Теория вероятностей и математическая статистика

Понятие случайного события

- Случайное событие – это любой факт, который в результате испытания может произойти или не произойти. Случайное событие – это результат испытания. Испытание – это эксперимент, выполнение определенного комплекса условий, в которых наблюдается то или иное явление, фиксируется тот или иной результат.
- События обозначаются заглавными буквами латинского алфавита A,B,C.
- Численная мера степени объективности возможности наступления события называется вероятностью случайного события.

Примеры случайных событий

- Подбрасывание монеты

1. Выпадение орла
2. Выпадение решки

- Бросание игральной кости
- Вытаскивание карты из игральной колоды
- Стрельба по мишени

Определение вероятности

- Вероятностью события называется отношение числа элементарных исходов, благоприятствующих данному событию, к числу всех равновозможных исходов опыта в котором может появиться это событие. Вероятность события А обозначают через Р(А) (здесь Р - первая буква французского слова probabilité - вероятность). В соответствии с определением Р(А)=m/n
- где m - число элементарных исходов, благоприятствующих событию А; n - число всех равновозможных элементарных исходов опыта, образующих полную группу событий.
  Это определение вероятности называют классическим. Оно возникло на начальном этапе развития теории вероятностей.

Основные теоремы теории вероятностей

- Теорема умножения вероятностей
- Теорема сложения вероятностей
- Теорема гипотез (формула Бейеса)

Теорема умножения вероятностей.

- Событие A называется независимым от события B, если вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет. Событие A называется зависимым от события B, если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.
- Вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B уже произошло, называется условной вероятностью события A и обозначается $P(A/B)$.
- Условие независимости события A от события B можно записать в виде $P(A/B)=P(A)$.
- Теорема умножения вероятностей. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место: $P(AB)=P(A)P(B/A)$ или $P(AB)=P(B)P(A/B)$.
- Если событие A не зависит от события B, то событие B не зависит от события A. При этом вероятность произведения событий равна произведению их вероятностей: $P(AB)=P(A)P(B)$

Теорема умножения вероятностей

- Пример*:* Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором - 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.
- Вероятность того, что из первого ящика вынута стандартная деталь (событие А) равна Р(А)=8/10=0,8. Вероятность того, что из второго ящика вынута стандартная деталь (событие В) равна Р(В)=7/10=0,7. Вероятность того, что из третьего ящика вынута стандартная деталь (событие С) равна Р(С)=9/10=0,9.

Теорема сложения вероятностей

- Теорема сложения вероятностей совместных событий

Если события и совместны, то вероятность появления одного из них равна сумме их вероятностей минус вероятность их одновременного появления.

P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A*B)

В случае если события A и B несовместны, то есть P(A*B)=0 , то имеет место следующая теорема.

- Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Вероятность появления одного из двух несовместимых событий A и B равна сумме их вероятностей: P(A+B)=P(A)+P(B)

Теорема сложения вероятностей

Примеры: Охотник стреляет в мишень, разделенную на четыре области. Вероятность попадания в первую область равна 0,29; во вторую – 0,23 ; в третью – 0,4. Найти вероятность того, что охотник попадет в первую или во вторую, или в третью мишень.

Обозначим D - событие, вероятность которого необходимо найти, A - охотник попадет в первую область, B – охотник попадет во вторую область, C - охотник попадет в третью область. По условию $P(A)=0,29$;$P(B)=0,23$;$P(C)=0,4$.События A,B,C - несовместны, поэтому по теореме о сложении вероятности несовместных событий имеем: $P(D)=P(A)+P(B)+P(C)=0,92$

Теорема сложения вероятностей

Примеры: В коробке 30 шариков: 17 белых; 9 красных и 4 черных. Какая вероятность того, что взятый наугад шарик будет не черным?

Пусть событие А - "взятый шарик не черный". Тогда противоположное событие В - "взятый шар черный".

P(A)=4/(17+9+4)=2/15

Тогда, по следствию из теоремы о сумме вероятностей, P(A)+P(B)=1

вероятность события В равна

P(B)=1-P(A)=1-2/15=13/15

Теорема гипотез (формула Бейеса)

- Если событие А может происходить только с одной из гипотез, которые образуют полную группу событий, то вероятность гипотез при условии, что событие А произошло, вычисляется по формуле:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P_{H_i}(A)}$$

- Пример: Электролампы изготовляются на двух заводах. Первый завод производит 60% общего количества электроламп, второй – 40%. Продукция первого завода содержит 70% стандартных ламп, второго – 80%. В магазин поступает продукция обоих заводов. Лампочка купленная в магазине оказалась стандартной. Найти вероятность того, что лампа изготовлена на первом заводе.

