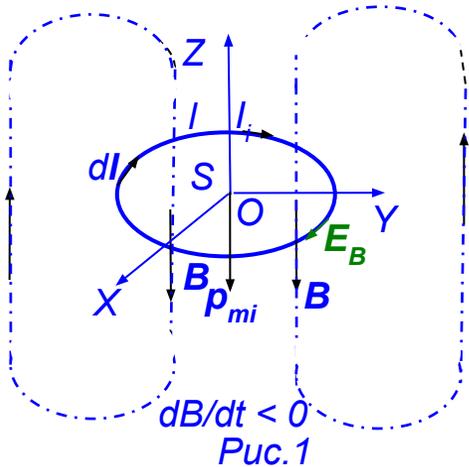




электромагнитного поля. Электромагнитные волны

- **Вихревое электрическое поле**
- **Ток смещения в цепи с изменяющимся во времени электрическим полем**
- **Закон полного тока**
- **Волновое уравнение для электромагнитного поля. Скорость распространения электромагнитных волн**
- **Волновое уравнения плоской электромагнитной волны, его решение**
- **Плотность энергии плоской электромагнитной волны. Вектор Пойнтинга**
- **Энергия и импульс плоской электромагнитной волны**
- **Ауд.: Иродов И.Е. Задачи по общей физике.**
- М.: Бином, 1998÷2010. №№ 3.245, 3.249, 3.250, 3.253

Вихревое электрическое поле



ЭДС индукции E_i в проводящем контуре l длиной, на который "натянута" поверхность S площадью, при наличии пронизывающей её и изменяющейся со скоростью $d\Phi_m/dt$ во t времени внешнего магнитного потока с вектором \mathbf{B} индукции:

$$E_i = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1)$$

ЭДС индукции E_i вызывает появление индукционного тока I_i силой с вектором \mathbf{p}_{mi} магнитного момента. При наличии в произвольной точке пространства изменяющегося во t времени внешнего магнитного поля с $\partial \mathbf{B} / \partial t \neq 0$ появляется вихревое электрическое поле с вектором \mathbf{E}_e напряжённости:

$$[\mathbf{E}_e] = - \nabla \times \mathbf{B} / \partial t. \quad (2)$$

Ток смещения в цепи с изменяющимся во времени электрическим полем

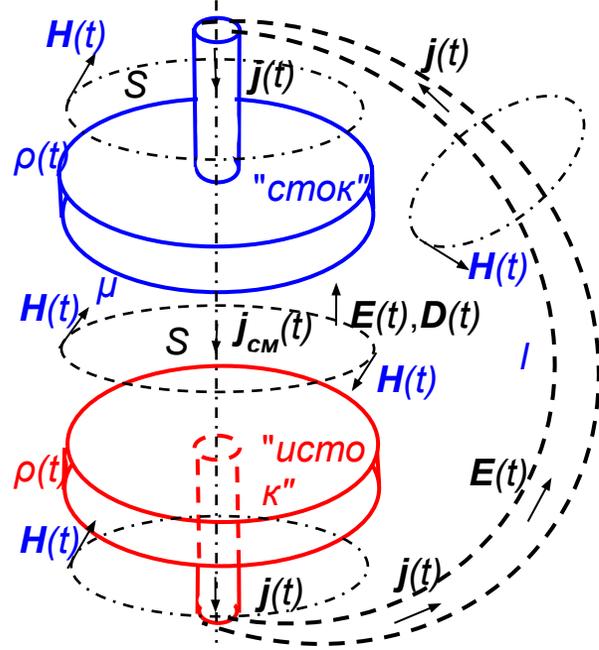


Рис.2

Вектор \mathbf{j} плотности тока проводимости связан с объёмной ρ плотностью свободных зарядов в произвольной точке пространства уравнением непрерывности:

$$\mathbf{j} \nabla = - \partial \rho / \partial t \leftrightarrow \partial j_x / \partial x + \partial j_y / \partial y + \partial j_z / \partial z = - \partial \rho / \partial t, \quad (3)$$

где $\nabla \mathbf{j} > 0$ или $\nabla \mathbf{j} < 0$, т.е. сумма приращений проекций вектора \mathbf{j} плотности тока проводимости **положительны** или **отрицательны**, поэтому в

точке пространства происходит **убывание** или **возрастание** во t времени объёмной ρ плотности свободных зарядов, т.е. $\partial \rho / \partial t < 0$ ("**исток**") или $\partial \rho / \partial t > 0$ ("**сток**"). Изменяющийся во t времени вектор $\mathbf{E}(t)$ напряжённости электрического поля, направленный



от "истока" к "стоку", замыкается по внешней цепи /
длиной с вектором $\mathbf{j}(t)$ плотности проводимости, т.е. вектор

$\mathbf{E}(t)$ напряжённости - это вихревое электрическое поле. Его наличие приводит к появлению между обкладками вихревого магнитного поля с вектором $\mathbf{H}(t)$ напряжённости:

$$[\nabla \times \mathbf{E}] = -\mu_0 \mu \partial \mathbf{H} / \partial t, \quad (4)$$

где μ - магнитная проницаемость среды между "истоком" и "стоком". Наличие вихревого магнитного поля между "истоком" и "стоком"

Максвелл объяснил присутствием между ними изменяющегося во t времени тока смещения с вектором $\mathbf{j}_{см}(t)$

плотности, вследствие чего ротор \mathbf{H} вектора напряжённости магнитного поля в цепи с токами проводимости и смещения:

$$[\nabla \times \mathbf{H}] = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{см}, \quad (5)$$

где $\mathbf{j}_{см} = \partial \mathbf{D} / \partial t$ - это изменяющееся во t времени электрическое поле с вектором \mathbf{D} электрического смещения.

