

Лекция 4 Аналоговые и дискретные сигналы и связь между ними

Вопросы лекции:

- 1. Аналоговые, дискретные и цифровые сигналы.***
- 2. Частота Найквиста.***
- 3. Спектр дискретного сигнала.***
- 4. Теорема Котельникова.***

Литература:

Гадзиковский В.И. Цифровая обработка сигналов. Учеб. пособие. – М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2013 [Электронный ресурс].

Точка доступа: <http://www.iprbookshop.ru/26929.html>

Сергиенко Ф.Б. Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2002. – 608 с.

1. Аналоговые, дискретные и цифровые сигналы

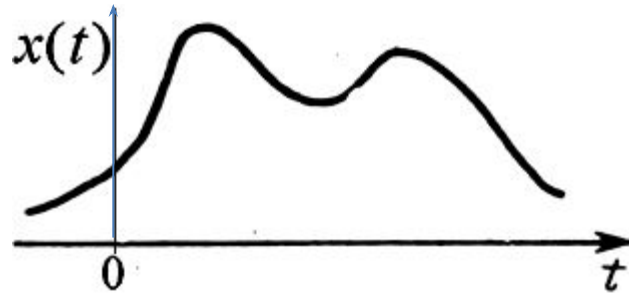
- **Сигна́л** — носитель информации, используемый для передачи сообщений в системе связи. Сигнал может генерироваться, но его приём не обязателен, в отличие от сообщения, которое рассчитано на принятие принимающей стороной, иначе оно не является сообщением.
- **Сигналом** может быть *любой физический процесс*, параметры которого изменяются (или находятся) в соответствии с передаваемым сообщением.

Сигналы могут быть:

- непрерывными (аналоговыми);
- дискретными;
- Цифровыми.

Аналоговые сигналы

Аналоговые или *континуальные* сигналы описываются непрерывными и кусочно-непрерывными функциями причем как сама функция, так и ее аргумент могут принимать любые значения в пределах некоторого интервала.

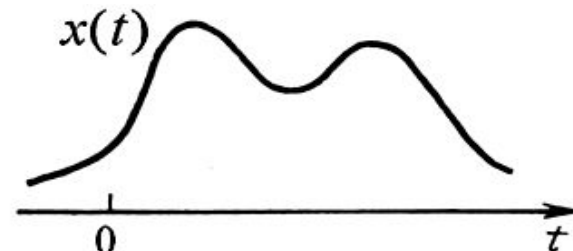
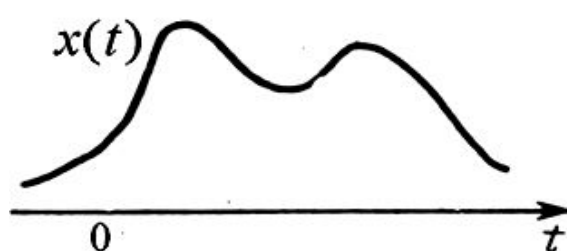


Дискретные сигналы

Дискретный сигнал $x_D(t)$ равен аналоговому сигналу $x(t)$ в моменты дискретизации последовательностью прямоугольных импульсов (а) и последовательностью дельта-импульсов (б).

Дискретизация аналогового сигнала последовательностью прямоугольных импульсов (а) и последовательностью дельта-импульсов (б)

Исходный сигнал

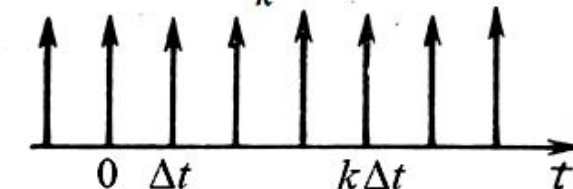


Дискретизирующая последовательность

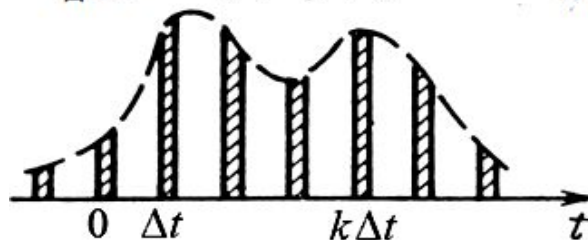
$$y(t) = \sum_k \Pi_\tau(t - k\Delta t)$$