Теорема гипотез (формула Бейеса)

- Событие А состоит в том, что лампа стандартная.

Гипотеза Н1 состоит в том, что лампа изготовлена на первом заводе

Р(Н1)=0,6; РН1(А)=0,7

Гипотеза Н2 состоит в том, что лампа изготовлена на втором заводе

Р(Н2)=0,4; РН2(А)=0,8

Элементы математической статистики

- **Среднее арифметическое**(в математике и статистике) множества чисел - число, равное сумме всех чисел множества, делённой на их количество.

Пример: Утром температура была 15 градусов, днём она поднялась до 27 градусов, а вечером опустилась до 19, ночью температура достигла отметки в 11 градусов. Найти среднюю температуру за сутки. Сначала найдём общую сумму температур за сутки:

$$15 + 27 + 19 + 11 = 72$$

затем разделим полученную сумму на 4:

$$72 : 4 = 18$$

Ответ: средняя температура за сутки равна 18 градусам.

Элементы математической статистики

- **Мода**— значение во множестве наблюдений, которое встречается наиболее часто.

$$Mo = x_{Mo} + i_{mo} \frac{(f_{Mo} - f_{Mo-1})}{(f_{Mo} - f_{Mo-1}) + (f_{Mo} - f_{Mo+1})}$$

- **Медиана** – это значение признака, приходящееся на середину ранжированной совокупности. Иначе медиана – это величина, которая делит численность упорядоченного вариационного ряда на две равные части – одна часть имеет значения варьирующего признака меньшие, чем средний вариант, а другая – большие.

Элементы математической статистики

Пример: найти моду и медиану.

Возрастные группы	Число студентов	Сумма накопленных частот ΣS
До 20 лет	346	346
20 — 25	872	1218
25 — 30	1054	2272
30 — 35	781	3053
35 — 40	212	3265
40 — 45	121	3386
45 лет и более	76	3462
Итого	3462	

Элементы математической статистики

В данном примере модальный интервал находится в пределах возрастной группы 25-30 лет, так как на этот интервал приходится наибольшая частота (1054).

Рассчитаем величину моды:

Это значит что модальный возраст

$$M_0 = x_0 + h\frac{f_m - f_{m-1}}{(f_m - f_{m-1}) + (f_m - f_{m+1})} = 25 + 5\frac{1054 - 872}{(1054 - 872) + (1054 - 781)}$$

$$= 27 \text{ лет.}$$

Вычислим медиану. Медианный интервал находится в возрастной группе 25-30 лет, так как в пределах этого интервала расположена варианта, которая делит совокупность на две равные части ($\Sigma f_i/2 = 3462/2 = 1731$). Далее подставляем в формулу необходимые числовые данные и получаем значение медианы:

$$M_e = x_0 + h\frac{\frac{\Sigma f_i}{2} - S_{m-1}}{f_m} = 25 + 5\frac{\frac{3462}{2} - 1218}{1054} = 27{,}4 \text{ года.}$$

Это значит что одна половина студентов имеет возраст до 27,4 года, а другая свыше 27,4 года.

Элементы математической статистики

- **Размахом ряда** чисел называется разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел.

Размах ряда 5,24, 6,97, 8,56, 7,32, 6,23 равен 8,56-5,24=3,32

Дискретная случайная величина

- Дискретная случайная величина — это случайная величина, множество значений которой не более чем счётно (то есть конечно или счётно). Очевидно, значения дискретной случайной величины не содержат какой-либо непрерывный интервал на числовой прямой.

Примеры:

1. Любая случайная величина, принимающая целочисленные значения.
2. Моменты испускания альфа-частиц атомом радиоактивного элемента.

Математическое ожидание

- **Математическое ожидание**— среднее значение случайной величины (распределение вероятностей стационарной случайной величины) при стремлении количества выборок или количества измерений (иногда говорят — количества испытаний) её к бесконечности.
- Среднее арифметическое одномерной случайной величины конечного числа испытаний обычно называют *оценкой математического ожидания*. При стремлении числа испытаний стационарного случайного процесса к бесконечности оценка математического ожидания стремится к математическому ожиданию.
- Математическое ожидание — одно из основных понятий в теории вероятностей.

Закон больших чисел

- **Закон больших чисел** (ЗБЧ) это принцип, который описывает результат выполнения одного и того же эксперимента много раз. Согласно закону, среднее значение конечной выборки из фиксированного распределения близко к математическому ожиданию этого распределения.
- ЗБЧ важен, поскольку он гарантирует устойчивость для средних значений некоторых случайных событий при достаточно длинной серии экспериментов.
- Важно помнить, что закон применим только тогда, когда рассматривается большое количество испытаний.
- Применяется во многих науках и сферах.