Закон полного тока



Дифференциальный вид:

$$[\mathbf{H}] = \mathbf{j} \nabla(\partial \mathbf{D} / \partial t),$$

(6)

согласно которому вихревое магнитное поле с вектором \mathbf{H} напряжённости возникает при наличии в среде тока с вектором \mathbf{j} плотности проводимости и изменяющегося во t времени электрического поля с вектором \mathbf{D} электрического смещения.

Интегральный вид:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} + (\partial / \partial t) \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S},$$

(7)

согласно которому циркуляция вектора \mathbf{H} напряжённости по Γ контуру, охватывающего поверхность S площадь с токами, будет состоять либо только из тока проводимости, либо только из тока смещения, либо из суммы этих двух токов при наличии в среде одновременно токов проводимости и смещения.

Волновое уравнение для электромагнитного поля. Скорость распространения электромагнитных волн



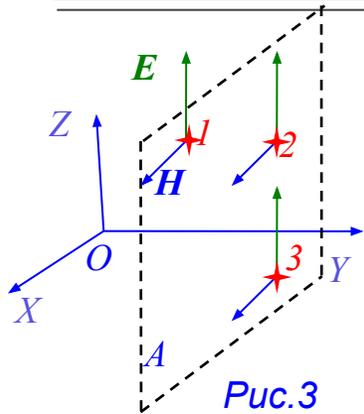
В однородной, незаряжённой и непроводящей среды, т.е. с плотностью свободных зарядов $\rho = 0$ и с вектором $\mathbf{j} = 0$ плотности токов проводимости возможно возникновение электромагнитных волн, описываемых волновыми уравнениями:

$$\begin{aligned} (\partial^2 \mathbf{E} / \partial x^2) + (\partial^2 \mathbf{E} / \partial y^2) + (\partial^2 \mathbf{E} / \partial z^2) &= (\epsilon \mu / c^2) (\partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2); & (\partial^2 \mathbf{H} / \partial x^2) \\ + (\partial^2 \mathbf{H} / \partial y^2) + (\partial^2 \mathbf{H} / \partial z^2) &= (\epsilon \mu / c^2) (\partial^2 \mathbf{H} / \partial t^2), & (9) \end{aligned}$$

где $c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$ - квадрат скорости электромагнитной волны в вакууме. Функция, удовлетворяющая волновым уравнениям, описывает некоторую волну, причём корень квадратный из величины, обратной коэффициенту при производной по t времени в правой части этих уравнений даёт фазовую скорость электромагнитной волны:

$$v = c / (\epsilon \mu)^{1/2}. \quad (10)$$

Волновое уравнения плоской электромагнитной волны, его решение



Характеристики плоской электромагнитной волны в нейтральной, непроводящей среде с равенством нулю ρ плотности свободных зарядов и вектора $\mathbf{j} = 0$ плотности токов проводимости, а также с постоянными ϵ диэлектрической и μ магнитной проницаемостями

одинаковы в A плоскости равных фаз. Поэтому векторы \mathbf{E} , \mathbf{H} напряжённости, например, в *т.т.* 1, 2 и 3 соответственно *электрического* и *магнитного* полей не будут зависеть от x и z координат. Частный случай трёхмерных волновых уравнений справедлив для плоской

электромагнитной волны: $\partial^2 E_z / \partial y^2 = \epsilon \mu (\partial^2 E_z / \partial t^2) / c^2$; (11)

$$\partial^2 H_x / \partial y^2 = \epsilon \mu (\partial^2 H_x / \partial t^2) / c^2, \quad (12)$$



где E_z , H_x – проекции на OZ , OX оси координат соответственно векторов напряжённостей E_z электрического и H_x магнитного поля. Решение одномерных волновых уравнений:

$$E_z = E_m \cos(\omega t - ky + \varphi_1); \quad (13)$$

$$H_x = H_m \cos(\omega t - ky + \varphi_2), \quad (14)$$

где ω , E_m и H_m , φ_1 и φ_2 - циклическая частота, амплитуды колебаний, начальные фазы векторов напряжённостей E_z электрического по OZ оси и H_x магнитного полей по OX оси; $k = \omega/v$ - волновое число, $v = c/(\epsilon\mu)^{1/2}$ - фазовая скорость плоской электромагнитной волны.

