

# **Основные теоремы теории вероятностей**

## **Учебные вопросы.**

1. Теорема сложения вероятностей для несовместных событий.

2. Условные вероятности. Зависимые и независимые события. Теорема умножения вероятностей.

3. Формула полной вероятностей. Формула Байеса.

В теории вероятностей случайные события рассматриваются с точки зрения теории множеств, что позволяет определить отношения над ними.

### **Первый учебный вопрос.**

**Теорема сложения вероятностей суммы несовместных событий.**

**Теорема.** *Вероятность суммы несовместных событий  $A$  и  $B$  равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

**Доказательство.** Введем обозначения:  
 $n$  – общее число возможных элементарных исходов испытания;  $m_1$  – число исходов, благоприятствующих событию  $A$ ;  $m_2$  – число исходов, благоприятствующих событию  $B$

Число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению либо события  $A$ , либо события  $B$ , равно  $m_1 + m_2$ .

Следовательно,

$$P(A+B) = (m_1 + m_2) / n = m_1 / n + m_2 / n.$$

Приняв во внимание, что  $m_1 / n = P(A)$  и  $m_2 / n = P(B)$ , окончательно

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

**Теорема.** Если события  $A_1, \dots, A_n$  попарно несовместны, то вероятность суммы этих событий равна сумме их вероятностей, т.е.

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

## **Теорема сложения вероятностей совместных событий**

Два события называют *совместными*, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

**Теорема.** Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (4)$$

**Вероятность суммы трех совместных событий равна:**

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cdot B) - P(B \cdot C) - P(A \cdot C) + P(A \cdot B \cdot C).$$

**Полная группа событий**

**Теорема.** Сумма вероятностей событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1. \quad (2)$$

## Теорема.

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

(3)

Если обозначить

$$P(A) = p,$$

то формула (3) примет вид

$$p + q = 1.$$

## Пример.

Вероятность того, что день будет дождливым,  $p = 0,7$ . Найти вероятность того, что день будет ясным.



**Решение.** События «день дождливый» и « день ясный»- противоположные, поэтому искомая вероятность

$$q=1-p=1-0,7=0,3$$

**Замечание.** При решении задач на отыскание вероятности события  $A$  часто выгодно сначала вычислить вероятность события  $\bar{A}$  а затем найти искомую вероятность по формуле  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .

.

**Пример.** В урне 10 шаров: 3 красных, 5 синих и 2 белых. Какова вероятность вынуть цветной шар, если вынимается один шар?

**Решение.**

Вероятность вынуть красный шар  $P(A)=3/10$ ,  $P(B)=5/10$ .

Так как события АВ не совместимы, то по доказанной выше теореме

$$P(A+B) = P(A)+P(B) = 0,3+0,5=0,8.$$

**Пример.** Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 3 области. Вероятность попадания в первую область равна 0,45, во вторую- 0,35. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадает либо в первую, либо во вторую область.

**Решение.** События А- «стрелок попал в первую область» и В- «стрелок попал во вторую область»- несовместны (попадание в одну область исключает попадание в другую), поэтому теорема сложения применима.

Искомая вероятность

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = 0,45 + 0,35 = 0,80$$

**Пример.** В урне находятся 12 белых и 8 черных шаров. Какова вероятность того, что наудачу вынутый шар будет белым?

**Решение.**

Пусть  $A$ - событие, состоящее в том, что вынут белый шар. Ясно, что  $n=12+8=20$ - число всех равновозможных случаев (исходов опыта). Число случаев, благоприятствующих событию  $A$ , равно 12, т.е.  $m=12$ .

Искомая вероятность

$$P(A)=12/20=0,6.$$

**Пример.** В урне 30 шаров: 10 красных ,5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

**Решение.** Появления цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара.

Вероятность появления красного шара (событие А)

$$P(A) = 10/30 = 1/3.$$

Вероятность появления синего шара (событие В)

$$P(B) = 5/30 = 1/6.$$

События А и В несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому теорема сложения применима.

Искомая вероятность

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = 1/3 + 1/6 = 1/2.$$

**Условная вероятность. События, независимые в совокупности Теорема умножения вероятностей**

Произведением двух событий А и В называют событие  $(AB)$ , состоящее в совместном появлении событий А и В.

## **Зависимые и независимые события.**

Событие  $A$  называют **независимым** от события  $B$ , если вероятность события  $A$  не зависит от того, произошло событие  $B$  или нет.

Событие  $A$  называют **зависимым** от события  $B$ , если вероятность события  $A$  зависит от того, произошло событие  $B$  или нет.

