

10 способов решения квадратных уравнений

ПОДГОТОВИЛ УЧАЩИЙСЯ 8 «А» КЛАССА СШ №69 Г.МИНСКА

ВВЕДЕНИЕ

- ▶ Теория уравнений занимает одно из ведущих мест в алгебре и математике в целом. Значимость ее заключается в помощи выполнения практических целей, так как большинство жизненных задач сводится к решению различных видов.
- ▶ В школьной программе математики рассматривается только 2 способа их решения. Но мне стало интересно, какие ещё способы решения квадратных уравнений ещё существуют. Поэтому я выбрал тему «10 способов решения квадратных уравнений».

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$3x^2 + 4x + 1 = 0$$

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ

Цель работы: выявить способы решения уравнений второй степени и рассмотреть применение данных способов решения квадратных уравнений на приведённых примерах.

Задачи

- 1) Проследить историю развития теории и практики решения квадратных уравнений;
- 2) Описать технологии различных существующих способов решения квадратных уравнений;
- 3) Выявить достоинства и недостатки каждого способа решения квадратных уравнений;

объект и предмет исследования

Объект исследования: квадратные уравнения.

Предмет исследования: способы решения квадратных уравнений.

ИСТОРИЯ ПОЯВЛЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Уравнения в алгебре возникли в связи с решением разнообразных задач при помощи этих же уравнений. Обычно в задачах требуется найти одну или несколько неизвестных, зная при этом результаты некоторых действий, произведенных над искомыми и данными величинами. Такие задачи сводятся к решению одного или системы нескольких уравнений, к нахождению искомого с помощью алгебраических действий над данными величинами.

Некоторые алгебраические приемы решения линейных и квадратных уравнений были известны еще 4200 лет назад в Древнем Вавилоне.

Правило решения этих уравнений, изложенное в дошедших до нас вавилонских текстах, совпадает по существу с современным, однако неизвестно, каким образом дошли вавилоняне до этого правила.

ВИДЫ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СВЯЗАННЫЕ С НИМИ

Квадратное уравнение – алгебраическое уравнение общего вида

$$ax^2 + bx + c = 0$$

где x — неизвестное, a , b , c -- коэффициенты, причём $a \neq 0$.

Выражение $ax^2 + bx + c = 0$ называют **квадратным трёхчленом**.

Также квадратные уравнения вида **$ax^2 + bx + c = 0$, где $b \neq 0$ и $c \neq 0$** называют **полными** квадратными уравнениями

Квадратные уравнения, в которых коэффициент b или свободный член c , или и b и c равны 0, называются **неполными квадратными уравнениями**.

Приведенное квадратное уравнение — уравнение вида $x^2 + bx + c = 0$, первый коэффициент которого равен единице ($a = 1$)

Корень — это значение переменной обращающее **квадратный трёхчлен** в ноль, а **квадратное уравнение** в верное числовое равенство.

Решить квадратное уравнение — это значит найти множество его корней.

решение квадратных уравнений при помощи дискриминанта

Решение квадратных уравнений по формуле: Корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ можно найти по формуле , где выражение

$b^2 - 4ac = D$ - это дискриминант. Выделяют 3 случая решения квадратного уравнения через дискриминант

Случай 1:

$$D > 0$$

$$2x^2 + 5x - 7 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7) = 25 + 56 = 81 > 0$$

Так-как $D > 0$, значит в уравнении есть 2 корня, находим корни по формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{81}}{2a} = \frac{-14}{4} = 3,5$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{81}}{2a} = \frac{4}{4} = 1$$

Ответ: 1 ; 3,5

решение квадратных уравнений при помощи дискриминанта

$$D = 0$$

$$16x^2 - 8x + 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 1 = 64 - 64 = 0$$

Так- как $D = 0$, значит в уравнении есть только 1 корень,
находим корень по формуле:

$$x = -b / 2a$$

$$x = 8 / 16 = 0,5$$

Ответ: 0,5

решение квадратных уравнений при помощи дискриминанта

$$D < 0$$

$$9x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 2 = 36 - 72 = -36 < 0$$

Так-как $D < 0$, значит в уравнении нет корней

Ответ: нет корней.

Главное **преимущество** этого способа заключается в неприхотливости к определённым видам уравнений. **Недостаток** же этого способа – большой объём времени идущий на вычисления дискриминанта и корней.

