

# *Решение уравнений.*

*Математика*

*Преподаватель: Гардт С.М.*

# □ Иррациональные уравнения

-определение;

- алгоритм решения уравнений, содержащие квадратные корни;

- примеры;

-уравнения, содержащие корни других степеней ( $n\sqrt{\quad}$ ,  $n>2$ )

- примеры;

# □ Показательные уравнения:

определение;

свойства степени.

Уравнение типа:  $a^{f(x)} = 1$

Уравнение типа:  $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

Вынести за скобки степень с наименьшим показателем.



*Уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня, называются иррациональными.*

а)  $\sqrt{x+3} = 7$  б)  $2x - 4 = \sqrt{x-1}$

в)  $x - 4x^2 = 0$

Решение иррациональных уравнений сводится к переходу от иррационального к рациональному уравнению путем возведения в степень обеих частей уравнения



# *Алгоритм решения уравнений, содержащие квадратные корни:*

1. возвести обе части уравнения в квадрат;
2. упростить полученное уравнение;
3. при необходимости ещё раз возвести в квадрат и т.д. до тех пор, пока не получится уравнение, не содержащее корни;
4. решить это уравнение;
5. сделать проверку или определить допустимые значения и отобрать соответствующие корни;
6. записать ответ.



# Примеры:

$$\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{x}$$

$$(\sqrt{x^2 - 2})^2 = (\sqrt{x})^2$$

$$x^2 - 2 = x$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$a = 1, b = -1, c = -2$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-1)^2 - 4 * 1 * (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$D > 0, 2k$$

$$x_1 = (1 + \sqrt{9}) / 2 * 1$$

$$x_1 = 4 / 2 \quad x_1 = 2$$

$$x_2 = (1 - \sqrt{9}) / 2 * 1$$

$$x_2 = -2 / 2 \quad x_2 = -1$$

Проверка:

$$\sqrt{2^2 - 2} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ верно}$$

$$\sqrt{(-1)^2 - 2} = \sqrt{-1}$$

-1 не является корнем уравнения.

$$\text{Ответ: } x = 2$$

Самостоятельно:

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{2x-3}$$

$$\sqrt{x^2 - 5} = 2$$

$$(\sqrt{x^2 - 5})^2 = 2^2$$

$$x^2 - 5 = 4$$

$$x^2 = 4 + 5$$

$$x^2 = 9$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{9}$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -3$$

Проверка:

$$\sqrt{3^2 - 5} = 2$$

$$\sqrt{4} = 2 \text{ верно}$$

$$\sqrt{(-3)^2 - 5} = 2$$

$$\sqrt{4} = 2 \text{ верно}$$

Ответ:  $x_1 = 3, x_2 = -3$

Самостоятельно:

$$\sqrt{61 - x^2} = 5$$



# Проверка:

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{2x-3}$$

$$x+2 = 2x-3$$

$$x-2x = -3-2$$

$$-x = -5$$

$$x = 5$$

Проверка:

$$\sqrt{5+2} = \sqrt{2*5-3}$$

$$\sqrt{7} = \sqrt{7} \text{ верно}$$

Ответ:  $x=5$

$$\sqrt{61-x^2} = 5$$

$$61-x^2 = 25$$

$$-x^2 = 25-61$$

$$-x^2 = -36$$

$$x^2 = 36$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{36}$$

$$x_1 = 6$$

$$x_2 = -6$$

Проверка:

$$\sqrt{61-6^2} = 5$$

$$\sqrt{25} = 5 \text{ верно}$$

$$\sqrt{61-(-6)^2} = 5$$

$$\sqrt{25} = 5 \text{ верно}$$

Ответ:  $x_1 = 6, x_2 = -6$



$$\sqrt{2x+7} = x+2$$

$$2x+7 = (x+2)^2$$

$$2x+7 = x^2+4x+4$$

$$-x^2-4x+2x+7-4=0$$

$$-x^2-2x+3=0$$

$$x^2+2x-3=0$$

$$D=4-4*1*(-3)=4+12=16$$

$D>0$ , 2к

$$x_{1,2} = -b \pm \sqrt{D} / 2a$$

$$x_1 = -2+4/2$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -2-4/2$$

$$x_2 = -3$$

**Проверка:**

$$\sqrt{2*1+7} = 1+2$$

$$\sqrt{9} = 3 \text{ верно}$$

$$\sqrt{2(-3)+7} = -3+2$$

$$\sqrt{1} \neq -1 \text{ неверно}$$

**Ответ:  $x=1$**

**Самостоятельно:**

$$\sqrt{x-2} = x-8$$

$$\sqrt{2x+3} = 6-x$$

\*

$$\sqrt{x+1}\sqrt{x+6}=6$$



# *Уравнения, содержащие корни других степеней ( $\sqrt[n]{\phantom{x}}$ , $n > 2$ )*

1. обе части уравнения возвести в степень  $n$ ;
2. решить полученное уравнение.



$$\sqrt[6]{x^2-1} - \sqrt[6]{x+5} = 0$$

$$\sqrt[6]{x^2-1} = \sqrt[6]{x+5}$$

$$(\sqrt[6]{x^2-1})^6 = (\sqrt[6]{x+5})^6$$

$$x^2-1 = x+5$$

$$x^2-x-6=0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$$

$$D > 0, 2k$$

$$x_1 = (1+5)/2$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = (1-5)/2$$

$$x_2 = -2$$

**Проверка:**

$$\sqrt[6]{3^2-1} = \sqrt[6]{3+5}$$

$$\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{8} \text{ верно}$$

$$\sqrt[6]{(-2)^2-1} = \sqrt[6]{(-2)+5}$$

$$\sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{3} \text{ верно}$$

**Ответ:**  $x_1 = 3, x_2 = -2$

Самостоятельно

$$\sqrt[4]{9-x^2} = \sqrt[4]{x+9}$$



## Определение.

Уравнение содержащее переменную в показателе степени называется

$a^x = b$ , показательным.

