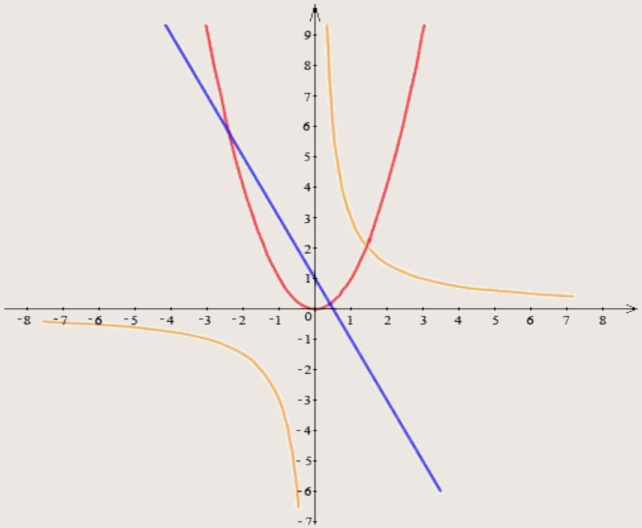
ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

к исследованию функции и построению графика функции



11 класс

Содержание

- Определение промежутков возрастания и убывания функции (исследование функции на монотонность)
- Нахождение точек экстремума функции
- Построение графиков функций
- Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции
- Работа с графиками функций
- Проверь себя

Исследование функции на монотонность

(т.е. определение промежутков возрастания и убывания функции).

Исследовать функцию на монотонность – это значит выяснить, на каких промежутках из области определения

функция возрастает,

а на каких – убывает.

Вспомним

О: Функция $f(x)$ называется возрастающей на промежутке I,

если для любых $x_1, x_2 \in I: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

О: Функция $f(x)$ называется убывающей на промежутке I,

если для любых $x_1, x_2 \in I: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

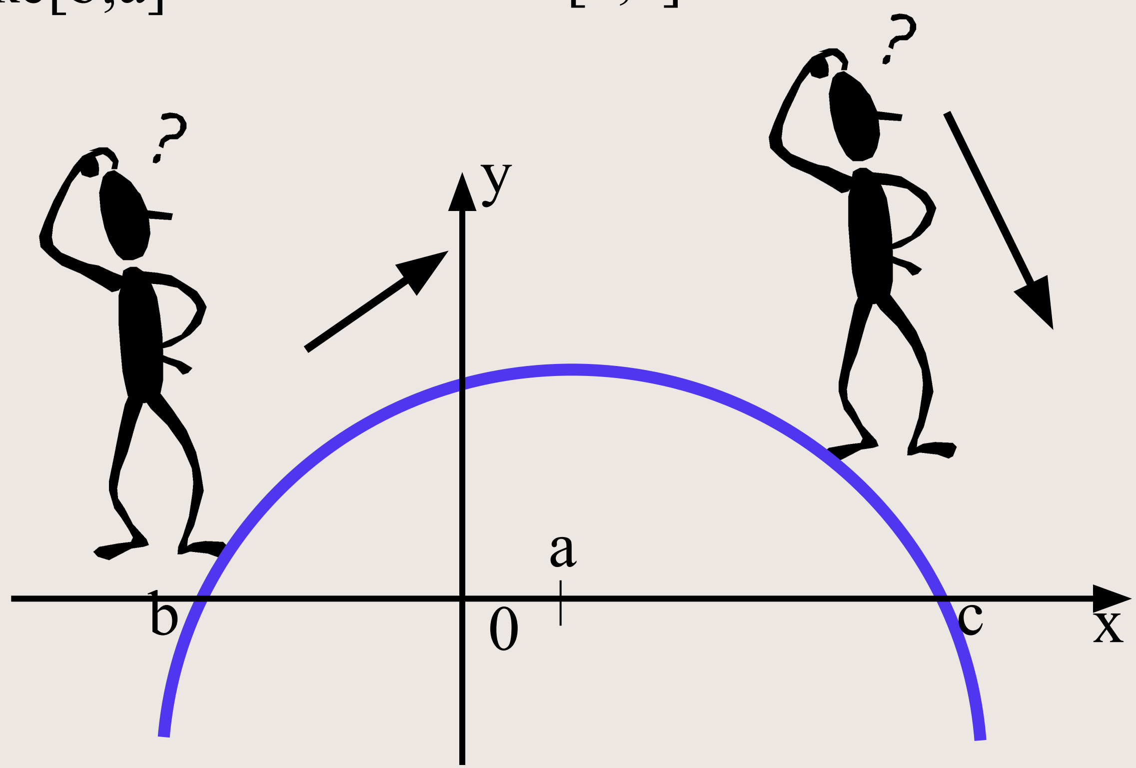
О: Функция $f(x)$ называется монотонной на промежутке I,

если она либо возрастает, либо убывает на этом промежутке.

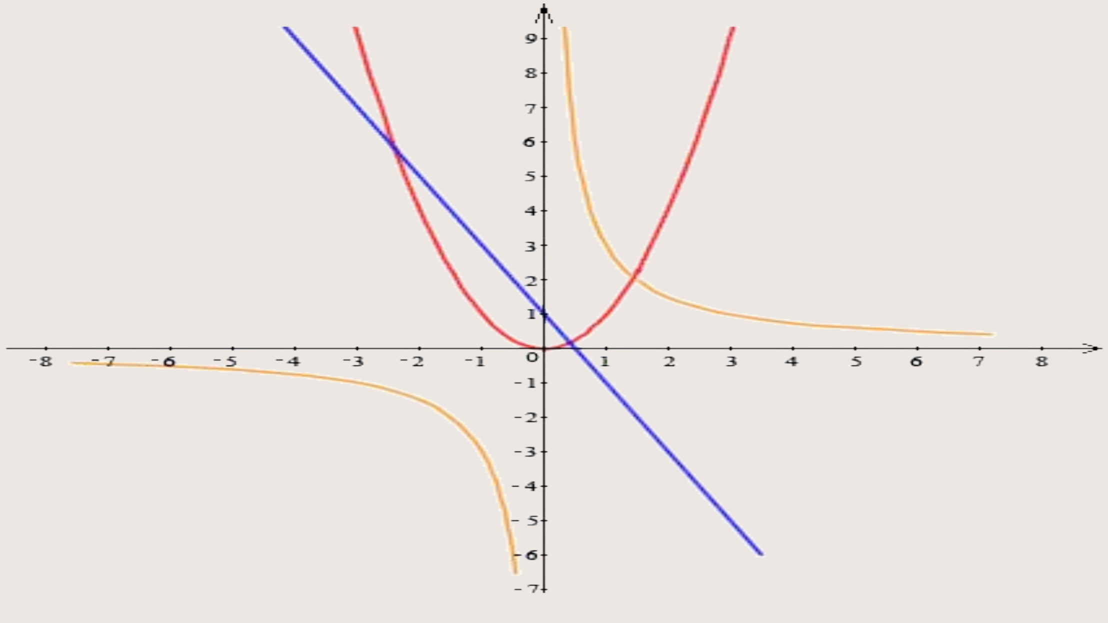
Возрастание и убывание функции можно изобразить так

Иду в гору. Функция ***возрастает*** на промежутке[b;a]

Иду под гору. Функция ***убывает*** на промежутке [a;c]



Для определения промежутков возрастания и убывания функции можно использовать и производную .



Теорема:

Если f(x) – непрерывна на промежутке и имеет $f'(x)$, то

а) если $f'(x) > 0$, то f(x) – возрастает

б) если $f'(x) < 0$, то f(x) – убывает

в) если $f'(x) = 0$, то f(x) – постоянна

(константа)

Алгоритм исследования функции на монотонность

- **Найти производную функции f ´(x)**

1) **Найти стационарные (f ´(x) = 0) и критические (f ´(x) не существует) точки функции y= f(x)**
2) **Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой**
3) **Определить знаки производной на получившихся промежутках**
4) **По знаку производной определить промежутки монотонности функции**

(если f ´(x) > 0 – функция возрастает; если f ´(x) < 0 функция убывает; если f ´(x) =0 – функция постоянна)

Определения

- Внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю, называются **стационарными.**
- Внутренние точки области определения функции, в которых функция непрерывна, но производная не существует, называются **критическими**

Например: найти промежутки монотонности функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$

1) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

2) Найдем стационарные точки:

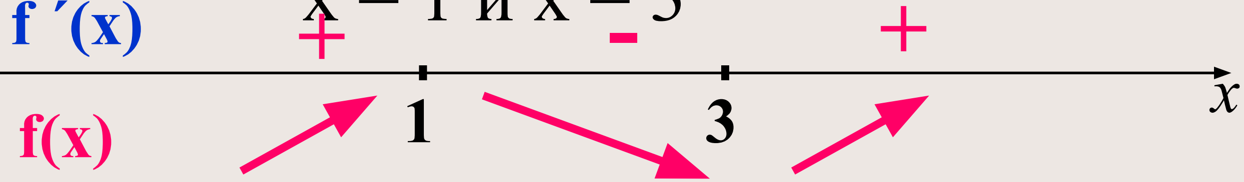
$$f'(x) = 0, \quad 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = 1 \text{ и } x = 3$$