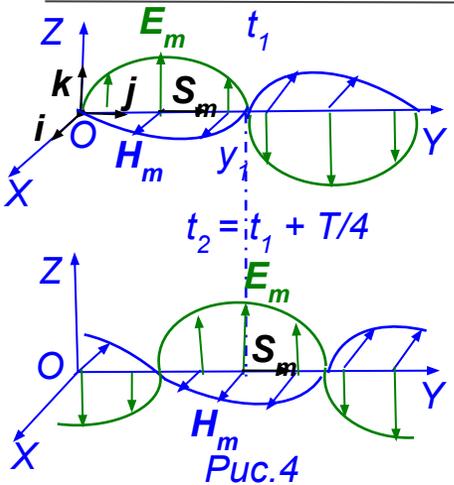
Отношение E_m/H_m амплитуд зависит от постоянных ϵ диэлектрической, μ магнитной проницаемостей среды:

$$E_m/H_m = (\mu_0\mu/\epsilon_0\epsilon)^{1/2}. \quad (15)$$

Для вакуума, у которого $\epsilon = \mu = 1$, отношение E_m/H_m амплитуд:

$$E_m/H_m = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}. \quad (16)$$

Плотность энергии плоской электромагнитной волны. Вектор Пойнтинга



Плотность энергии электромагнитной волны в произвольные момент t времени и y координате:

$$w = (\mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon)^{1/2} E H = (1/v) E_m H_m \cos^2(\omega t - ky), \quad (17)$$

где $v = 1/(\mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon)^{1/2}$ - фазовая скорость электромагнитной волны в среде с постоянными ϵ диэлектрической и μ магнитной проницаемостями.

Энергия S через поверхность, перпендикулярную направлению распространения электромагнитной волны и равной единичной площади, за единицу времени и в данный момент t

времени: $S = v w = E H = E_m H_m \cos^2(\omega t - ky), \quad (18)$

Вектор \mathbf{S} плотности потока энергии, совпадающее с направлением переноса энергии электромагнитной волной, или вектор *Пойнтинга*:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \mathbf{H}]. \quad (19)$$

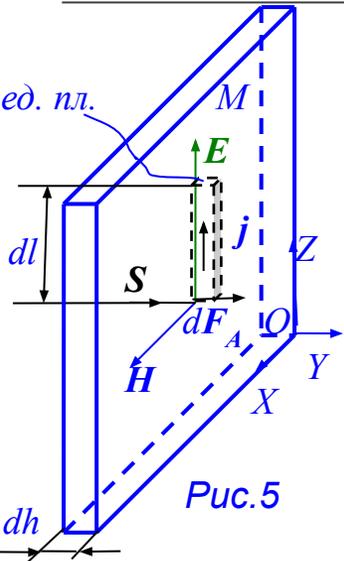
Энергия и импульс плоской электромагнитной волны



МГТУ им. Н.
Э. Баумана

Пойнтинга

Плоская электромагнитная волна с вектором \mathbf{S} распространяется перпендикулярно плоскости M тела с удельной σ электрической проводимостью. Вектор \mathbf{E} напряжённости этой электромагнитной волны вызывает появление согласно закону Ома в дифференциальной форме вектора \mathbf{j}



плотности тока проводимости:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (20)$$

Элементарный вектор $d\mathbf{F}_A$ силы Ампера, действующего на проводник с вектором \mathbf{j} плотности тока проводимости малой dl длины, протекающему через единичную площадь плоского M тела, который помещён в поле электромагнитной волны с вектором \mathbf{H} напряжённости:

$$d\mathbf{F}_A = \mu_0 dl [\mathbf{j}, \mathbf{H}]. \quad (21)$$

Модуль $F_{\text{Аед.об.}}$ вектора $\mathbf{F}_{\text{Аед.об.}}$ силы Ампера,



действующего на проводник единичного V_0 объёма, с учётом перпендикулярности векторов \mathbf{j} плотности тока

проводимости и \mathbf{H} напряжённости магнитного поля

электромагнитной волны:

$$F_{\text{Аед.об.}} = \mu_0 \mathbf{jH}. \text{ Поверхностному} \quad (22)$$

слою тела M с единичным V_0 объёмом

и dh толщиной вектором $F_{\text{Аед.об.}}$ силы Ампера

сообщается в единицу t времени модуль dK вектора

dK импульса силы:

$$dK = F_{\text{Аед.об.}} dh = \mu_0 \mathbf{jH} dh. \quad (23)$$

В этом же слое dh толщиной в единицу t времени

поглощается dW энергия:

$$dW = E j dh, \quad (24)$$

где $Ej = \rho j^2$ - количество джоулевой теплоты,

поглощаемой единичным V_0 объёмом плоского M тела с

ρ удельным электрическим сопротивлением; $E = \rho j$ -

закон Ома в дифференциальной форме.