$$y(t) = \Delta t \sum_k \delta(t - k\Delta t)$$

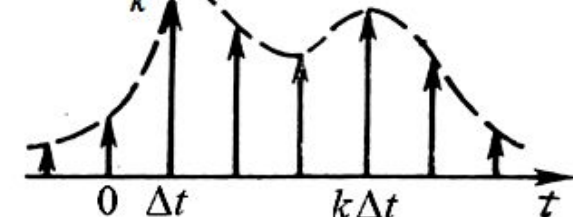


$$x_D(t) = x(t) \cdot y(t)$$



а)

$$x_D(t) = \Delta t \sum_k x(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t)$$



б)

Результат дискретизации

Цифровые сигналы

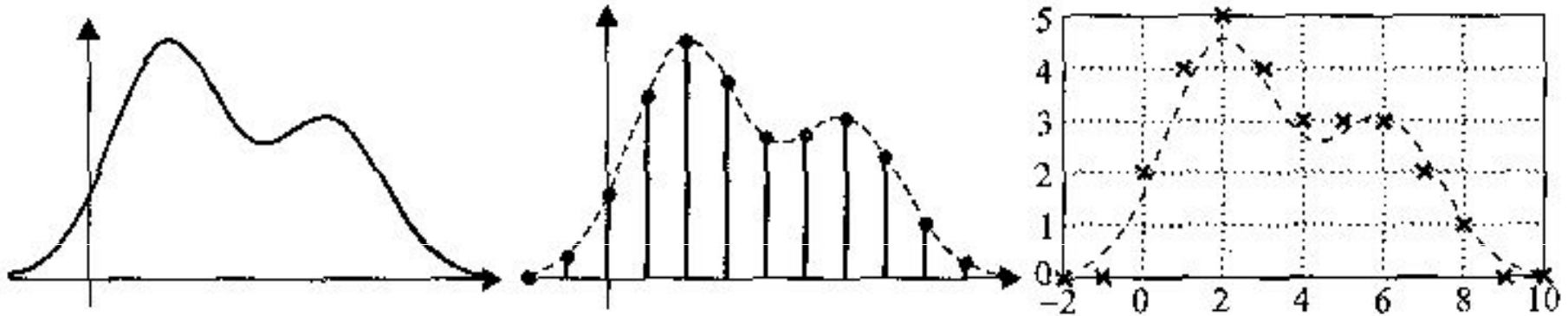


Рис. 3.1. Аналоговый (слева), дискретный (в центре) и цифровой (справа) сигналы

Цифровой сигнал $x(n)$ иногда называют *числовой последовательностью* и обозначают x_n . Цифровой сигнал получается на выходе АЦП.

Иногда удобно пользоваться термином *энергии* последовательности. Энергия E последовательности $x(n)$ определяется как

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2$$

Говорят, что последовательность y является *задержанной* или *сдвинутой* последовательностью x , если y имеет значения $y(n) = x(n-k)$, где k — целое число.

Примеры последовательностей

Единичный импульс $\delta(n)$ определяется как последовательность со значениями

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, n = 0; \\ 0, n \neq 0. \end{cases}$$

Единичная ступенчатая последовательность $u(n)$ имеет значения

$$u(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases} \quad ,$$

и связана с единичным импульсом соотношением

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k).$$

И, наоборот, единичный импульс связан с единичной ступенчатой последовательностью соотношением

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1).$$

Произвольная последовательность может быть представлена как *сумма взвешенных и задержанных единичных импульсов*. В общем случае произвольная последовательность записывается в виде