решение квадратных уравнений при помощи Теоремы Виета

Теорема Виета позволяет находить целые корни квадратного трехчлена.

Теорема Виета: $ax^2 + bx + c = 0$, где $-b = x_1 + x_2$ и $c = x_1 * x_2$

Используя теорему Виета, найдём корни уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$

Согласно теореме Виета, имеем, что

$$x_1 + x_2 = 5$$

$$x_1 x_2 = 6$$

Подбираем значения x_1 и x_2 , которые удовлетворяют этим равенствам. Легко видеть, что им удовлетворяют значения

$$x_1 = 2 \text{ и } x_2 = 3$$

Ответ: $x_1 = 2, x_2 = 3$

Главное **преимущество** этого способа – экономия времени решения.
Недостаток же этого способа – возможность использовать этот способ только в **приведённых** квадратных уравнений.

решение квадратных уравнений методом выделения полного квадрата

Метод выделения полного квадрата для разложения трёхчлена ($ax^2 + bx + c$) на множители основан на использовании формул:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 - (1), \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 - (2), \quad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) - (3).$$

Разложим многочлен на множители методом выделения полного квадрата:

$x^2 - 10x - 11$, это выражение одновременно является и квадратным уравнением $x^2 - 10x - 11 = 0$

для применения формулы (2) нам необходимо выражение

$x^2 - 10x + 5^2$, значит прибавим отнимем от нашего трёхчлена 5^2 ;

$$x^2 - 10x + 5^2 - 5^2 - 11 = (x^2 - 10x + 5^2) - 36 = (x - 5)^2 - 6^2 =$$

теперь применим формулу разность квадратов (3);

$$(x - 5 - 6)(x - 5 + 6) = (x - 11)(x + 1) .$$

В полученном выражении числа: -11 и 1 являются корнями уравнения

$$x^2 - 10x - 11 = 0 |$$

решение квадратных уравнений при помощи раскладывания левой части на множители

Заключается в разложении квадратного трёхчлена на несколько двухчленов, вынесению общей части за скобки и решению получившегося неполного квадратного уравнения

$$x^2 + 10x - 24 = 0$$

$$x^2 + 12x - 2x - 24 = 0$$

$$(x^2 - 2x) + (12x - 24) = 0$$

$$x * (x - 2) + 12 * (x - 2) = 0$$

$$(x - 2) * (x + 12) = 0$$

0 может получиться, если $x - 2 = 0$ либо $x + 12 = 0$

$$x - 2 = 0$$

$$x + 12 = 0$$

$$x = 2$$

$$x = -12$$

Ответ: 2 и 12

Плюс: Дает возможность сразу увидеть корни уравнения.

Минус: Нужно правильно вычислить слагаемых для группировки.

решение квадратных уравнений методом переброски

Способ 5: Решение квадратных уравнений методом переброски

Метод «переброски» позволяет сводить решение неприведённых и непреобразуемых к виду приведённых с целыми коэффициентами путём их деления на старший коэффициент уравнений к решению приведённых с целыми коэффициентами.

1) Все части выражения $ax^2 + bx + c = 0$ умножаем на a

$$(ax)^2 + b(ax) + ac = 0$$

2) вводим новую переменную $y = ax$.

$$3) y^2 + by + ac = 0$$

Далее уравнение решают при помощи теоремы виета описанным выше способом, затем возвращаются к исходной переменной и находят корни уравнений $y_1 = ax_1$ и $y_2 = ax_2$.

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

$$(3x^2 - 5x - 2) * a = (3x)^2 - 5 * 3x - 6$$

Пусть: $y = 3x$

$$y^2 - 5y - 6 = 0$$

Находим y при помощи теоремы Виета

$$-5 = y_1 + y_2$$

$$-6 = y_1 * y_2$$

$$y_1 = 6; y_2 = -1$$

Находим x

$$x_1 = 6 / 3 = 2; x_2 = -1 / 3$$

Ответ: 2, -1 / 3

Плюс: За минимальное количество действий можно найти корни уравнения, применяется совместно со способом теоремы Виета.

Минус: легко найти только целые корни.