где  $a > 0$  и  $a \neq 1$ .

1. при  $b > 0$  – 1 корень
2. При  $b < 0$  или  $b = 0$  корней нет.

Помни!

При решении показательных ур-й используются:

1. Теорема: если  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  и  $a^{x_1} = a^{x_2}$ , то  $x_1 = x_2$ .
2. Свойства степени.



# Свойства степени.

$$\square a^0 = 1; a^{-n} = 1/a^n ;$$

$$\square a^n a^m = a^{n+m}$$

$$\square a^n / a^m = a^{n-m}$$

$$\square (a^n)^m = a^{nm}$$

$$\square a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$$

$$\square (ab)^n = a^n b^n$$

$$\square (a/b)^n = a^n / b^n$$

# Уравнение типа: $a^{f(x)} = 1$

где  $f(x)$ - выражение содержащее неизвестное число;  
 $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

Вывод: обе части уравнения привели к одному основанию

Алгоритм решения:  $a^{f(x)} = 1$ .

Заменить  $1 = a^0$        $a^{f(x)} = a^0$ ;

Решить уравнение  $f(x) = 0$ .

Пример:  $3,4^{(5x-3)} = 1$

Решение:

$$3,4^{(5x-3)} = 3,4^0$$

$$5x - 3 = 0$$

$$5x = 3$$

$$x = 3/5$$

Ответ:  $x = 3/5$

Самостоятельно:

а)  $2,5^{4x+2} = 1$

б)  $6^{8+16x} = 1$

Проверка.



# Проверка:

$$\text{a) } 2,5^{4x+2} = 1$$

$$2,5^{4x+2} = 2,5^0$$

$$4x+2 = 0$$

$$4x = -2$$

$$x = -2/4$$

$$x = -1/2$$

Ответ:  $x = -1/2$

$$\text{б) } 6^{8+16x} = 1$$

$$6^{8+16x} = 6^0$$

$$8+16x = 0$$

$$16x = -8$$

$$x = -8/16$$

$$x = -1/2$$

Ответ:  $x = -1/2$



**Уравнение типа:  $a^{f(x)} = a^{g(x)}$**

где  $f(x), g(x)$  - выражение  
содержащее неизвестное число;

**Решить:  $f(x) = g(x)$**

**Пример:  $3^{6-x} = 3^{3x-2}$**

$$6-x = 3x-2$$

$$-x-3x = -2-6$$

$$-4x = -8$$

$$x = 2$$

**Ответ:  $x = 2$**

**Пример:**

$$1) 4^x = 64$$

$$4^x = 4^3$$

$$x = 3$$

**Ответ:  $x = 3$**

$$2) (1/3)^x = 27$$

$$(1/3)^x = 3^{-3}$$

$$(1/3)^x = (1/3)^3$$

$$x = 3$$

**Ответ:  $x = 3$**

**Решить:**

**№460 В,Г**



# Вынести за скобки степень с наименьшим показателем.

$$2^x + 2^{x-1} - 2^{x-3} = 44$$

$$2^{x-3}(2^3 + 2^2 - 2) = 44$$

$$2^{x-3} * 11 = 44$$

$$2^{x-3} = 44 / 11$$

$$2^{x-3} = 4$$

$$2^{x-3} = 2^2$$

$$x-3 = 2$$

$$x = 5$$

**Ответ:  $x=5$**

**Самостоятельно:**

1)  $7^x - 7^{x-1} = 6$

2)  $3^x - 3^{x-2} = 72$

**Проверка.**



# Проверка.

$$1) 7^x - 7^{x-1} = 6$$

$$7^{x-1}(7^1 - 1) = 6$$

$$7^{x-1} * 6 = 6$$

$$7^{x-1} = 6/6$$

$$7^{x-1} = 1$$

$$7^{x-1} = 7^0$$

$$x-1 = 0$$

$$x = 1$$

**Ответ:  $x=1$**

$$2) 3^x - 3^{x-2} = 72$$

$$3^{x-2}(3^2 - 1) = 72$$

$$3^{x-2} * 8 = 72$$

$$3^{x-2} = 72/8$$

$$3^{x-2} = 9$$

$$3^{x-2} = 3^2$$

$$x-2 = 2$$

$$x = 4$$

**Ответ:  $x = 4$**



# С помощью подстановки привести к квадратному уравнению

$$7^{2x} - 48 \cdot 7^x = 49$$

Заменим  $7^x = y$

$$y^2 - 48y = 49$$

$$y^2 - 48y - 49 = 0$$

$$a = 1, b = -48, c = -49$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 2500 \quad (2k)$$

$$y_1 = -1$$

$$y_2 = 49$$

$$7^x = y$$

$$7^x = -1$$

корней нет

заменим

$$7^x = 49$$

$$7^x = 7^2$$

$$x = 2$$

Ответ:  $x = 2$