3)

4)



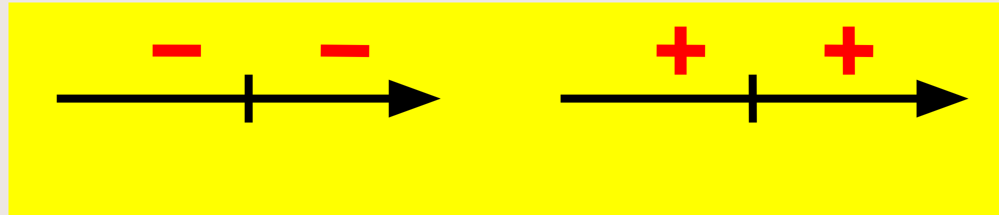
5) $f'(x) > 0$, **при** $x \in (-\infty; 1)$ **и** $(3; +\infty)$

$f'(x) < 0$, **при** $x \in (1; 3)$

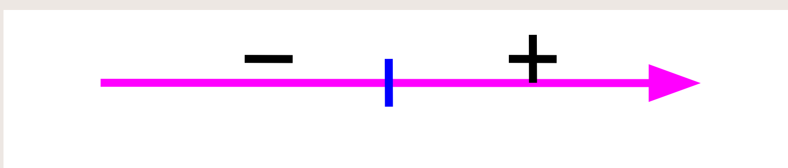
Ответ: при $x \in (-\infty; 1)$ и $(3; +\infty)$ функция возрастает, а при $x \in (1; 3)$ - убывает

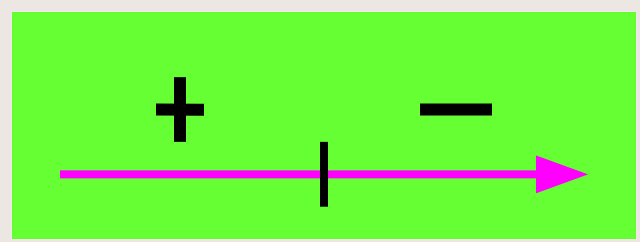
Найти промежутки монотонности функции

1. $y = 2x^3 + 3x^2 - 100$
2. $y = x^3 + 2x^2 + 6$
3. $y = 5x^2 + 15x - 1$
4. $y = 60 + 45x – 3x^2 - x^3$
5. $y = - 3x + 6x^2 - 100$



Нахождение точек экстремума функции





Определения

- Точка x_0 называется **точкой минимума** функции $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство

$$f(x) \geq f(x_0)$$

- Точка x_0 называется **точкой максимума** функции $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство

$$f(x) \leq f(x_0)$$

Определения

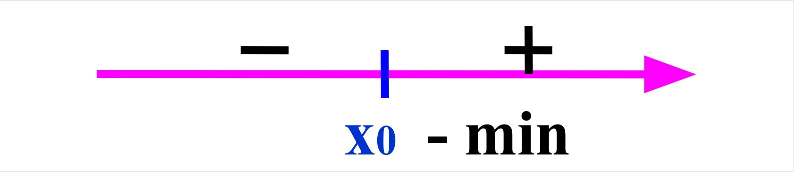
- **Значение функции в точке максимума обозначают Уmax (но на определенном участке вокруг точки максимума, а не на всей области определения функции – это Унаиб.)**
- **Значение функции в точке минимума обозначают Уmin (но это не Унаим. функции на всей области определения)**
- **Точки минимума и максимума называются точками экстремума**

Теорема

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку $x=x_0$. Тогда:

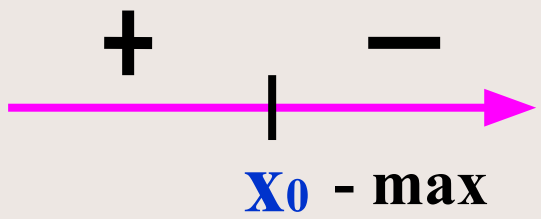
а) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x<x_0$ выполняется неравенство $f'(x) <0$, а при $x>x_0$ - неравенство $f'(x) >0$, то

x_0 – точка минимума функции $y = f(x)$

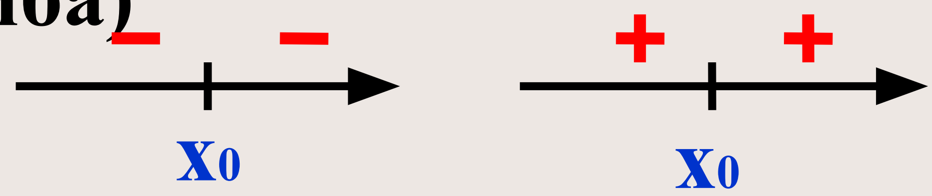


б) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x<x_0$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, а при $x>x_0$ - неравенство $f'(x) <0$, то

x_0 – точка максимума функции $y = f(x)$



в) если у этой точки существует такая окрестность, что в ней и слева и справа от точки x_0 знаки производной одинаковы, то в точке x_0 экстремума нет (происходит изменение кривизны графика функции – это точка перегиба)



экстремума нет

Алгоритм нахождения точек экстремума функции

1) Найти производную функции $f'(x)$
2) Найти стационарные и критические точки функции $y = f(x)$
3) Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой
4) Определить знаки производной на получившихся промежутках
5) Если $f'(x_0)$ при переходе через точку меняет знак с «+» на «-», то эта точка – точка максимума.
   Если $f'(x_0)$ при переходе через точку меняет знак с «-» на «+», то эта точка – точка минимума.
   Если $f'(X_0)$ не меняет знак, то в этой точке экстремума нет (это точка перегиба).

Например: найти точки экстремума функции

$$y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11$$

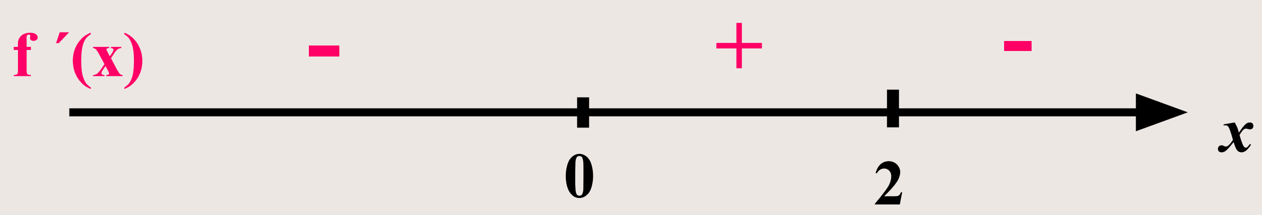
<u>Решение.</u> 1) $y' = 12x^3 - 48x^2 + 48x =$

$= 12x(x^2 - 4x + 4) = 12x(x-2)^2$

2) $y' = 0$ **при** $x = 0$ **и** $x = 2$ **(стационарные точки)**

3)

4)



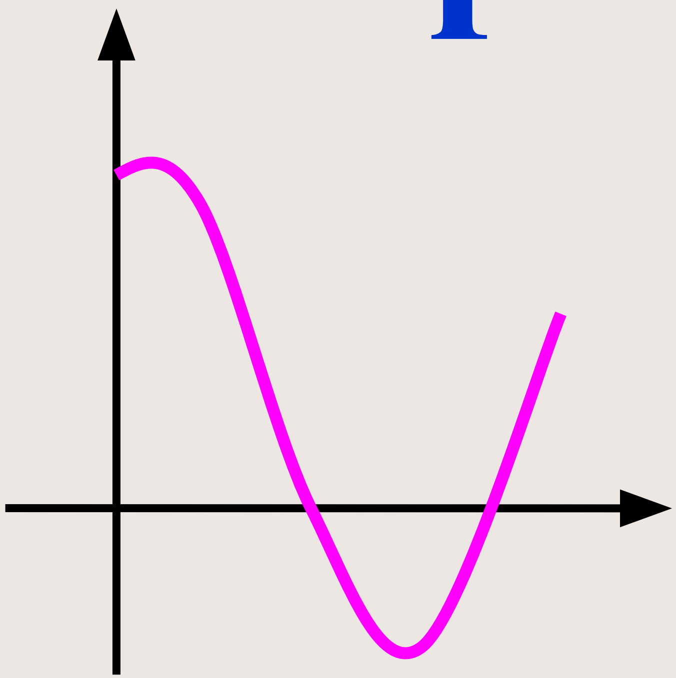
5) Значит: $x = 0$ **– точка минимума,**

$x = 2$ **- точка максимума.**

Найдите точки экстремума функции и определите их характер

1) $y = 7 + 12x - x^2$
2) $y = 3x^3 + 2x^2 - 7$
3) $y = -2x^3 + 21x^2 + 19$
4) $y = 3x^2 - x^3$
5) $y = x + 4/x$

Построение графиков функций



В тех случаях, когда речь идет о построении графика незнакомой функции или когда заранее трудно представить вид графика, используют следующий алгоритм:

План построения графика функции с помощью производной

1) Найти область определения функции и определить точки разрыва если они существуют
2) Выяснить является ли функция четно или нечетной, проверить её на периодичность
3) Найти точки пересечения графика с осями координат, если это возможно
4) Найти стационарные и критические точки
5) Найти точки экстремума функции и промежутки монотонности
6) Определить промежутки вогнутости, выпуклости и точки перегиба графика функции
7) Найти координаты ещё нескольких точек (для большей точности)

Как найти промежутки выпуклости, вогнутости и точку перегиба графика функции

Промежутки выпуклости и вогнутости кривой можно находить с помощью производной.