Отношение K модуля вектора \mathbf{K} импульса силы в вакууме, действующего на проводник произвольного V объёма в единицу t времени, к количеству W джоулевой теплоты, поглощаемой этим проводником:

$$dK/dW = \mu_0 H/E \leftrightarrow K/W = \mu_0 H/E \leftrightarrow K/W = (\epsilon_0 \mu_0)^{1/2} = 1/c \leftrightarrow K = W/c, \quad (25)$$

где (15) $H/E = (\epsilon_0/\mu_0)^{1/2}$; $c = 1/(\epsilon_0 \mu_0)^{1/2}$ - скорость электромагнитной волны в вакууме; $K = W/c$ - модуль K вектора \mathbf{K} импульса силы плоской электромагнитной волны в вакууме, несущей в единицу t времени W энергию. Модуль $K_{\text{ед.об.}}$ вектора $\mathbf{K}_{\text{ед.об.}}$, передаваемого плоской электромагнитной волной проводнику единичного V_0 объёма в единицу t времени:

$$K_{\text{ед.об.}} = w/c = S/c^2, \quad (26)$$

где $w = S/c$ - плотность энергии плоской электромагнитной волны. Вследствие сонаправленности $\mathbf{K}_{\text{ед.об.}}$ вектора импульса вектору \mathbf{S} *Пойнтинга*:

$$\mathbf{S} = c^2 \mathbf{K}_{\text{ед.об.}} \quad (27)$$

Задача №3.245



Шар радиуса $R = 50 \text{ см}$ находится в немагнитной среде проницаемости $\varepsilon = 4, 0$. В среде распространяется плоская электромагнитная волна, длина которой $\lambda \ll R$ и амплитуда электрической составляющей $E_m = 200 \text{ В/м}$. Какая энергия падает на шар за время $\Delta t = 60 \text{ с}$?

Ответ: Здесь $t \gg T$, где T – период колебаний; поэтому искомая энергия $W = (\varepsilon_0 \varepsilon / \mu_0)^{1/2} E_m^2 \pi R^2 t / 2 = 5 \text{ кДж}$.

Решение. Дано: $R, \varepsilon, \lambda \ll R, E_m, \Delta t / W = ?$

Угол α между вектором \mathbf{S} *Пойнтинга* плотности потока энергии, совпадающее с направлением переноса энергии электромагнитной волной, и единичным \mathbf{n} нормальным вектором к элементарной поверхности dF

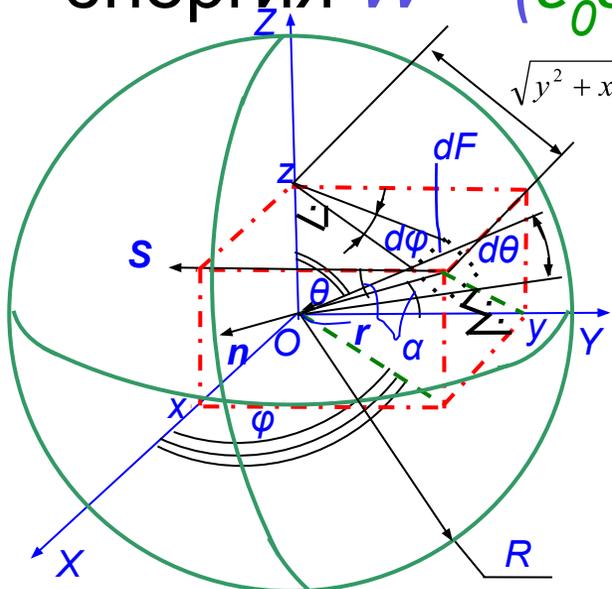


Рис.6

площадью шара, сонаправленным r радиусу – вектору



сферической системы координат:

$$\cos \alpha = \frac{y}{r} = \frac{\sin \varphi \sqrt{y^2 + x^2}}{\sqrt{y^2 + x^2} / \sin \theta} = \sin \varphi \sin \theta \quad (28)$$

Энергия S через поверхность, перпендикулярную направлению распространения электромагнитной волны и равной единичной площади, за единицу времени и в данный момент t времени:

$$\begin{aligned} S &= EH = E_m H_m \cos^2(\omega t - ky) = E_m H_m \cos^2[(2\pi/T)t - (2\pi/\lambda)R \cos \alpha] = \\ &= E_m H_m \cos^2[(2\pi v/\lambda)t - (2\pi/\lambda)R \cos \alpha] = E_m H_m \cos^2 [(2\pi/\lambda)(vt - R \cos \alpha)] \approx \\ &\approx E_m H_m \cos^2[(2\pi/\lambda)vt] = E_m H_m \cos^2 \omega t = E_m^2 (\epsilon \epsilon_0 / \mu_0)^{1/2} \cos^2 \omega t, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\omega = 2\pi/T$, $T = \lambda/v$ - циклическая частота, период

колебаний плоской электромагнитной волны с λ

длиной волны и $v = 1/(\mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon)^{1/2} = 1/(\mu_0 \epsilon_0 \epsilon)^{1/2} = c/(\epsilon)^{1/2} \approx$

$\approx 3 \cdot 10^9 / 2 = 1,5 \cdot 10^8$ м/с - фазовая скорость

электромагнитной волны в среде с постоянной ϵ



диэлектрической и $\mu = 1$ магнитной проницаемостями, поскольку электромагнитная волна распространяется в

немагнитной среде; $H_m = E_m(\epsilon_0\epsilon/\mu_0\mu)^{1/2} = E_m(\epsilon_0\epsilon/\mu_0)^{1/2}$ – соотношение между амплитудами векторов напряжённостей электрического и магнитного полей электромагнитной волны с учётом $\mu = 1$ немагнитной среды; $(vt - R\cos\alpha) \approx vt$ при $t > 10^{-6}$ с, поскольку