решение квадратных уравнений при помощи свойств коэффициентов

1 свойство:

Дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Если $a + b + c = 0$ (сумма коэффициентов), то $x_1 = 1$, $x_2 = c/a$

Пример:

$$19x^2 + 15x - 34 = 0$$

Решение:

$$\text{Здесь, } a = 19, b = 15, c = -34$$

Проверим будет ли $a + b + c = 0$.

$$a + b + c = 19 + 15 - 34 = 0.$$

Можем применить свойство 1:

$$x_1 = 1 \text{ и } x_2 = \frac{-34}{19} = -1 \frac{15}{19}$$

Ответ: $-1 \frac{15}{19}$; 1.

решение квадратных уравнений при помощи свойств коэффициентов

2 свойство:

Дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Если $a - b + c = 0$ (сумма коэффициентов), когда b взято с противоположным знаком или $a + c = b$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -c/a$

Пример

$$341x^2 + 290x - 51 = 0$$

Решение:

Здесь, $a = 341$, $b = 290$, $c = -51$.

Проверим удовлетворяют ли коэффициенты условию

свойства 2

$341 - 51 = 290$. Получим $a + c = b$. Следовательно, мы

можем воспользоваться свойством 2.

$$x_1 = -1 \text{ и } x_2 = 51/341$$

Ответ: -1; 51/341.

решение квадратных уравнений при помощи свойств коэффициентов

3 свойство:

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$. Коэффициент b представлен в виде $2k$, т.е. является четным числом, то формулу корней уравнения можно переписать в более простом виде

$$D = (b/2)^2 + a*c$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{a}$$

Пример:

$$3x^2 + 2,2x - 0,16 = 0$$

Решение:

$$\text{Коэффициент } b = 2,2$$

$$D = 1,1^2 + 3 * (-0,16) = 1,69$$

$$x_{1,2} = (-1,1 \pm 1,3)/3$$

Плюс: Не требует особых усилий.

Минус: Подходит только к некоторым уравнениям.

решение квадратных уравнений при помощи Теоремы Безу

Способ 7: Решение квадратных уравнений при помощи теоремы Безу

Теорема Безу: Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $(x - a)$ равен $P(a)$.

СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ БЕЗУ

1. Число a - корень многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ делится без остатка на двучлен $x - a$.

Отсюда, в частности, следует, что множество корней многочлена $P(x)$ тождественно множеству корней соответствующего уравнения $P(x) = 0$.

2. Свободный член многочлена делится на любой целый корень многочлена с целыми коэффициентами (если старший коэффициент равен 1, то все рациональные корни являются и целыми).
3. Пусть a - целый корень приведенного многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами. Тогда для любого целого k число $P(k)$ делится на $a - k$.

Теорема Безу дает возможность, найдя один корень многочлена, искать далее корни многочлена, степень которого уже на единицу меньше: если $P(a) = 0$, то заданный многочлен $P(x)$ можно представить в виде:

$$P(x) = (x - a)Q(x)$$

Таким образом, один корень найден и далее находятся уже корни многочлена $Q(x)$, степень которого на единицу меньше степени исходного многочлена. Иногда этим приемом - он называется понижением степени - можно найти все корни заданного многочлена.

решение квадратных уравнений при помощи Теоремы Безу

Найти остаток от деления многочлена $f(x) = 3x^2 - 4x + 6$ на двучлен $(x - 1)$

Согласно теореме Безу искомый остаток равен значению многочлена в точке $a = 1$. Найдем тогда $f(1)$, для этого значение $a = 1$ подставим в выражение для многочлена $f(x)$ вместо x . Будем иметь:

$$f(1) = 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 6 = 3 - 4 + 6 = 5$$

Ответ. Остаток равен 5

Плюс: За минимальное количество действий можно найти корни уравнений.

Минус: Подходит только к некоторым уравнениям.

