty h(\rho) \int_0^{2\pi} e^{ik\rho\cos\varphi} d\varphi \ \rho d\rho$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix\cos\varphi} d\varphi = J_0(x)$$



$$H(\mathbf{k}) = 2\pi \int_0^\infty h(\rho) J_0(k\rho)\rho d\rho \equiv H(k)$$

$$h(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty H(k) J_0(k\rho) k dk$$

Преобразование Hankel всегда действительная функция – отсутствие фазовых искажений

Система

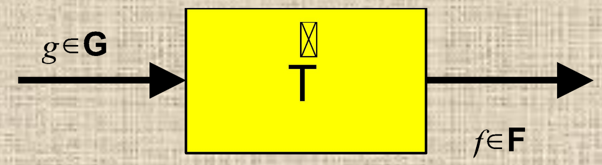
Пусть имеется набор элементов f∈**F** и g∈**G**, **G**, **F** – линейные пространства:

$$\forall g_1, g_2 \in \mathbf{G} \text{ и } \forall f_1, f_2 \in \mathbf{F}$$

$$g_1 + g_2 \in \mathbf{G},\ \alpha g_1 \in \mathbf{G},\ f_1 + f_2 \in \mathbf{F},\ \alpha f_1 \in \mathbf{F}$$

где α - комплексное число.

Система – правило сопоставление элементов из одного пространства элементам другого



$$(\forall g \in \mathbf{G})(\exists f \in \mathbf{F}):\ f = \hat{T}g$$

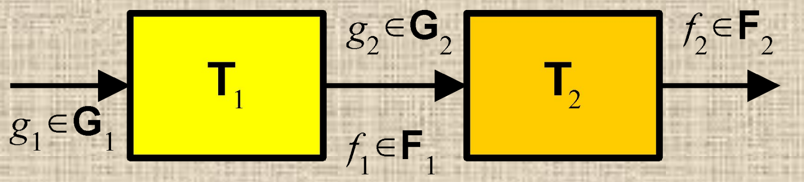
1. **F**≡**G** – преобразование;
2. если ($\forall g$∈**G**)($\exists f$∈**F**) и при этом f – единственное и наоборот, то отображение называется взаимно-однозначным;
3. если $g=g(t)$, $f=f(\mathrm{t})$, то система называется одномерным, если $g=\mathrm{g}(x,y)\equiv\mathrm{g}(\mathbf{r})$ и $f=f(x,y)\equiv f(\mathbf{r})$, то система двумерная, а ее сигналы принято называть полями;
4. сигналы могут быть как скалярами, так и векторами (матрицами).

Система осуществляет отображение пространства входных сигналов в пространство выходных

Линейная система

если множество выходных сигналов первой системы является подмножеством входных сигналов второй системы, то

$$f_2 = \hat{\mathsf{T}}_2 g_2 = \hat{\mathsf{T}}_2 f_1 = \hat{\mathsf{T}}_2 \hat{\mathsf{T}}_1 g_1 = \hat{\mathsf{T}} g_1$$



то есть любую составную систему всегда можно заменить одной системой

Описание систем значительно упрощается, если система линейная. Система называется линейной, если

$$(\forall g_i \in \mathbf{G})(\forall \alpha_i):\quad \hat{\mathrm{L}}\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i g_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \hat{\mathrm{L}}(g_i)$$

Является математической формулировкой принципа суперпозиции