$v = 1,5 \cdot 10^8$ м/с, а $R\cos\alpha \leq 0,5$ м, т.е. во всём до $t = 60$ с временном диапазоне распространения электромагнитной волны. Поток $d\Phi_{dF,dt}$ вектора **S** *Пойнтинга* сквозь элементарную поверхность dF площадью за dt интервал времени с учётом α угла между вектором **S** и единичным **n** нормальным вектором:

$$\begin{aligned} d\Phi_{dF,dt} &= SdF\cos(\mathbf{S}\hat{\mathbf{n}})dt = \\ &= E_m^2(\epsilon\epsilon_0/\mu_0)^{1/2}(\cos^2\omega t)R^2\sin\Theta d\Theta d\varphi\sin\varphi\sin\Theta dt, \quad (30) \end{aligned}$$

где $dF = R^2 \sin\Theta d\Theta d\varphi$ – площадь элементарной поверхности шара в сферической системе координат; $\cos(\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) = \cos\alpha =$



$\sin\varphi \sin\Theta$ – косинус α угла между вектором \mathbf{S} и единичным \mathbf{n} нормальным вектором. Поток $\Phi_{F,\Delta t}$ вектора \mathbf{S} *Пойнтинга* сквозь половину F площади поверхности шара за Δt интервал времени, равный W энергии электромагнитной волны, которая падает на шар за время $\Delta t = 60$ с:

$$\begin{aligned} \Phi_{F,\Delta t} &= W = E_m^2 (\epsilon\epsilon_0/\mu_0)^{1/2} R^2 \int_0^\pi \sin^2\Theta d\Theta \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi \int_0^{\Delta t} \cos^2\omega t dt = \\ &= E_m^2 (\epsilon\epsilon_0/\mu_0)^{1/2} (\Theta/2) \Big|_0^\pi (-\cos\varphi) \Big|_0^\pi [(t/2) + (1/4\omega)\sin 2\omega t] \Big|_0^{\Delta t} \approx \\ &\approx E_m^2 (\epsilon\epsilon_0/\mu_0)^{1/2} (\pi R^2/2) \Delta t = 4 \cdot 10^4 \cdot (4 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} / 1,257 \cdot 10^{-6})^{1/2} \cdot \\ &\cdot (3,14 \cdot 0,25/2) \cdot 60 \approx 4960 [B^2] \cdot [\Phi/Гн]^{1/2} \cdot [с] = 4960 [B^2] \cdot \\ &\cdot [Кл^2 В^{-2} с^2]^{1/2} \cdot [с] = 4960 [Дж/Кл] \cdot [Кл] \approx 5 \text{ кДж}, \end{aligned} \quad (31)$$

где $(t/2) + (1/4\omega)\sin 2\omega t \approx t/2$, т.к. $\omega = 2\pi\nu/\lambda \approx 10^9/\lambda$ 1/с, а $\lambda \ll 0,5$ м.

Задача №3.249



Синусоидальный ток частоты $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$ течёт по обмотке соленоида, радиус сечения которого $R = 6,0 \text{ см}$. Найти отношение амплитудных значений магнитной и электрической энергий внутри соленоида.

Ответ: $W_e / W_m = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 R^2 / 8 = 5,0 \cdot 10^{-15}$.

Решение. Дано: $\omega, R, W_e / W_m = ?$

Модуль B вектора \mathbf{B} индукции магнитного поля в вакууме внутри длинного соленоида с количеством n витков на единицу его l длины с током

$I = I_m \sin \omega t$ силой:

$$B = \mu_0 n I_m \sin \omega t, \quad (32)$$

где I_m - амплитуда колебаний синусоидального тока в соленоиде.