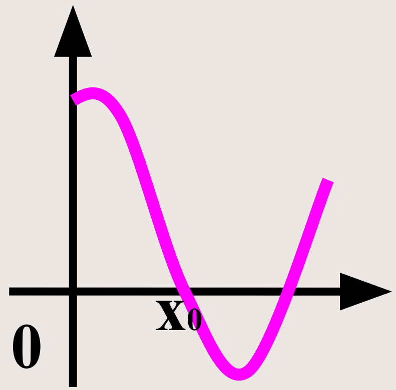
Теорема. **(признак вогнутости и выпуклости)**

Если вторая производная функции $y=f(x)$ в данном промежутке положительна, то кривая вогнута в этом промежутке, а если отрицательна – выпукла в этом промежутке.

Для нахождения интервалов выпуклости графика функции используют следующий алгоритм:

1) Находят $f'(x)$, а затем $f''(x)$
2) Находят точки, в которых $f''(x) = 0$
3) Отмечают полученные точки на числовой прямой и получают несколько промежутков области определения функции
4) Устанавливают знаки второй производной в каждом из полученных промежутков. Если $f''(x) < 0$, то на этом промежутке кривая выпукла; если $f''(x) > 0$ - вогнута

Точкой перегиба кривой называется такая точка, которая отделяет выпуклую часть кривой от вогнутой её части.



Точкой перегиба кривой графика функции будут те точки, в которых $f''(x) = 0$ и при переходе через неё вторая производная меняет знак.

Найти интервалы выпуклости и точку перегиба функции

Решение. $y = x^4 - 6x^2 + 4$

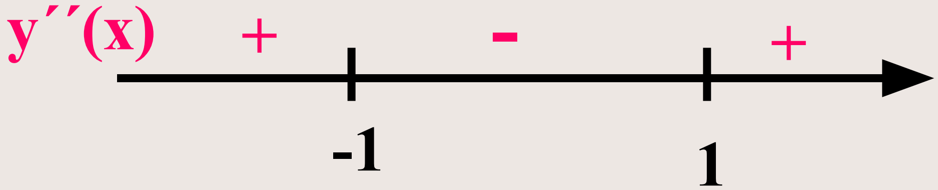
Найдем **y´(x)** и **y´´(x):**

y´(x) = $4x^3 - 12x$ => **y´´(x)** = $12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1)$

Найдём стационарные точки второго порядка,

т.е. **y´´(x)=0** => $12(x^2-1)=0$ => $x^2-1=0$ => $x^2=1$

⇒ $\mathbf{x = \pm 1}$



Значит: при x є (-∞; -1) и (1;+ ∞) функция вогнута, а при x є (-1:1) – выпукла; точки перегиба x= ±1

Например: исследовать функцию

$y = 2x^3+3x^2 -1$ и построить её график

Решение. $D(y)= (-\infty; +\infty)$, четность не определена

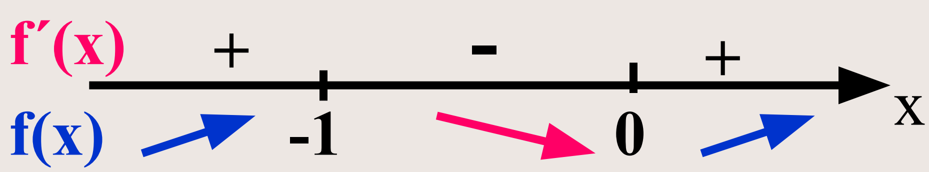
Найдем стационарные точки:

т.к. $y'=6x^2+6x=6x(x+1) \Rightarrow 6x(x+1)=0$

тогда $x=0$ и $x=-1$ стационарные точки

Найдем точки экстремума:

т.к.



и $x=-1$ – точка максимума

$x= 0$ – точка минимума

Найдем промежутки монотонности:

при x є (-∞; -1] и [0; + ∞) - функция возрастает

при x є [-1; 0] - функция убывает

Найдем точки пересечения графика с осями координат:

если x=0, то y=-1 => (0;-1)

если y=0, то x= -1 => (-1; 0)

Найдем ещё некоторые точки (контрольные, дополнительные):

- т.к. $x=-1$ – точка максимума, то $y_{max}=0 \Rightarrow (-1;\ 0)$ -точка локального максимума
- т.к. $x=0$ – точка минимума, $y_{min}=-1$ $\Rightarrow (0;-1)$ -точка локального минимума
- если $x=1$, то $y=4$ $\Rightarrow (1;4)$
- если $x=-2$, то $y=-5 \Rightarrow (-2;-5)$

Удобнее все эти данные заполнять в виде таблицы.

Составим таблицу:

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↑	0 (-1;0) max	↓	-1 (0;-1) min	↑

Найдем $f''(x)$.

$f''(x) = (6x(x+1))' = 12x+6 = 6(2x+1)$

$f''(x)=0 \Rightarrow 6(2x+1)=0 \Rightarrow x = -0,5$ - точка перегиба

т.к. при x=-1(левее x=-0,5) $f''(x) < 0$,

а при x=-0,1(правее x=-0,5) $f''(x) > 0$

Найдем её координаты: (-0,5; ?), если это не трудно

Построим график функции:

Исследовать функцию и построить её график

1) $y = 3x^2 - x^3$

2) $y = -9x + x^3$

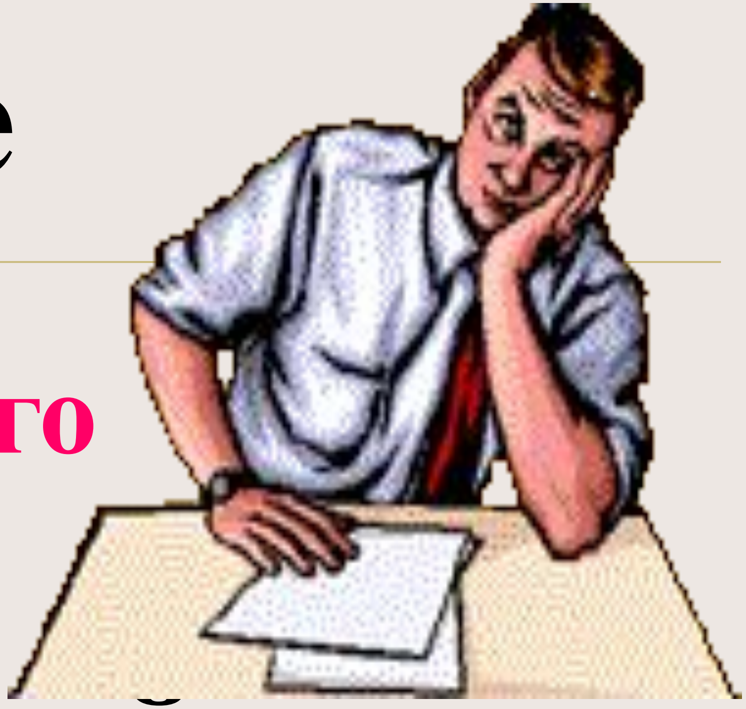
3) $y = x^3 - 3x^2 + 2$

4) $y = -x^3 + 6x^2 - 5$

5) $y = 3x^3 + x^2 - 8x – 7$

6) $y = (x)/(1+x^2)$

Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке



Теорема

Дифференцируемая на (a;b) и непрерывная на [a;b] функция y=f(x) достигает своего наибольшего (наименьшего) значения на границе отрезка [a;b] или в одной из точек экстремума на интервале (a;b).