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k).$$

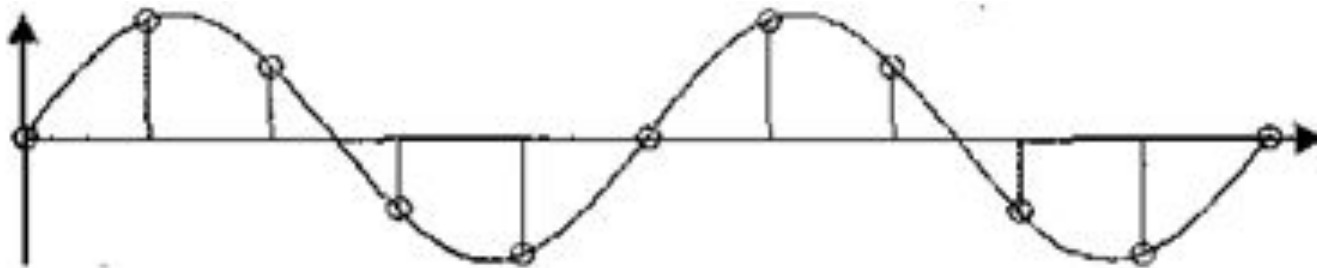
2. Частота Найквиста

Гармонический сигнал может быть адекватно представлен дискретными отсчетами, если его частота не превышает половины частоты дискретизации (эта частота называется *частотой Найквиста* (Nyquist frequency)):

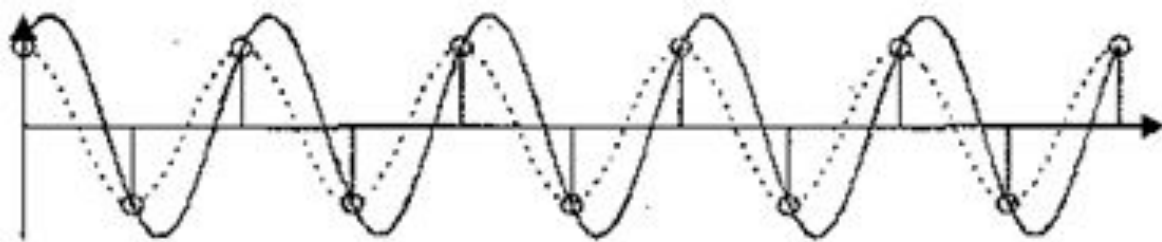
$$f_N = f_D / 2 = 1/(2T); \omega_N = \omega_D / 2 = \pi / T$$

В зависимости от соотношения между частотой дискретизируемого гармонического сигнала и частотой Найквиста возможны три случая:

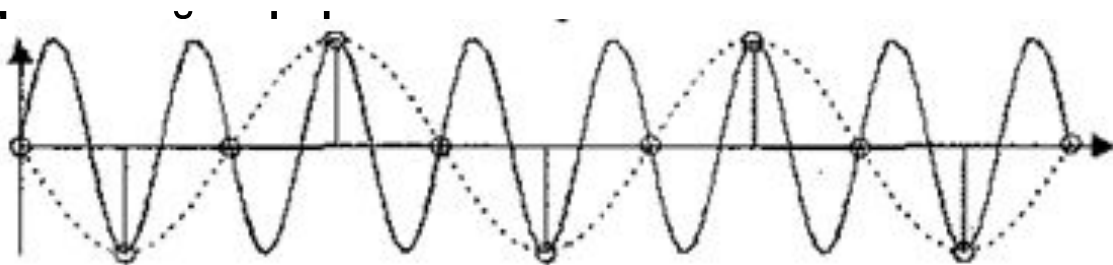
1. Если частота гармонического сигнала *меньше* частоты Найквиста, дискретные отсчеты позволяют правильно восстановить аналоговый сигнал



2. Если частота гармонического сигнала *равна* частоте Найквиста, то дискретные отсчеты позволяют восстановить аналоговый гармонический сигнал с той же частотой, но амплитуда и фаза восстановленного сигнала (он показан пунктирной линией) могут быть искажены. В худшем случае все дискретные отсчеты синусоиды могут оказаться равными нулю.



3. Если частота гармонического сигнала *больше* частоты Найквиста, восстановленный по дискретным отсчетам аналоговый сигнал (как и в предыдущем случае, он показан пунктирной линией) будет также гармоническим, но с иной частотой. **Д** **ЛОЖНЫХ ЧАСТОТ**



ЕНИА

3. Спектр дискретного сигнала

- Дискретный сигнал является *последовательностью чисел*, поэтому для анализа его спектра преобразованием Фурье (обычными – аналоговыми средствами) необходимо сопоставить этой последовательности некоторую функцию. Используем для этого динамическое представление дискретного сигнала () с помощью дельта-функции x_k