## Условная вероятность

### Определение.

*Вероятность события  $A$ , вычисленная при условии, что произошло событие  $B$ , называется условной вероятностью события  $A$  и обозначается так:  $P(A/B)$ , или  $P_B(A)$ .*

**Определение.** Два события  $A$  и  $B$  называются независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от появления или не появления другого,

$$P_B(A) = p(A); \quad p_A(B) = p(B).$$



**Теорема.** Вероятность произведения двух зависимых событий  $A$  и  $B$  равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A)P_A(B) \quad (1)$$

**Замечание.** Применив формулу (1) к событию  $BA$ , получим

$$P(BA) = P(B)P_B(A). \quad (2)$$

Так как  $AB=BA$  ,то

а сравнивая (1) и (2), получаем  
равенство

$$P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A).$$

**Следствие.** Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных. При этом вероятность каждого последующего события подсчитывается в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) \dots \\ \dots P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n),$$

$$P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n) -$$

где вероятность события  $A_n$ ,  
вычисленная в предположении, что  
события  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  наступили.

В частности, для трех событий  
 **$P(ABC) = P(A) P_A(B) P_{AB}(C)$ .**

## Теорема умножения для независимых событий

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей:  $P(AB) = P(A)P(B)$ .

Для трех независимых событий A, B, C формула принимает вид:  $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ .

**Теорема.** Вероятность совместного появления  $n$  событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$  независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

**Пример.** Найти вероятность совместного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием (событие А) равна 0,8, а вторым (событие В) -0,7.

**Решение.** События А и В независимые, поэтому, по теореме умножения, искомая вероятность

$$P(AB) = P(A) P(B) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56.$$

**Теорема.** ( о вероятности наступления хотя бы одного из  $n$  независимых событий).

**Теорема.** Если события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  независимы в совокупности, то вероятность наступления хотя бы одного из этих событий (т.е. вероятность суммы) вычисляется по формуле

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\dots P(\bar{A}_n).$$

**Пример.** Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы:  $p_1=0,8$ ;  $p_2=0,7$ ;  $p_3=0,9$ .

Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие  $A$ ) при одном залпе из всех орудий.

**Решение.** Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результатов стрельбы из других орудий, поэтому рассматриваемые события  $A_1$  (попадание первого орудия),  $A_2$  (попадание третьего орудия) независимы в совокупности.

Вероятности событий, противоположных событиям  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  (т.е. вероятности промахов), соответственно равны:



$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,8 = 0,2;$$

$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0,7 = 0,3;$$

$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0,9 = 0,1.$$

Искомая вероятность

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,994.$$

# Задачи

- В урне 5 красных и 8 белых шаров. Из урны последовательно без возвращения вынимают два шара. Найти вероятность того, что: а) оба шара белые; б) оба шара красные; в) первый шар белый, а второй красный; г) шары разного цвета.
- В лотерее выпущено 10000 билетов и установлены 10 выигрышей по 1000 рублей, 100 – по 500 рублей, 500 – по 100 рублей и 1000 выигрышей по 25 рублей. Гражданин купил 1 билет. Какова вероятность того, что он выиграет не меньше 100 рублей?

# Задачи

- Студент знает ответы на 20 вопросов из 25. Экзаменатор последовательно задает студенту три вопроса. Найти вероятность того, что студент: а) ответит на все вопросы; б) не ответит ни на один вопрос; в) ответит на первый и второй вопросы, но не ответит на третий вопрос; г) ответит только на один вопрос.
- Вероятность попадания в цель при одном выстреле для первого стрелка равна  $p$ , для второго – 0,7. Вероятность ровно одного попадания при одном выстреле обоих стрелков равна 0,38. Найти  $p$ .

# Задачи

- Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить четыре бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны: 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.
- В мешке содержится десять одинаковых кубиков с номерами от 1 до 10. Наудачу извлекают по одному три кубика. Найти вероятность того, что последовательно появятся кубики с номерами 1, 2, 3, если кубики извлекаются: а) без возвращения; б) с возвращением (извлеченный кубик возвращается в мешок).

## Третий учебный вопрос

### Формула полной вероятности. Формула Байеса.

*Следствием основных теорем вероятностей – теорем сложения и умножения вероятностей – является формула полной вероятностей.*

#### **Постановка задачи.**

Допустим событие  $A$  может наступать при появлении одного из несовместных событий  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . Эти события образуют полную группу. Такие события  $B_i$  называются **гипотезами**.

Также даны вероятности этих событий и условные вероятности

$$P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), \dots, P_{B_n}(A)$$

события  $A$ . Для нахождения вероятности события  $A$  можно воспользоваться следующей теоремой.

