Постоянные финансовые ренты

Виды потоков платежей

Поток платежей (денежный поток, cash flow) – последовательность или ряд платежей во времени: погашение задолженности в рассрочку, выплаты пенсий.

Член потока – отдельный элемент ряда, потока платежей.

Классификация потоков

Регулярные потоки – размеры платежей постоянные или следуют установленному правилу; равные интервалы.

- положительные члены потоков – денежные ***поступления***
- отрицательные члены потоков – денежные ***выплаты***

Классификация потоков

Финансовая рента (рента, rent) – поток платежей, все члены которого – положительные величины, а временные интервалы между платежами одинаковы (иногда – ***аннуитет, annuity***).

Параметры рент:

- член ренты – размер отдельного платежа
- период ренты – временной интервал между последовательными платежами
- срок ренты – время от начала первого периода до конца последнего
- процентная ставка

Классификация финансовых рент

- по количеству выплат
  - годовые – выплата раз в году
  - *p*-срочные – несколько (*p*) раз в году
- по значимости периодов ренты
  - дискретные
  - непрерывные
- по числу начислений процентов
  - ренты с ежегодным начислением\
  - ренты с начислением *m* раз в году

Классификация финансовых рент

- по величине членов
  - постоянные – одинаковые размеры членов ренты
  - переменные – члены изменяют свои размеры во времени, следуя какому либо закону, или несистематично
- по вероятности выплат
  - верные – подлежат безусловной уплате
  - условные – выплата ставится в зависимость от наступления какого-либо «случайного» события
- по количеству членов ренты
  - ограниченные – срок заранее оговорен
  - бесконечные (вечные) – формально не имеют срока

Классификация финансовых рент

- по соотношению начала срока ренты и момента времени, упреждающего начало ренты
  - немедленные
  - отложенные (отсроченные)
- по моменту выплат платежей в пределах периода
  - ренты постнумерандо (обыкновенные) – платежи в конце периодов
  - ренты пренумерандо – платежи в начале периодов

Обобщающие параметры потоков платежей

Наращенная сумма (amount of cash flows) – сумма всех членов потока платежей с начисленными на них к концу срока процентами.

Под ***современной стоимостью потока платежей (present value of cash flows)*** понимают сумму всех его членов, дисконтированных на начало срока ренты или некоторый упреждающий момент времени.

Прямой метод расчета наращенной суммы и современной стоимости

- $$S = \sum_t R_t (1 + i)^{n - n_t}$$

$$A = \sum_t R_t v^{n_t}$$

Наращенная сумма годовой ренты постнумерандо

- Пусть в течение n лет в банк в конце каждого года вносится по R рублей. На взносы начисляются сложные проценты по ставке i% годовых.

Наращенная сумма к концу срока каждого взноса:

$$R(1+i)^{n-1}, R(1+i)^{n-2}, \dots , R(1+i), R.$$

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$s_{n;i} = \sum_{t=0}^{n-1}(1+i)^t = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Наращенная сумма годовой ренты с начислением *m* раз в году

Члены ренты с начисленными к процентами:

$$R, R(1+j/m)^m, R(1+j/m)^{2m}, \dots, R(1+j/m)^{(n-1)m}$$

Сумма членов этой прогрессии составляет

$$S = R\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{(1+j/m)^m-1} = Rs_{mn;j/m}$$

Наращенная сумма
p-срочной ренты (m = 1)

- Если годовая сумма платежей равна R, то каждый раз **выплачивается R/p**. Общее число членов ренты – np. Первый член ее равен R/p, знаменатель – $(1+i)^{1/p}$.

Сумма членов этой прогрессии

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+i)^{(1/p)n} - 1}{(1+i)^{1/p} - 1} = R\frac{(1+i)^n - 1}{p[(1+i)^{1/p} - 1]}$$

Наращенная сумма *p*-срочной ренты ($p = m$)

-

$$S = \frac{R}{m} \cdot \frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{j/m} = R\frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{j}$$

Наращенная сумма
p-срочной ренты ($p \neq m$)

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1 + j/m)^{np \cdot m/p} - 1}{(1 + j/m)^{m/p} - 1} = R \frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{p[(1 + j/m)^{m/p} - 1]}$$

Непрерывное начисление процентов

Для годовой ренты:

$$S = R\frac{e^{\delta n}-1}{e^{\delta}-1} = Rs_{n;\delta}$$

Для p-срочной ренты:

$$S = R\frac{e^{\delta n}-1}{p(e^{\delta/p}-1)} = Rs_{n;\delta}^{(p)}$$

Современная стоимость постоянной ренты постнумерандо

Современная стоимость потока платежей – сумма дисконтированных членов этого потока на некоторый предшествующий момент времени (капитализированная стоимость; приведенная величина).