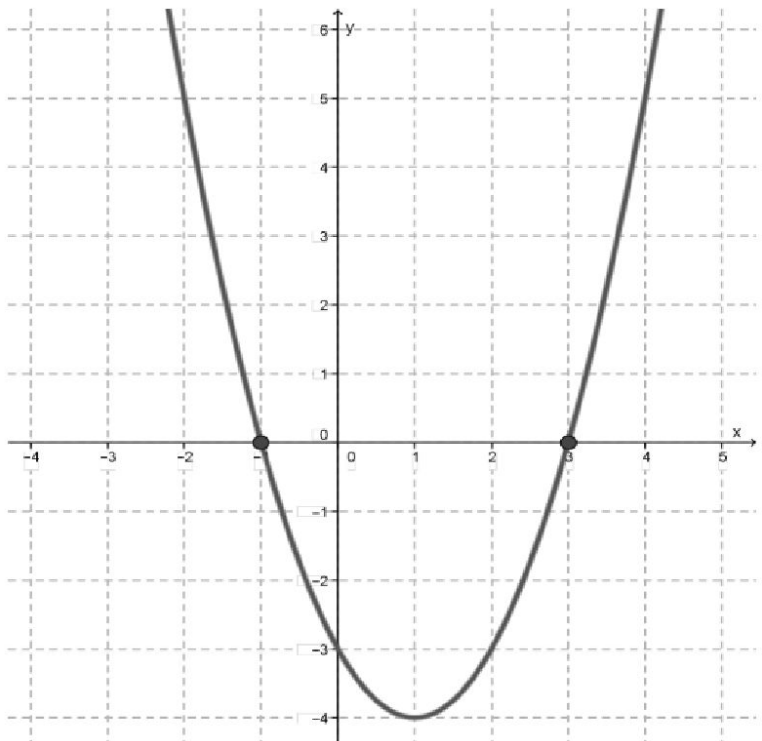
Решение квадратных уравнений графическим способом

Способ 8: Решение квадратных уравнений графическим способом

Построим график функции $x^2 - 2x - 3 = 0$.

1. Имеем: $a = 1$, $b = -2$, $x_0 = -\frac{b}{2a} = 1$, $y_0 = f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$. Значит, вершиной параболы служит точка $(1; -4)$, а осью параболы — прямая $x = 1$.
2. Возьмём на оси x две точки, симметричные относительно оси параболы, например, точки $x = -1$ и $x = 3$. Имеем $f(-1) = f(3) = 0$. Построим на координатной плоскости точки $(-1; 0)$ и $(3; 0)$.
3. Через точки $(-1; 0)$, $(1; -4)$, $(3; 0)$ проводим параболу.

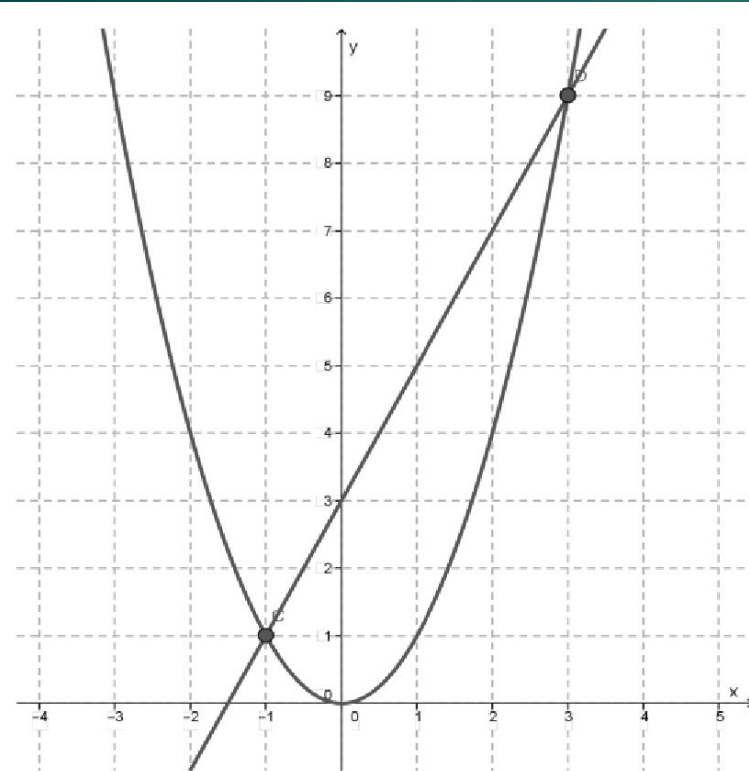
Решение квадратных уравнений графическим способом



Корнями уравнения $x^2 - 2x - 3 = 0$ являются абсциссы точек пересечения параболы с осью x ; значит, корни уравнения таковы: $x_1 = -1$; $x_2 = 3$.