Если функция удовлетворяет условиям теоремы и имеет единственную точку экстремума – точку максимума (минимума), то в ней достигается наибольшее (наименьшее) значение

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции $y=f(x)$ на отрезке [а;в]

1) Найти производную $f'(x)$

2) Найти стационарные и критические точки функции и проверить принадлежат ли они отрезку [а;в]

3) Вычислить значение функции $y=f(x)$

- на концах отрезка, т.е в точках $x=a$ и $x=в$
- в стационарных и критических точках, принадлежащих [а;в]

4) Выбрать среди найденных значений наименьшее (это и будет Унаим.) и наибольшее (это и будет Унаиб.)

Например: **найти наименьшее и наибольшее значения функции**

$y = x^3 - 3x^2 - 45x + 1$ на отрезках а)[-4;6]

б) [-2;2]

<u>Решение.</u> **а) 1) $y' = 3x^2 - 6x - 45$**

2) $y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 45 = 0 | :3$

$x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow$

$x_1 = -3 \in [-4;6]$ и $x_2 = 5 \in [-4;6]$

3) Найдём $y(-4)$; $y(6)$; $y(-3)$; $y(5)$:

Получим: $y(-4)=69$; $y(6)=-161$; $y(-3)=82$; $y(5)=-174$.

Значит: $y_{наим} = -174$; $y_{наиб} = 82$.

Решение. **б)** на [-2;2]

1) $y' = 3x^2 - 6x – 45$

2) $y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 45 = 0 | :3$

$x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow x_1 = -3 \notin [-2;2]$

$x_2 = 5 \notin [-2;2]$

3) Найдём y(-2); y(2):

Получили y(-2)= 71; y(2)=-93

Значит: **Унаим = - 93; Унаиб = 71.**

Самостоятельно найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$y = x^3 - 3x^2 - 45x + 1$

на отрезке [0;6]

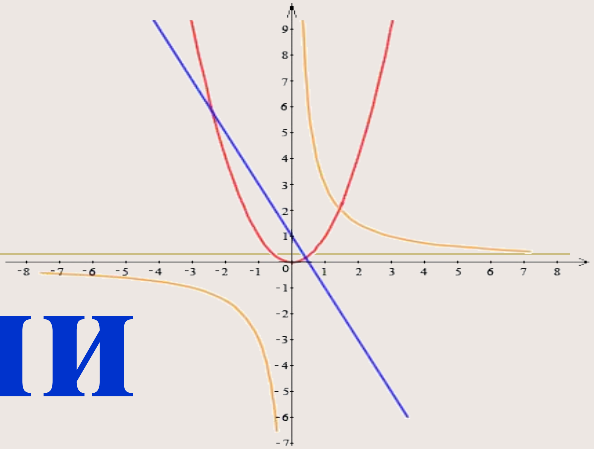
Ответ: Унаим. = -174 (достигается в точке x=5)

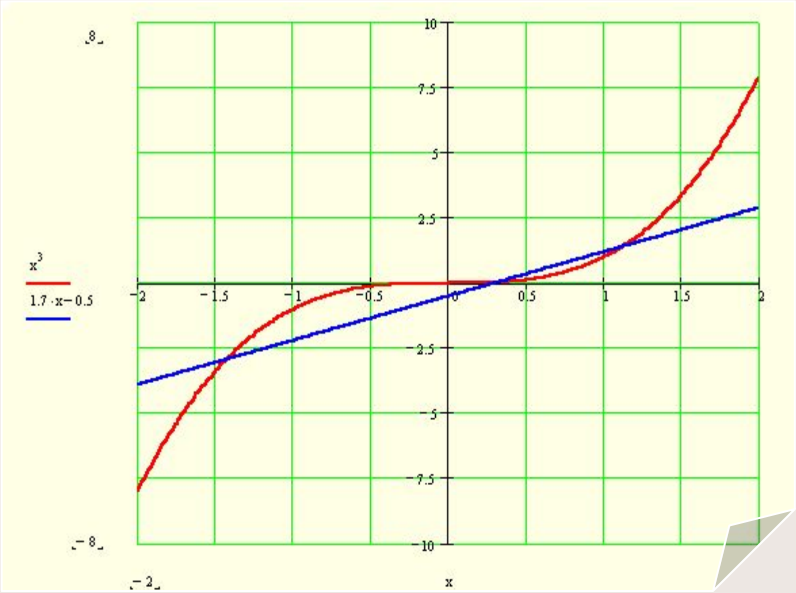
Унаиб. = 1 (достигается в точке x=0)

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на заданном промежутке.

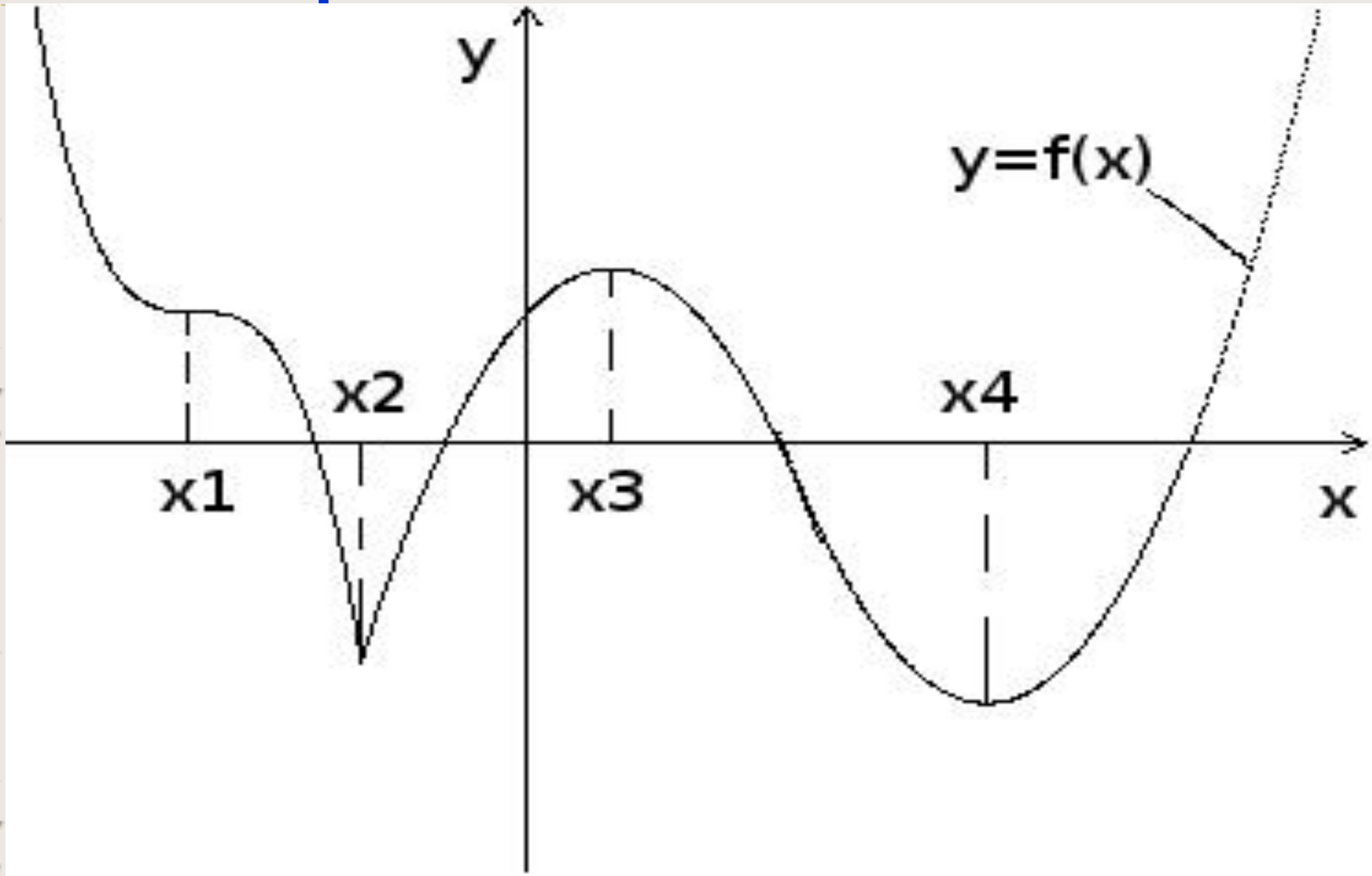
1) $y = x^2-8x+19$ на $[-1;5]$
2) $y = x^3-9x^2+24x-1$ на $[-2;3]$
3) $y = x+4/(x+1)$ на $[-2;0]$
4) $y = x^3-2x^2+1$ на $[0,5;+\infty)$
5) $y = 0,2x\square-x^2$ на $(-\infty; 1]$

Работа с графиками функций





№ 1. По графику функции ответьте на вопросы



1) Отметьте стационарные точки.

2) Что можно сказать о производной в точке x_1?

3) Назовите точки экстремума.