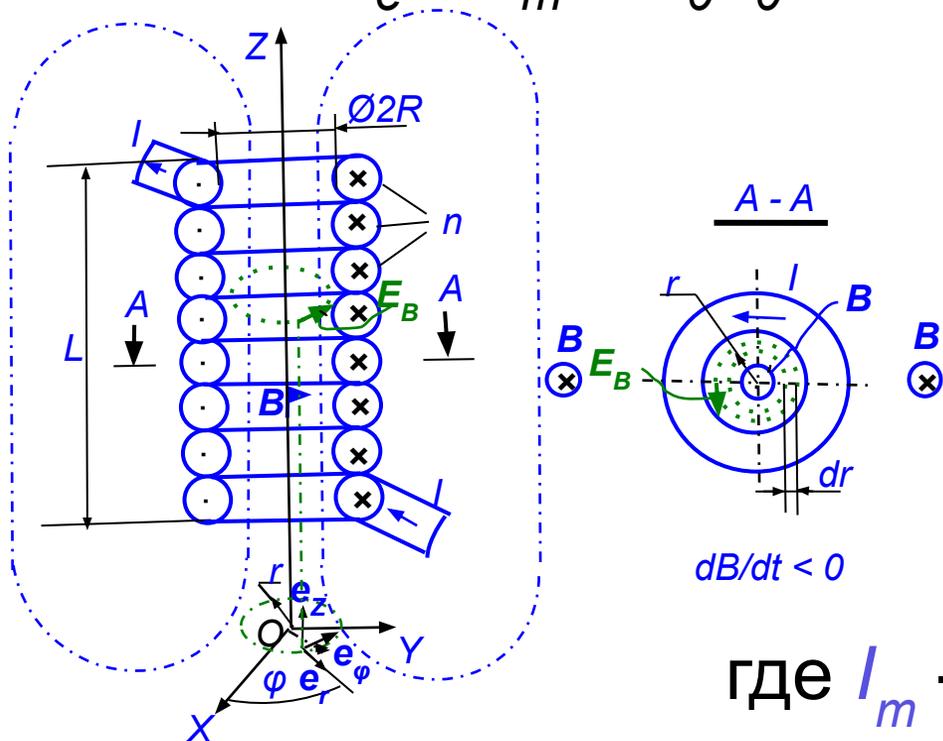


Рис.7



Ротация вектора \mathbf{E}_ϵ напряжённости вихревого электрического поля с учётом равенства нулю проекций $E_{\epsilon r}$, $E_{\epsilon z}$ этого вектора на \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_z орты в цилиндрической системе координат и отличия от нуля проекции \mathbf{E}_ϵ на \mathbf{e}_ϕ орт, а также с учётом наличия по OZ оси внутри соленоида вектора

$\mathbf{B} = \mathbf{e}_z \mu_0 n I_m \sin \omega t$ индукции магнитного поля: $[\nabla \mathbf{E}_\epsilon] = -\partial \mathbf{B} / \partial t \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \mathbf{e}_z \frac{1}{r} \frac{\partial (r E_{\epsilon m})}{\partial r} = -\mathbf{e}_z \mu_0 n I_m \omega \cos \omega t \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial (r E_{\epsilon m})}{\partial r} = \mu_0 n I_m \omega \leftrightarrow \int_0^r d(r E_{\epsilon m}) = \int_0^r r \mu_0 n I_m \omega dr \leftrightarrow r E_{\epsilon m} = \frac{r^2 \mu_0 n I_m \omega}{2} \leftrightarrow E_{\epsilon m} = \frac{r \mu_0 n I_m \omega}{2}, \quad (33)$$

где $0 \leq r \leq R$; $E_{\epsilon m}$ - амплитуда вектора \mathbf{E}_ϵ напряжённости вихревого электрического поля внутри соленоида. Амплитуды плотностей энергий w_m , $w_{\epsilon e}$ магнитного и вихревого электрического полей в вакууме внутри соленоида:

$$w_m = B_m^2 / 2\mu_0 = \mu_0 n^2 I_m^2 / 2; \quad (34)$$

$$w_{\epsilon e} = \epsilon_0 E_{\epsilon m}^2 / 2 = \epsilon_0 \mu_0^2 n^2 I_m^2 \omega^2 r^2 / 8. \quad (35)$$



Амплитудное значение энергии W_m магнитного поля в вакууме внутри соленоида $\pi R^2 L$ объёмом:

$$W_m = w_m \pi R^2 L = \pi R^2 L \mu_0 n^2 I_m^2 / 2. \quad (36)$$

Амплитудное значение энергии dW_{ee} вихревого электрического поля в вакууме внутри соленоида в трубке dr толщиной и $2\pi r L dr$ объёмом:

$$dW_{ee} = w_{ee} 2\pi r L dr = \epsilon_0 \mu_0^2 n^2 I_m^2 \omega^2 \pi r^3 L dr / 4. \quad (37)$$

Амплитудное значение энергии W_{ee} вихревого электрического поля в вакууме внутри соленоида при изменении r радиуса трубки dr

толщиной от $r = 0$ до $r = R$:

$$W_{ee} = \int_0^R dW_{ee} = \frac{\epsilon_0 \mu_0^2 n^2 I_m^2 \omega^2 \pi L}{4} \int_0^R r^3 dr = \frac{\epsilon_0 \mu_0^2 n^2 I_m^2 \omega^2 \pi L R^4}{16}. \quad (38)$$

Отношение W_{ee}/W_m амплитудных значений энергий вихревого электрического поля к магнитному внутри соленоида в вакууме: $W_{ee}/W_m = \epsilon_0 \mu_0 R^2 \omega^2 / 8 = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1,257 \cdot 10^{-6} \cdot 3,6 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6 / 8 \approx 5,0 \cdot 10^{-15} [\Phi \cdot \text{Гн} \cdot \text{м}^{-2}] \cdot [\text{м}^2] \cdot [\text{с}^{-2}] = 5,0 \cdot 10^{-15} [\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}^{-1}] \cdot [\text{с}^{-2}] = 5,0 \cdot 10^{-15}. \quad (39)$

Задача №3.250



Плоский конденсатор с круглыми параллельными пластинами медленно заряжают. Показать, что поток вектора *Пойнтинга* через боковую поверхность конденсатора равен приращению энергии конденсатора за единицу времени. Рассеянием поля на краях при расчёте пренебречь.