Ещё можно преобразуем уравнение к виду $x^2 = 2x + 3$. Построим в одной системе координат графики функций: $y = x^2$; $y = 2x + 3$.

Решение квадратных уравнений графическим способом



Они пересекаются в двух точках: $C(-1; 1)$ и $D(3; 9)$. Корнями уравнения служат абсциссы точек C и D , значит, $x_1 = -1$; $x_2 = 3$.

Плюс: Наглядный способ.

Минус: Могут быть не точности при составлении графиков и нахождении конечных ответов.

Решение квадратных уравнений при помощи циркуля и линейки

Заключается в построении окружности с определённым центром и радиусом и нахождении точек пересечения окружности и оси абсцисс

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Определяем координаты точки центра окружности

$$X = -b / 2a = 2 / 2 = 1$$

$$Y = (a + c) / 2a = (1 - 3) / 2 = -1$$

O (1; -1)

строим на координатной плоскости окружность радиусом OA, где A(0;

1)

Точки пересечения окружности с осью абсцисс и есть корни уравнения

Пример построения обозначен на рисунке 7

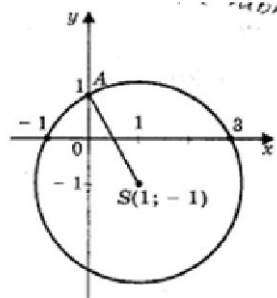


Рис. 7

Плюс: Наглядный способ.

Минус: Могут быть не точности

Решение квадратных уравнений при помощи номограммы

Номограмма для решения уравнения $z^2 + pz + q = 0$. Эта номограмма позволяет, не решая квадратного уравнения, по его коэффициентам там определить корни уравнения.

Криволинейная шкала номограммы построена

$$OB = \frac{a}{1+z}, AB = \frac{-z^2}{1+z}. \quad (z \text{ в дальнейшем заменяется на } x) \text{ по формулам:}$$

Полагая $OC = p$, $ED = q$, $OE = a$ (все в см.), из подобия треугольников CAH и CDH получим пропорцию

$$\frac{p-q}{p-AB} = \frac{a}{OB},$$

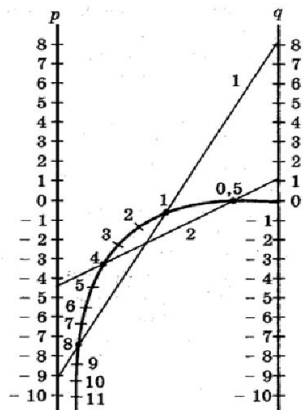
откуда после подстановок и упрощений вытекает уравнение $x^2 + px + q = 0$,

причем буква x означает метку любой точки криволинейной шкалы.

Примеры.

1) Для уравнения $x^2 - 9x + 8 = 0$ номограмма дает корни

$$x_1 = 8,0 \text{ и } x_2 = 1$$



Заключение

Квадратные уравнения находят необычайно широкое применение при решении тригонометрических, показательных, логарифмических, иррациональных и трансцендентных уравнений и неравенств.


Изложенные в моей работе способы имеют, как плюсы, так и недостатки. Достоинства способов решения квадратных уравнений при помощи Теоремы Виета и свойств коэффициентов заключается экономии колоссального количества времени при решении уравнений, но использовать их можно только при определённом виде уравнений.

Решение квадратных уравнений через дискриминант – это самый общий способ решений уравнений, подходящих под любые виды уравнений, но требующий немалых вычислений. Главные недостатки это неточные результаты, получаемые решением некоторых уравнений графическим способом, но дающие приблизительное представление о правильном ответе.

Хочется отметить и то, что излагаемая тема в этой работе еще мало изучена вообще, поэтому она таит в себе много скрытого и неизвестного, что дает прекрасную возможность для дальнейшей работы над ней.

Так как эти методы решения квадратных уравнений просты в применении, то они, безусловно, должно заинтересовать увлекающихся математикой учеников. Моя работа дает возможность по-другому посмотреть на те задачи, которые ставит перед нами математика.

Спасибо за внимание!



10 способов решения квадратных уравнений

ПОДГОТОВИЛ УЧАЩИЙСЯ 8 «А» КЛАССА СШ №69 Г.МИНСКА