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta(t - k)$$

- Преобразование Фурье линейно, спектр дельта-функции равен единице, а задержка сигнала во времени приводит к умножению спектра на комплексную экспоненту. Все это позволяет сразу же записать спектр дискретного сигнала:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(t - k) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(k) \delta(t - k) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - k) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\omega kT}. \end{aligned}$$

Преобразование Фурье линейно, спектр дельта-функции равен единице, а задержка сигнала во времени приводит к умножению спектра на комплексную экспоненту. Все это позволяет сразу же записать спектр дискретного сигнала:

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\omega kT}. \quad (2)$$

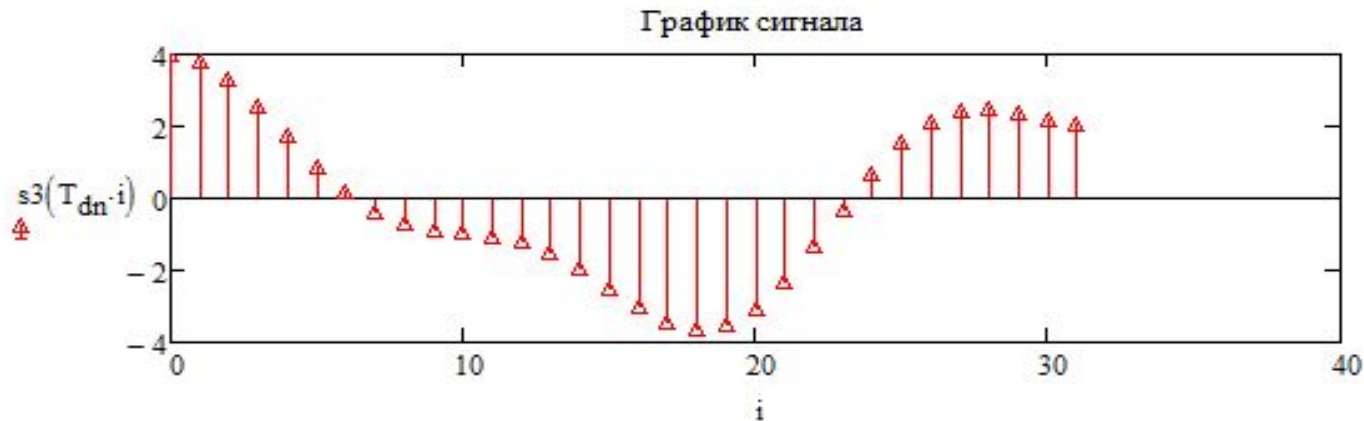
Из этой формулы видно главное свойство спектра любого дискретного сигнала: спектр является периодическим, и его период в данном случае равен (то есть круговой частоте дискретизации, поскольку, составляя сигнал из дельта-функций, мы выбрали единичный интервал между ними, что дает $\omega_D = 2\pi$):

$$S(\omega \pm 2\pi) = S(\omega).$$

4. Теорема Котельникова

- Теорема Котельникова гласит, что, если аналоговый сигнал $x(t)$ имеет ограниченный спектр, то он может быть восстановлен однозначно и без потерь по своим дискретным отсчётам, взятым с частотой не менее удвоенной максимальной частоты спектра $F_{\max}$.
- Любой аналоговый сигнал может быть восстановлен с какой угодно точностью по своим дискретным отсчётам, взятым с частотой $f_d = 2F_{\max}$.

Пример восстановления сигнала с помощью теоремы Котельникова



Верхняя частота $f_v := \frac{1}{T_2}$ $f_v = 2.5 \times 10^4$

Период дискретизации $T_d := \frac{T_2}{100}$

Количество отсчетов $N_k := 4000$

Задание временного интервала $\Delta t := \frac{T_2}{50}$ $t := 0, \Delta t.. T_1$

Задание формулы восстанавливаемого сигнала по теореме Котельникова

$$S(t) := \sum_{i=-N_k}^{N_k} \left[(s3(T_d \cdot i)) \cdot \frac{\sin \left[2 \cdot \pi \cdot \frac{2}{T_d} \cdot (t - T_d \cdot i) \right]}{2 \cdot \pi \cdot \frac{2}{T_d} \cdot (t - T_d \cdot i)} \right]$$

График восстановленного сигнала