Современная стоимость потока платежей ***эквивалентна в финансовом смысле*** всем платежам, которые охватывает поток.

Годовая рента

Поток дисконтированных платежей:

$$Rv, Rv^2, \dots, Rv^n.$$

Сумма членов геометрической прогрессии:

$$A = R\sum_{t=1}^{n} v^t = Rv\frac{v^n - 1}{v - 1} = R\frac{1 - v^n}{i} =$$

$$= R\boxed{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}} = Ra_{n;i}.$$

коэффициент приведения ренты

Годовая рента, начисление процентов *m* раз в году

$$A = R\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{(1+j/m)^{m}-1} = Ra_{mn;j/m}$$

Рента *p*-срочная (*m* = 1)

- $$A = \frac{R}{p}\sum_{t=1}^{np} v^{t/p} = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]} = Ra_{n;i}^{(p)}$$

Рента *p*-срочная (*p* = *m*)

- $$A = \frac{R}{m} \cdot \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{j/m} =$$

$$= R \cdot \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{j}$$

Рента *p*-срочная ($p \neq m$)

$$A = R \cdot \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p[(1+j/m)^{m/p}-1]} =$$

$$= Ra^{(p)}_{mn;j/m}$$

Зависимость между наращенной и современной стоимостью ренты

Для годовых и *p*-срочных постоянных рент постнумерандо с ежегодным начислением процентов:

$$A(1+i)^n = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^n =$$

$$= R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = S$$

Для рент с начислением процентов *m* раз в году имеем:

$$A\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} = S$$

Определение размера члена ренты

- Исходные условия: задается S или A и набор параметров, кроме R.

Если рента годовая, постнумерандо, с ежегодным начислением процентов:

$$R = \frac{S}{s_{n;i}}$$

$$R = \frac{A}{a_{n;i}}$$

Расчет срока ренты

- Для годовой ренты постнумерандо с ежегодным начислением процентов:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R} i + 1\right)}{\ln(1+i)}, \qquad n = \frac{\ln\left(1 - \frac{A}{R} i\right)^{-1}}{\ln(1+i)}$$

Расчет срока ренты

При расчете срока необходимо принимать во внимание:

1. Расчетные значения, как правило, дробные.
   В качестве срока часто удобно принять ближайшее целое число лет (периодов).

2. Если округление производится до меньшего целого, то наращенная сумма или современная стоимость ренты оказывается меньше заданных размеров.
   Возникает необходимость в компенсации.

Ренты пренумерандо

- Каждый член ренты пренумерандо «работает» на один период больше, чем в ренте постнумерандо:

$$\ddot{S} = S(1+i)$$

$$\ddot{s}_{n;i} = s_{n;i}(1+i)$$

Годовая ренты с начислением процентов m раз в году

$$\ddot{S} = S(1+j/m)^m.$$

Для p-срочных рент, у которых $m = 1$ и $m \neq p$ получим:

$$\ddot{S} = S(1+i)^{1/p},$$

$$\ddot{S} = S(1+j/m)^{m/p}.$$

Ренты с выплатами в середине периодов

Для современных стоимостей:

$$A_{1/2} = A(1+i)^{1/2} \quad \text{при } p = 1, m = 1,$$

$$A_{1/2} = A(1+i)^{1/2p} \quad \text{при } p > 1, m = 1,$$

$$A_{1/2} = A(1+j/m)^{m/2} \quad \text{при } p = 1, m > 1,$$

$$A_{1/2} = A(1+j/m)^{m/2p} \quad \text{при } p > 1, m > 1.$$

Отложенные ренты

- Начало выплат у отложенной ренты сдвинуто вперед относительно некоторого момента времени.

$$_{t}A = Av^{t} = Ra_{n;i}v^{t}$$

где $_{t}A$ – современная стоимость отложенной на t лет ренты.

Вечная рента (*perpetuity*)

- ряд платежей, количество которых не ограничено – теоретически она выплачивается в течение бесконечного числа лет.

Наращенная сумма вечной ренты равна бесконечно большой величине.

Современная стоимость ренты:

$$A_\infty = \frac{R}{i}$$

Рента с периодом платежей, превышающим год

- Пусть r – временной интервал между двумя членами ренты, проценты начисляются 1 раз в году.

Поток дисконтированных платежей:

$$Tv^r, Tv^{2r}, \dots, Tv^n$$

Сумма членов прогрессии при условии, что $T = 1$, равна:

$$a_{r;i} = v^r \frac{v^{r\left(\frac{n}{r}\right)} - 1}{v^r - 1} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{(1+i)^r - 1} = \frac{a_{n;i}}{s_{r;i}}$$

Спасибо за внимание!