### **Теорема (формула полной вероятности)**

Пусть несовместные события  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , образуют полную группу. Тогда вероятность события  $A$ , которое может наступить только при условии появления одного из этих несовместных событий

равняется сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события  $A$ :

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots \\ \dots + P(B_n)P_{B_n}(A),$$

где  $P(V_1)$  - вероятность события  $V_1$  ;

$P(V_2)$  - вероятность  
события  $V_2$  ;

$P(V_i)$  - вероятность  
события  $V_i$  ;

$P_{B_i}(A)$  - условная вероятность события  $A$   
при условии, что произошло событие  $V_i$ .

Эту формулу называют

« формулой полной вероятности ».



**Пример.** В магазин поступает изделия с двух фабрик, причем 40% из них изготовлены фабрикой №1, а остальные – фабрикой №2. Фабрика №1 дает 90% изделий первого сорта, а фабрикой №2 75%. Какова вероятность того, что купленное наудачу изделие окажется первого сорта?

**Решение.** Рассмотрим события:

А изделие, купленное наудачу, первого сорта;

$B_1$  - изделие произведено на фабрике №1;

Так как событие  $A$  может состояться лишь при условии выполнения одной из гипотез  $B_1$  или  $B_2$ , то по формуле полной вероятности имеем:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A).$$

Найдем вероятности гипотез, входящие в эту формулу. Так как на каждые 100 поступивших в магазин изделий 40 изготовлено фабрикой №1 (40%), а остальные 60 – фабрикой №2, то

$$P(B_1) = 40/100 = 0,4;$$

$$P(B_2) = 60/100 = 0,6$$

По условию задачи

$$P_{B_1}(A) = 0,9;$$

$$P_{B_2}(A) = 0,75;$$

Подставляя найденные вероятности в формулу (\*\*), получим:

$$P(A) = 0,4 \cdot 0,9 + 0,6 \cdot 0,75 = 0,81$$

## Вывод формулы Байеса . Примеры.

**Задача.** Имеется полная группа несовместных гипотез  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , вероятность которых  $P(V_i)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) известных до опыта (вероятности априори). Производится опыт (испытание), в результате которого зарегистрировано появление события  $A$ , причем известно, что этому событию наши гипотезы приписывали определенные вероятности  $P_i(A)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Тогда вероятность появления события  $A$  равна:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Найдем условные вероятности

$$P_A(B_1), P_A(B_2), \dots, P_A(B_n).$$

В соответствии с теоремой умножения условная вероятность  $P_A(B_1)$  равна:

$$P(AB_1) = P(A)P_A(B_1) = P(B_1)P_{B_1}(A),$$

Тогда 
$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}.$$

После преобразований получим

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A)}.$$

Эти формулы носят название формул Байеса, благодаря которым можно оценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в результате которого появилось событие А.

**Примеры.** В цехе работают 20 станков, изготавливающих одинаковые детали. Из них 10 станков- 1-го типа, 6 станков – 2-го типа, а остальные – 3-го типа.

Вероятности того, что качество детали окажется отличным на станках этих типов, равны соответственно 0,9, 0,8 и 0,7. Производительность всех типов станков одинакова.

Условная вероятность любой гипотезы  $B_i$  ( $i=1,2,3,\dots,n$ ) рассчитывается следующим образом:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A)}.$$



Какова вероятность, что наугад взятая деталь, изготовленная в цехе, окажется отличного качества?

Наугад взятая деталь оказалась отличного качества. Какова вероятность, что она была изготовлена на станке 1-го типа?

**Решение.**

Обозначим события:

A- наугад взятая деталь отличного качества;

$B_1$  - наугад взятая деталь изготовлена на станке 1-го типа;

$B_2$  - наугад взятая деталь изготовлена на станке 2-го типа;

$B_3$  - наугад взятая деталь изготовлена на станке

3 -го типа;

Так как производительность всех типов станков одинакова, то количество деталей, изготовленных на станках данного типа, пропорционально количеству станков. Поэтому

$$P(B_1) = 10/20 = 0,5;$$

$$P(B_2) = 6/20 = 0,3;$$

$$P(B_3) = 4/20 = 0,2$$

Вероятности  $P_{B_i}(A)$  даны в условии

задачи:

$$P_{B_1}(A) = 0,9;$$

$$P_{B_2}(A) = 0,8;$$

$$P_{B_3}(A) = 0,7.$$

1. По формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A) = \\ &= 0,5 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,7 = 0,83; \end{aligned}$$

2. По формуле Байеса получим ответ на второй вопрос

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{0,5 \cdot 0,9}{0,83} = 0,54.$$