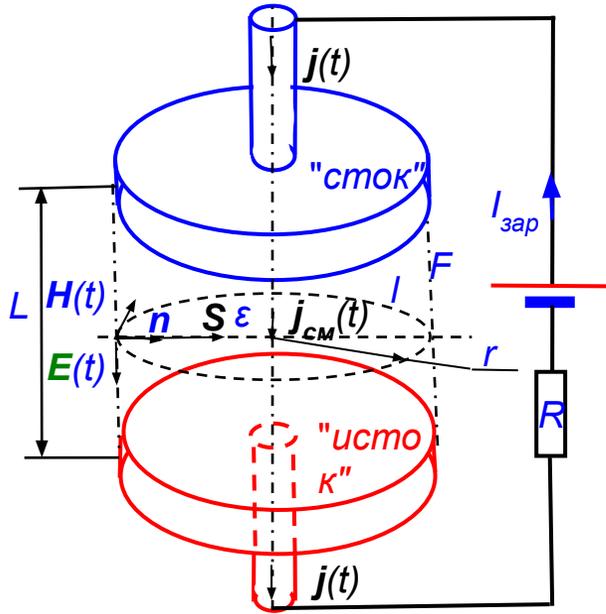


Рис. 8

Решение. Дано: конденсатор заряжают /
 $\Phi_F = dW_e / dt = ?$

Плотность энергии w_e электрического поля между пластинами конденсатора с ϵ диэлектрической проницаемостью: $w_e = \epsilon_0 \epsilon E^2 / 2$, (40)
где $E(t)$ – увеличивающийся во t времени модуль вектора $E(t)$ напряжённости электрического поля между

пластинами конденсатора. Энергия W_e электрического

поля между пластинами конденсатора:

$$W_e = w_e \pi r^2 L = \varepsilon_0 \varepsilon E^2 \pi r^2 L / 2,$$

(41) 

где $\pi r^2 L$ – объём среды с ε диэлектрической проницаемостью между пластинами конденсатора. Скорость dW_e/dt , которая численно равна возрастанию энергии конденсатора за единицу t времени с учётом $E(t)$ увеличивающегося во t времени модуля вектора $E(t)$

напряжённости электрического поля между пластинами

конденсатора: $dW_e/dt = (\varepsilon_0 \varepsilon / 2) 2E(\partial E / \partial t) \pi r^2 L = \varepsilon_0 \varepsilon E(\partial E / \partial t) \pi r^2 L.$ (42)

Циркуляция вектора H напряжённости по l контуру, охватывающего поверхность πr^2 площадью с вектором

$j_{CM} = \partial D / \partial t = \varepsilon_0 \varepsilon (\partial E / \partial t)$ токов смещения между пластинами

конденсатора: $\oint_l H dl = \int_S j_{CM} dS \leftrightarrow H 2\pi r = \varepsilon_0 \varepsilon (\partial E / \partial t) \pi r^2 \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow H = (\varepsilon_0 \varepsilon r / 2) (\partial E / \partial t) \quad (43)$$



Поток Φ_F вектора \mathbf{S} *Пойнтинга* сквозь воображаемую боковую поверхность цилиндра $F = 2\pi rL$ площадью,

основаниями которых являются круглые параллельные пластины конденсатора, за единицу t времени с учётом $\alpha = 0^\circ$ угла между вектором \mathbf{S} и единичным \mathbf{n} нормальным вектором к этой поверхности, а также с учётом (41):

$$\Phi_F = SF \cos(\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) = EH 2\pi rL = (\epsilon_0 \epsilon r / 2) E (\partial E / \partial t) 2\pi rL = (\epsilon_0 \epsilon) E (\partial E / \partial t) \pi r^2 L, \quad (44)$$

где S - модуль вектора $\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$ плотности потока энергии электромагнитной волны *Пойнтинга*; E , H - модули векторов \mathbf{E} , \mathbf{H} напряжённостей электрического и магнитного полей.

Равенство (42) и (44) доказывает, что поток вектора *Пойнтинга* за единицу t времени через боковую поверхность конденсатора равен приращению энергии этого конденсатора за единицу времени: $\Phi_F = dW_e / dt$. (45)

Задача №3.253



Ток, протекающий по обмотке длинного прямого соленоида, достаточно медленно увеличивают. Показать, что скорость возрастания энергии магнитного поля в соленоиде равна потоку вектора *Пойнтинга* через его боковую поверхность.

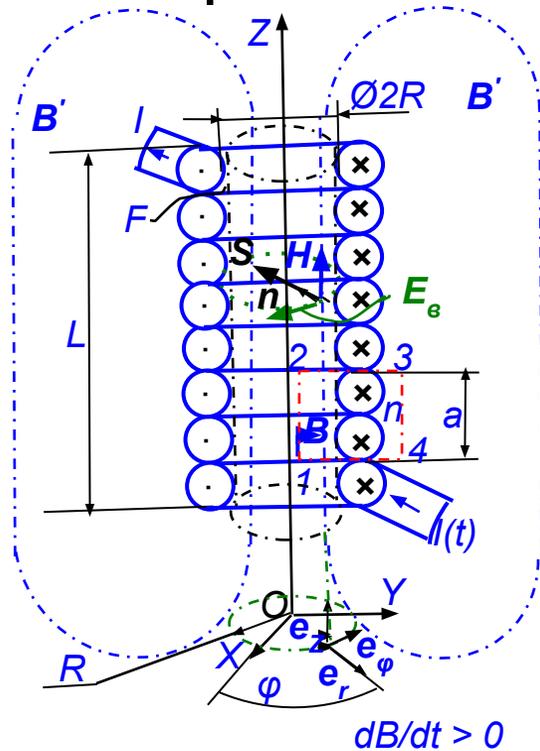


Рис.9

Решение. Дано: ток соленоида увеличивают /
 $\Phi_m = dW_m/dt = ?$

Плотность энергии w_m магнитного поля в вакууме внутри соленоида: $w_m = B^2/2\mu_0 = \mu_0 n^2 I^2/2$ (46)

где $I(t)$ – увеличивающаяся во t времени сила тока, протекающая по обмотке длинного прямого соленоида. Энергия W_m магнитного поля внутри соленоида:

$$W_m = w_m \pi R^2 L = \mu_0 n^2 I^2 \pi R^2 L/2, \quad (47)$$

где $\pi R^2 L$ – внутренний объём соленоида.