4) Что можно сказать о производной на $(-\infty;\ x_2)$?

5) Укажите промежутки возрастания функции.

6) Отметьте критические точки

Проверим ответы

1. (x_1, x_3, x_4).
2. не существует.
3. (x_2, x_3, x_4).
4. $f'(x) \le 0$.
5. $[x_2;\ x_3] \cup [x_4; +\infty)$ функция возрастает.
6. x_2

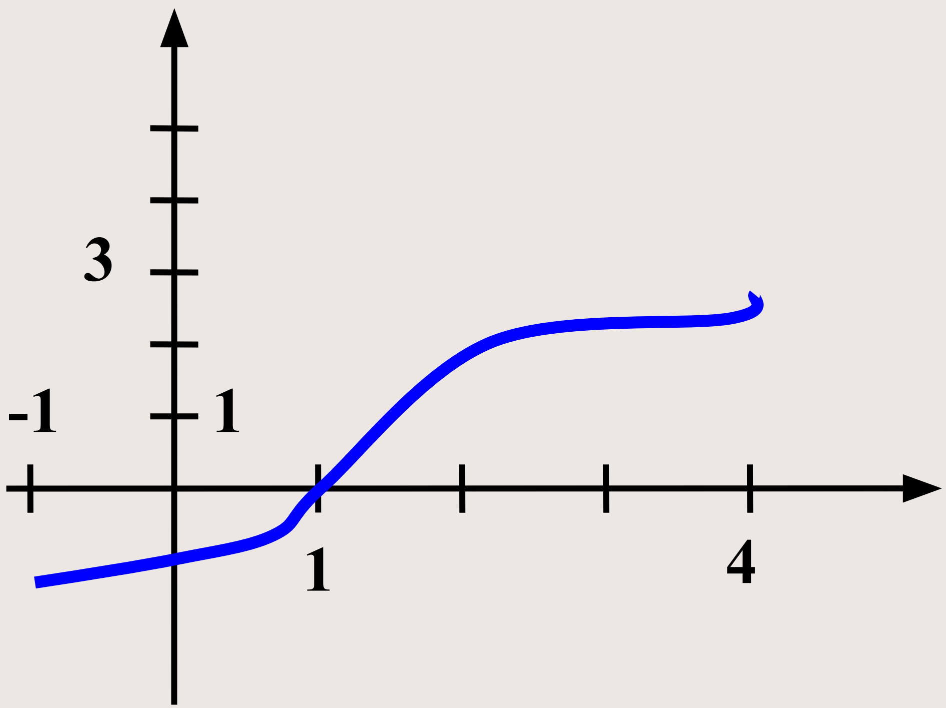
№ 2. Постройте график непрерывной функции y = f(x), определенной на [а;в], удовлетворяющей следующим условиям:

а) а=-1, в=4, f′(x)>0 при -1<x<4, f(1)=0, f(4)=3

б) а=0, в=5, f′(x)<0 при 0<x<5, f(2)=0, f(3)=-2

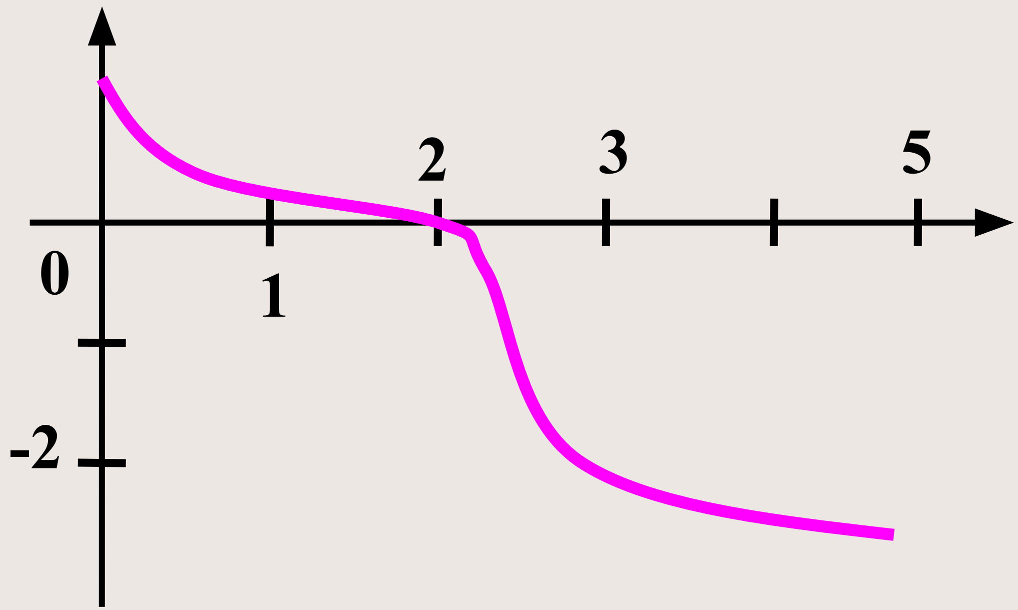
График.

а)

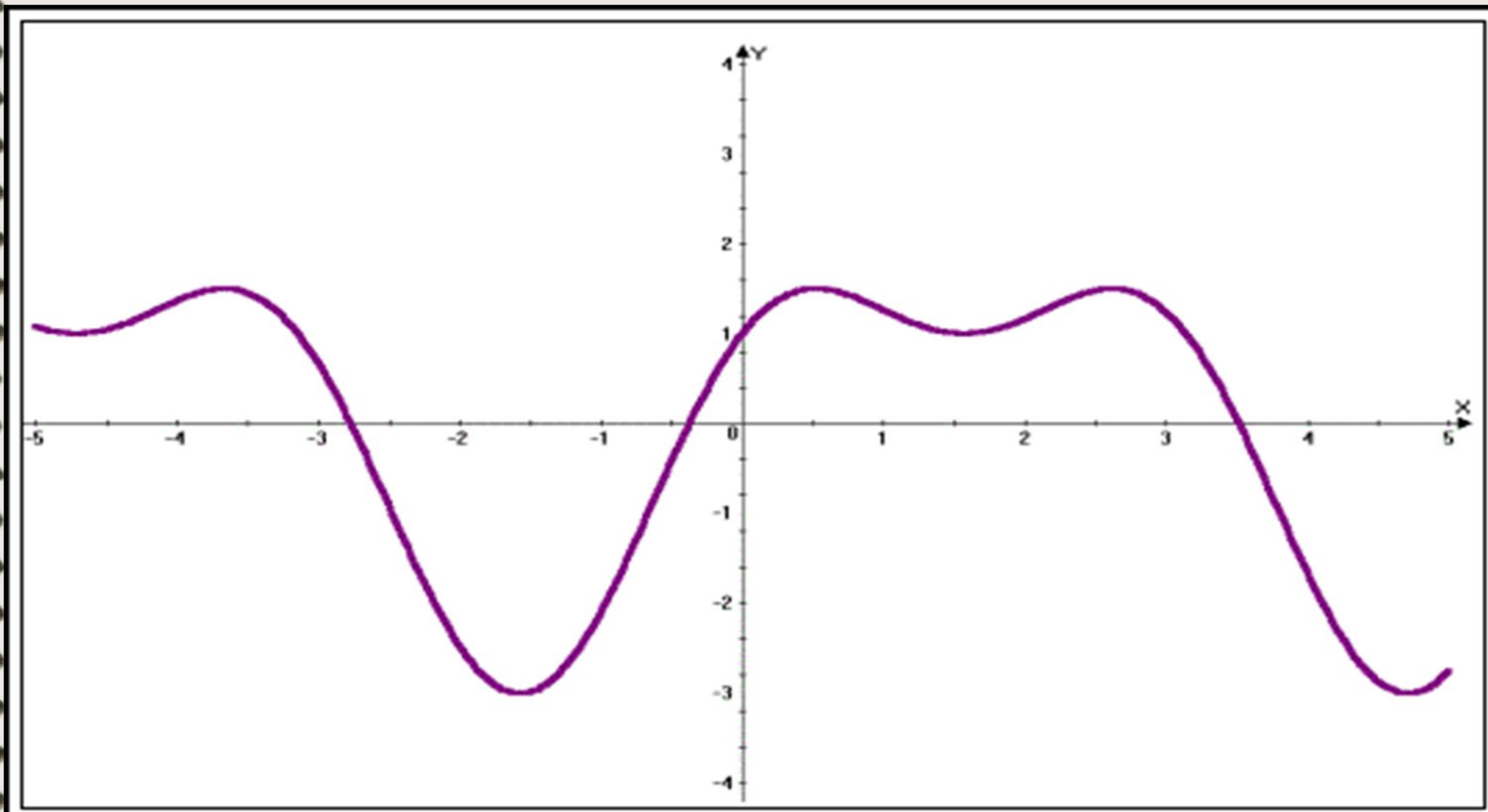


б) а=0, в=5, f´(x)<0 при 0<x<5, f(2)=0, f(3)=-2

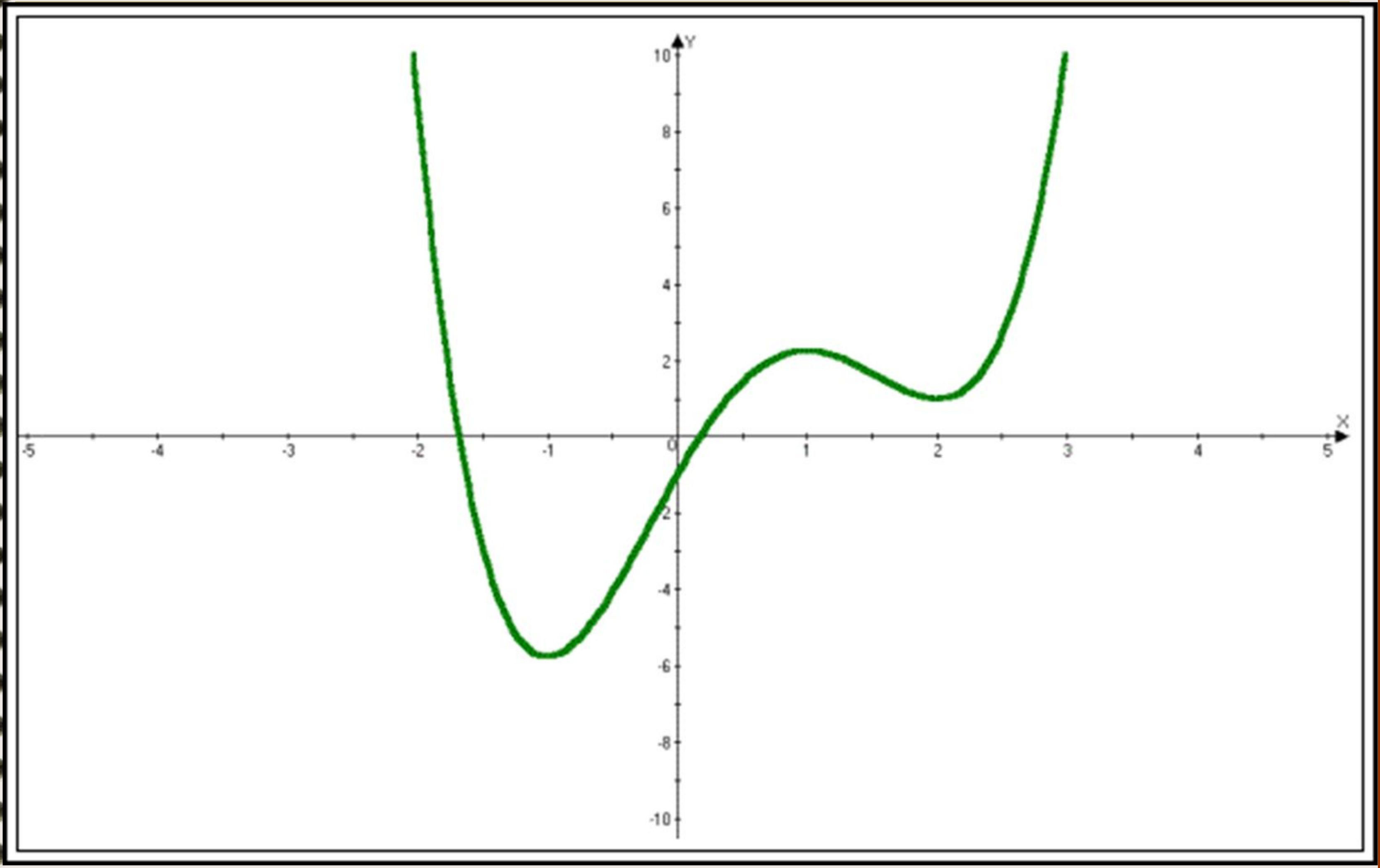
График.



№ 3. **По графику производной некоторой функции укажите интервалы, на которых функция монотонно возрастает, убывает, имеет максимум, имеет минимум.**



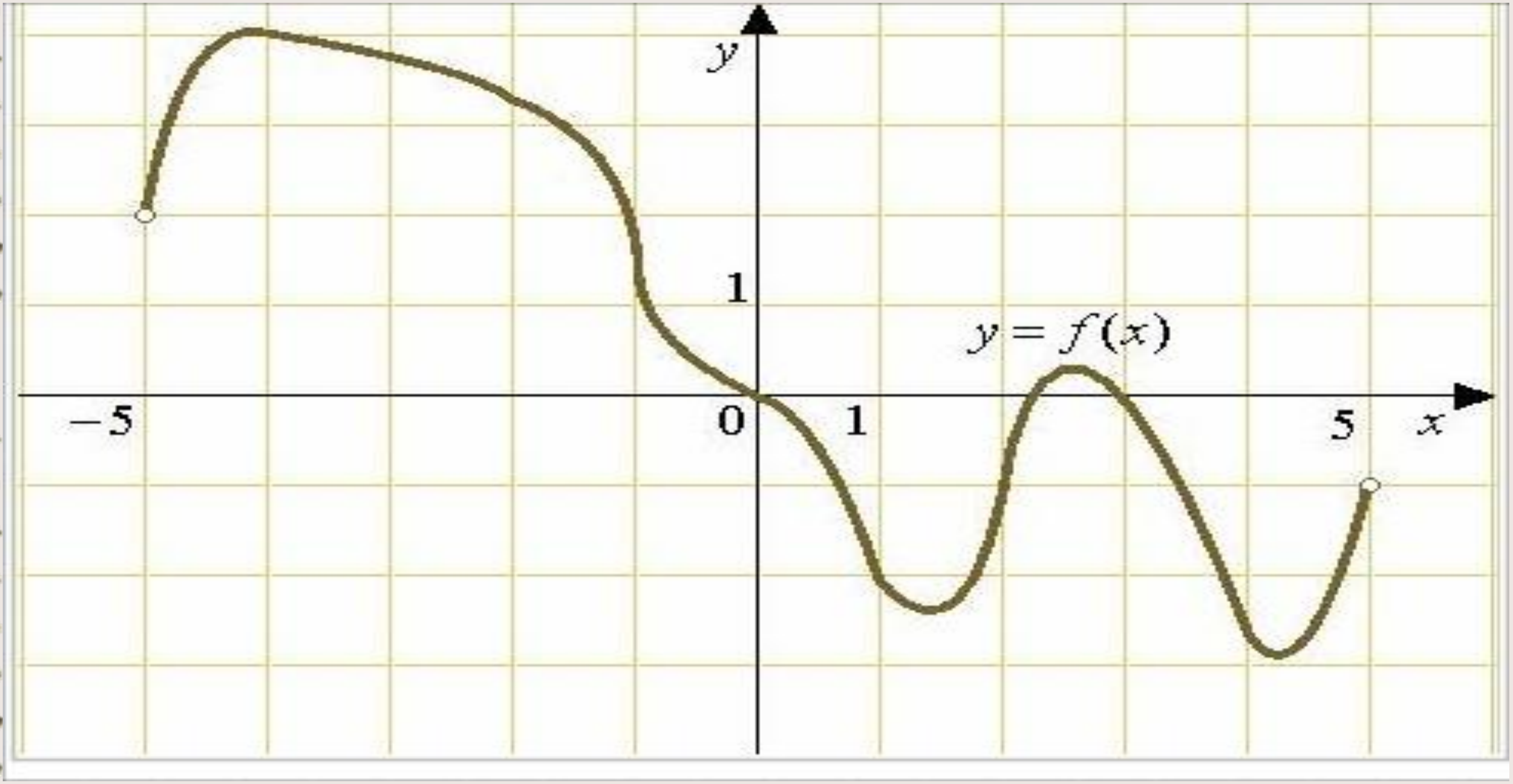
№ 4. **На рисунке изображён график производной функции y=f(x). Сколько точек максимума имеет эта функция? Назовите их.**