Скорость dW_m/dt , которая численно равна энергии магнитного поля в соленоиде за единицу t времени с учётом $I(t)$

увеличивающейся во t времени силе тока в витках соленоида:

$$dW_m/dt = \mu_0 n^2 2I(\partial I/\partial t)\pi R^2 L/2 = \mu_0 n^2 I(\partial I/\partial t)\pi R^2 L. \quad (48)$$

Циркуляция векторов \mathbf{B} и \mathbf{B}' по контуру 1 - 2 - 3 - 4 с учётом $\mathbf{B}' = 0$, поскольку соленоид прямой и длинный, т.е. наличия только вектора \mathbf{B} индукции магнитного поля в вакууме внутри соленоида, направленного вдоль 2 - 3 отрезка a длиной, а также с учётом охвата 1 - 2 - 3 - 4 контуром na проводников, по которым протекает ток I силой: $\int_{1-2-3-4} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 n a I \leftrightarrow B a = \mu_0 n a I \leftrightarrow B = \mu_0 n I \leftrightarrow H = n I$, (49)

где n - количество витков на единицу длины соленоида;
 $B/\mu_0 = H$ - связь модулей B , H векторов \mathbf{B} , \mathbf{H} индукции и напряжённости магнитного поля в вакууме.



Ротация вектора \mathbf{E}_ϵ напряжённости вихревого электрического поля с учётом равенства нулю проекций E_{er} ,

E_{ez} этого вектора на \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_z орты в цилиндрической системе координат и отличия от нуля проекции $E_{e\varphi}$ на \mathbf{e}_φ орт, а также с учётом наличия по OZ оси внутри соленоида вектора

$\mathbf{B} = \mathbf{e}_z \mu_0 n I$ индукции магнитного поля: $[\nabla \mathbf{E}_\epsilon] = -\partial \mathbf{B} / \partial t \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \mathbf{e}_z \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_{e\varphi})}{\partial r} = -\mathbf{e}_z \mu_0 n \frac{\partial I}{\partial t} \leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_{e\varphi})}{\partial r} = -\mu_0 n \frac{\partial I}{\partial t} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \int_0^r d(rE_{e\varphi}) = -\int_0^r \mu_0 n \frac{\partial I}{\partial t} r dr \leftrightarrow rE_{e\varphi} = -\frac{r^2 n \mu_0}{2} \frac{\partial I}{\partial t} \leftrightarrow E_{e\varphi} = -\frac{\mu_0 n r}{2} \frac{\partial I}{\partial t} \leftrightarrow E_{e\varphi} \Big|_{r=R} = -\frac{\mu_0 n R}{2} \frac{\partial I}{\partial t}, \quad (50)$$

где $E_{e\varphi} \Big|_{r=R}$ - проекция на \mathbf{e}_φ орт вектора \mathbf{E}_ϵ напряжённости вихревого электрического поля на боковой поверхности соленоида,

которая отрицательна при $\partial I / \partial t > 0$. Поток Φ_F вектора \mathbf{S}

Пойнтинга сквозь боковую поверхность соленоида

$F = 2\pi RL$ площадью, основаниями которых являются

торцы соленоида, за единицу t времени с учётом $\alpha = 0^\circ$



угла между вектором \mathbf{S} и единичным \mathbf{n} нормальным вектором к этой поверхности, а также с учётом (49), (50):

$$\begin{aligned}\Phi_F &= SF \cos(\mathbf{S} \hat{=} \mathbf{n}) = E_\epsilon H 2\pi RL = (\mu_0 n R/2) (\partial I / \partial t) n l 2\pi RL = \\ &= \mu_0 n^2 I (\partial I / \partial t) \pi R^2 L,\end{aligned}\tag{51}$$

где S - модуль вектора $\mathbf{S} = [\mathbf{E}_\epsilon \mathbf{H}]$ плотности потока энергии электромагнитной волны *Пойнтинга*; E_ϵ, H - модули векторов $\mathbf{E}_\epsilon, \mathbf{H}$ напряжённостей вихревого электрического и магнитного полей.

Равенство (48) и (51) доказывает, что поток вектора *Пойнтинга* за единицу t времени через боковую F поверхность соленоида равен приращению энергии этого соленоида за единицу времени: $\Phi_F = dW_m / dt$. (52)

Дома: Иродов И.Е. Задачи по общей физике.

- М.: Бином, 1998÷2010. №№ 3.243, 3.245

Спасибо за внимание!