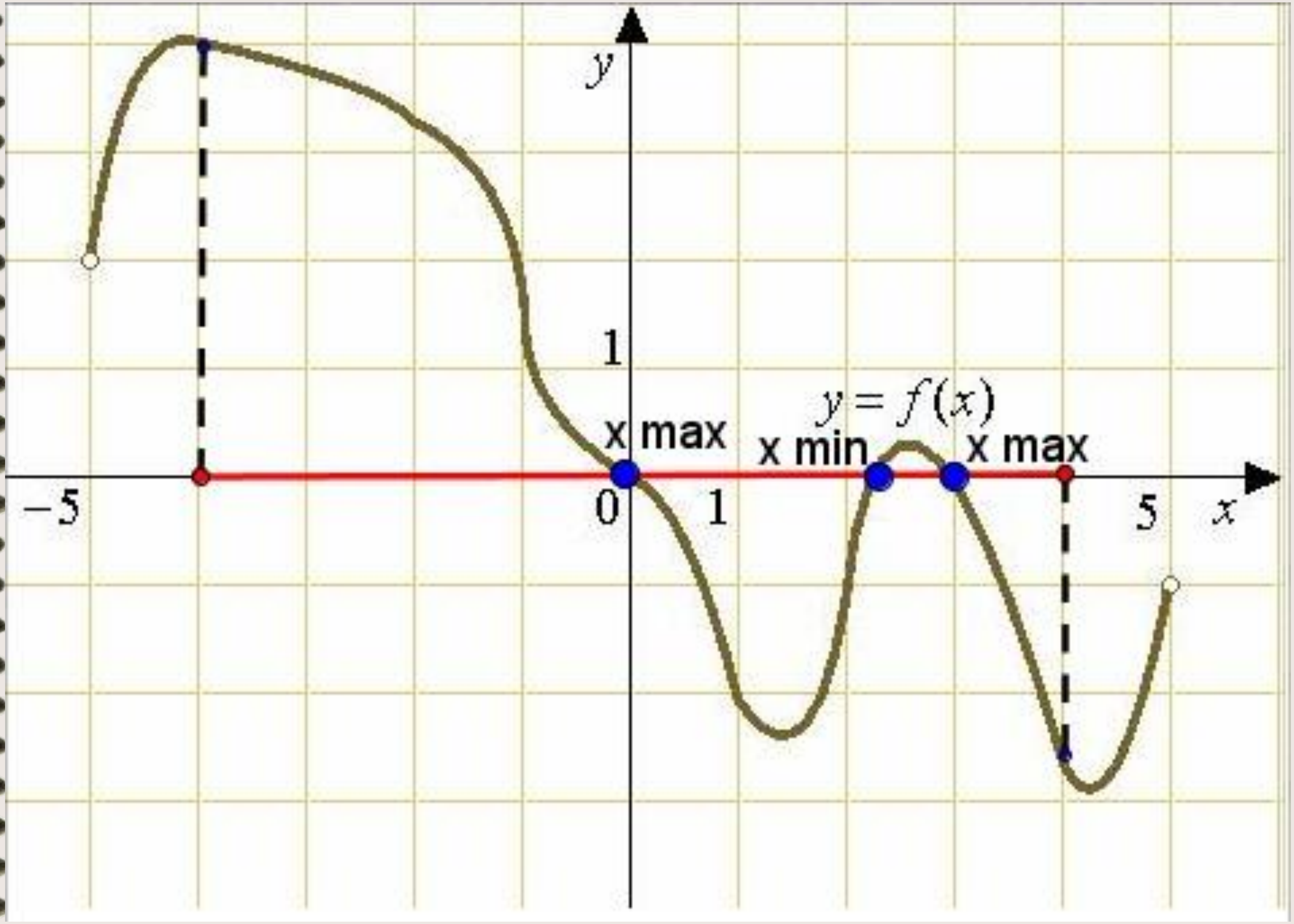
№ 5. По графику функции определить:

а) сколько точек экстремума имеет функция?

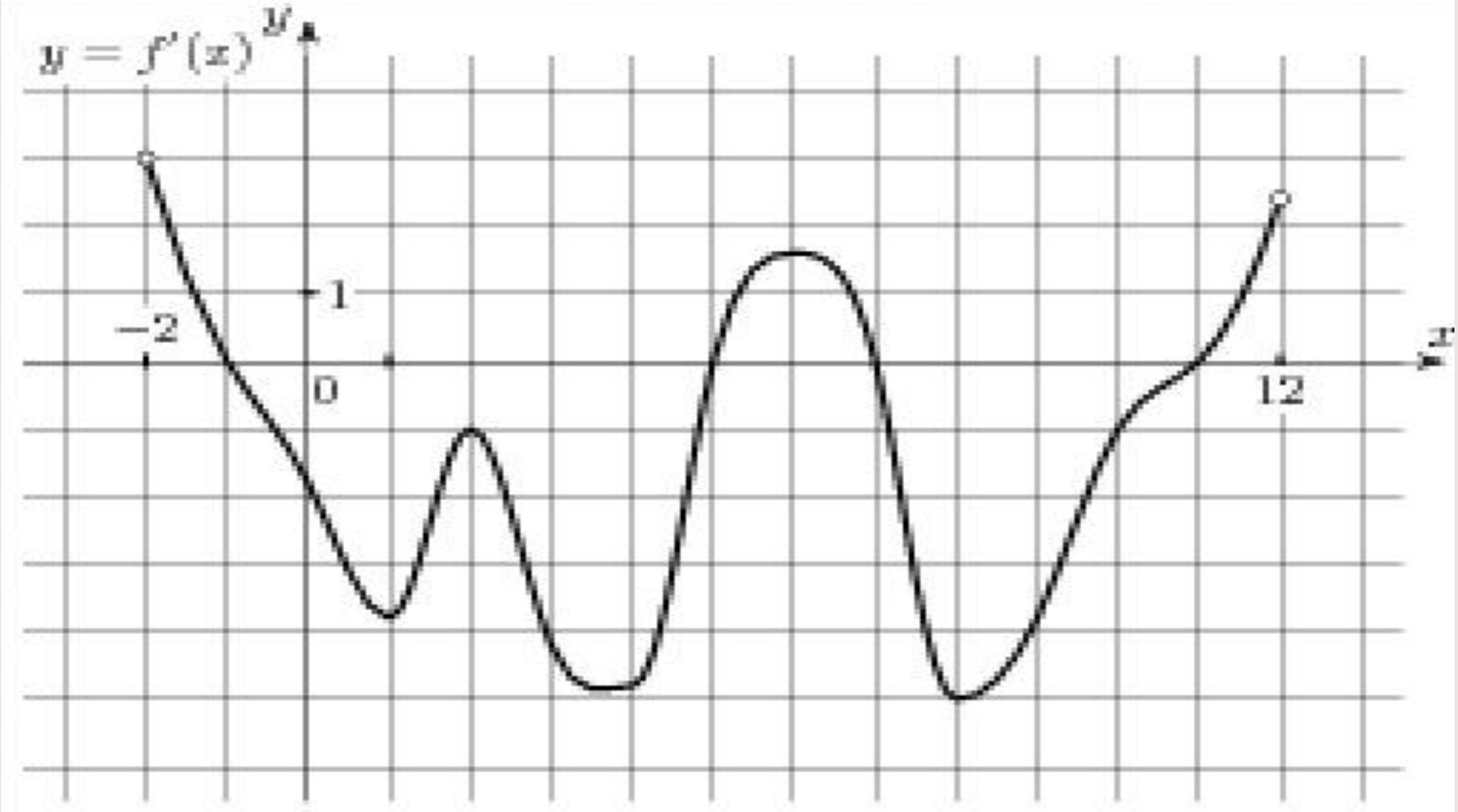
б) при каких х принадлежащих [-4;4]функция достигает наименьшего и наибольшего значения?



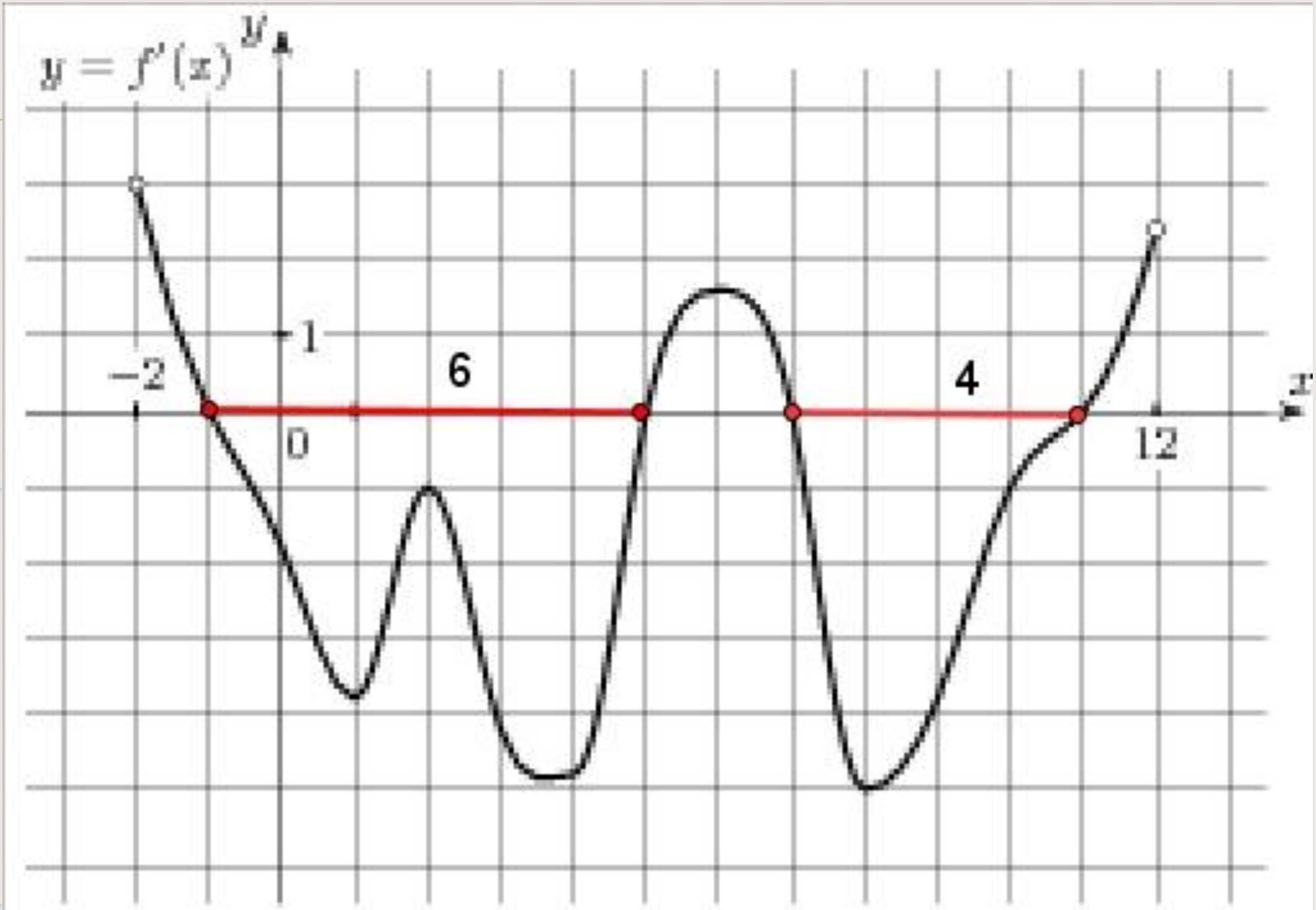
Ответ



№ 6. Дан график производной некоторой функции. Определить промежутки, на которых функция убывает?

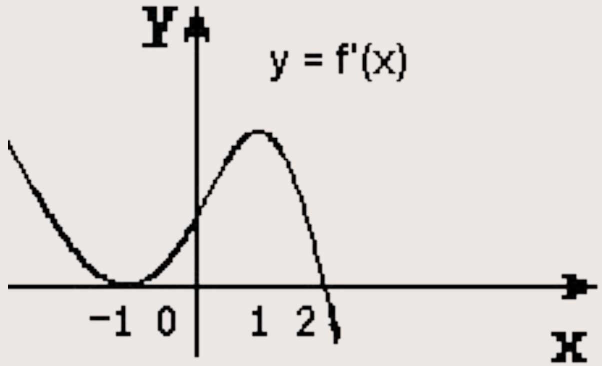


Ответ



Верно или не верно №1

1. График производной. Точки x=-1, x=1, x=2 являются точками максимума?



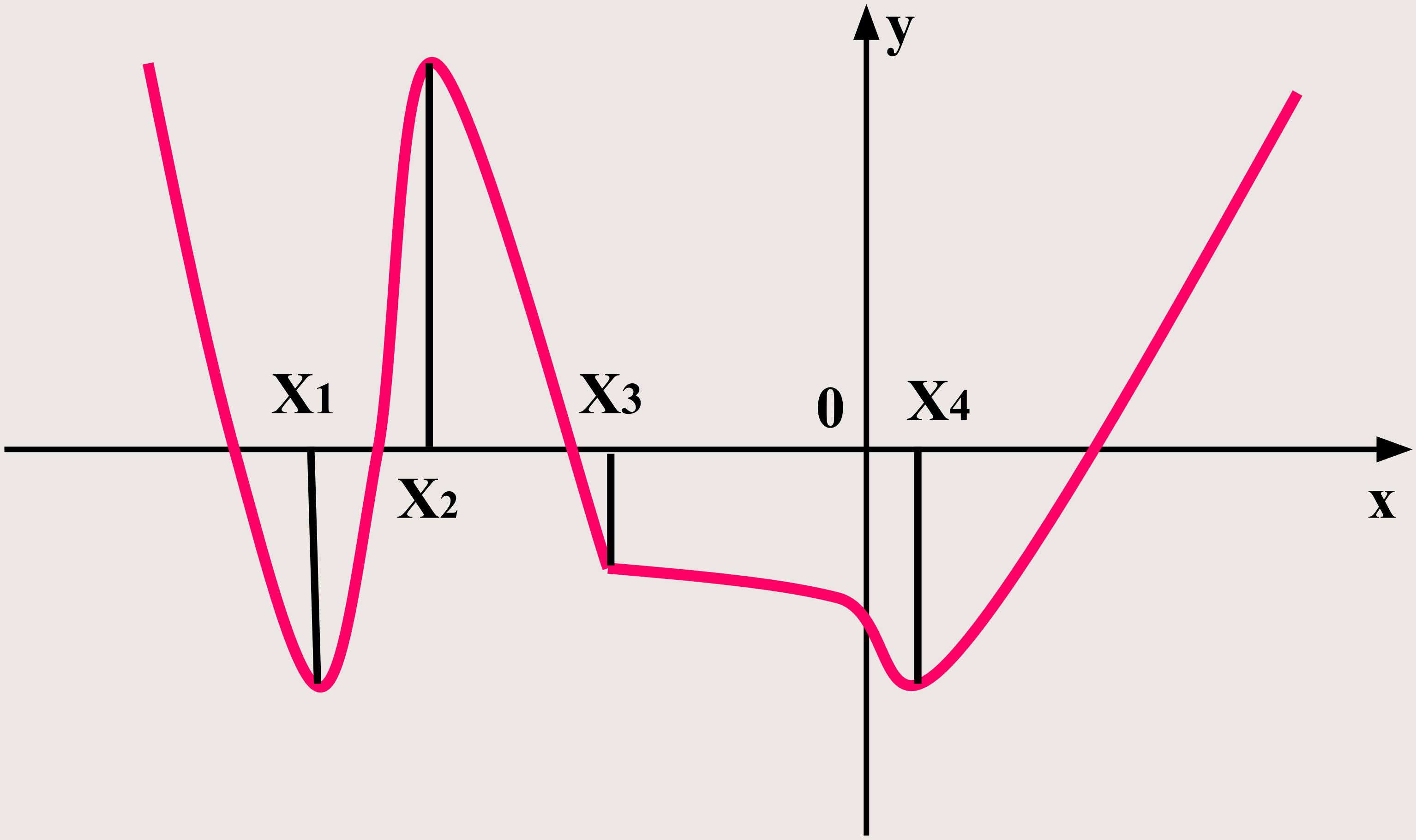
2. Производная функции в точке xo равна 0, значит xo - критическая точка. Верно ли?
3. Производная функции не существует в точке xo, значит xo - критическая точка. Верно ли?

4. Критическая точка является точкой экстремума. Верно ли?

5. Точка экстремума является критической точкой. Верно ли?

6. Функция у(х) непрерывна в точке х=4, причем у' (х)>0 на (1;4) и у'(х)<0 на (4;7). Точка х=4 является точкой минимума?

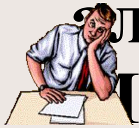
№ 2. По данному графику функции определить верно или нет высказывание



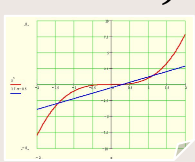
1) Точка x_1 – точка минимума. Да
2) Точка x_1 – точка перегиба. Нет
3) В точках x_2 и x_4 касательная параллельна оси абсцисс Да
4) В точке x_3 производной не существует. Да
5) Точка x_4 – точка экстремума Да
6) Точка x_4 – точка минимума Да
7) Точка x_4 – стационарная точка Да
8) Точка x_3 – точка экстремума Нет
9) Точка x_2 – точка максимума Да

Используемые ресурсы

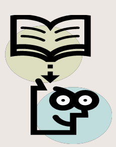
- **Учебник А.Г.Мордковича «Алгебра и начала анализа» 10-11 класс,- М., Мнемозина, 2012**
- **Задачник А.Г.Мордковича «Алгебра и начала анализа» 10-11 класс,- М., Мнемозина, 2012**
- **Л.И. Мартышова «Открытые уроки алгебры и начала анализа» 9-11 классы, - М.,ВАКО, 2012**



http://www.gifpark.su/PEO.htm



Автор и источник заимствования неизвестен



Автор и источник заимствования неизвестен