V Всероссийский сетевой конкурс «Профессиональный успех–XXI»

Направленность: Презентация в образовательном процессе

Наименование номинации 6.1: Презентация в работе с детьми

Название работы: «Решение стереометрических задач при подготовке к ЕГЭ»

Автор: Груздева Татьяна Александровна,
учитель математики МБОУ Тонкинской СОШ,
Нижегородская область

2015 год

Данная презентация используется на факультативных и элективных занятиях при подготовке выпускников к сдаче ЕГЭ

Цель: Повторить и обобщить материал по теме «Решение стереометрических задач при подготовке к ЕГЭ» и применить полученные знания в практической деятельности при решении задач.

Задачи:

Учебная: Закрепить знания и умение решать стереометрические задачи; применять ранее приобретенные знания к решению геометрических задач.

Развивающая: Развивать математическую логику, креативное мышление, пространственное воображение, навыки самостоятельной и творческой деятельности.

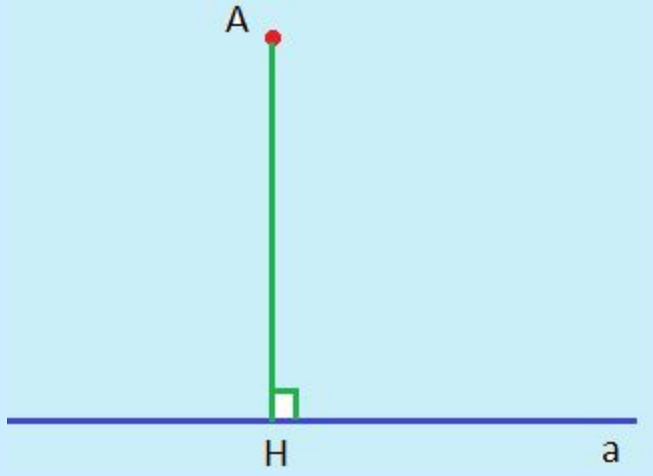
Воспитательная: Воспитывать интерес к предмету, точность и аккуратность в построении чертежа к геометрической задаче.

Презентация отражает следующие вопросы геометрии:

- Расстояние от точки до прямой;
- Расстояние от точки до плоскости;
- Расстояние между двумя прямыми.

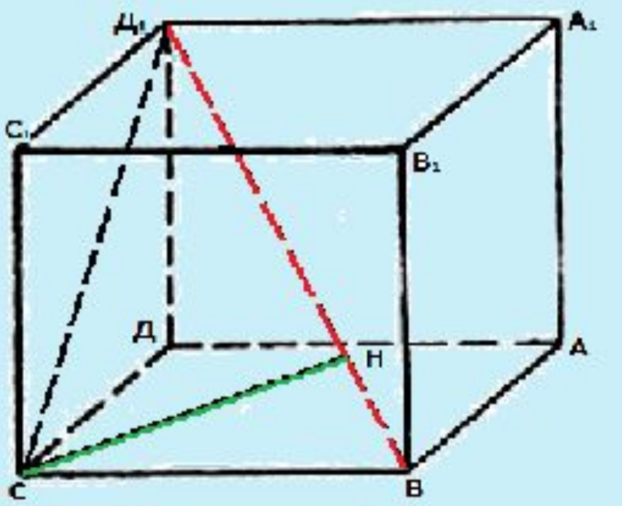
I. Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки до прямой – это длина перпендикуляра, проведённого из данной точки к данной прямой.



Дано: АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$ – куб. АВ = 1.

Найти: Расстояние от точки С до прямой ВД$_1$.



Решение:

1. ΔВСД$_1$– прямоугольный (по теореме о трёх перпендикулярах), ∠Д$_1$СВ – прямой.
2. СН – высота ΔВСД$_1$, значит СВ – среднее пропорциональное между ВН и ВД$_1$, тогда

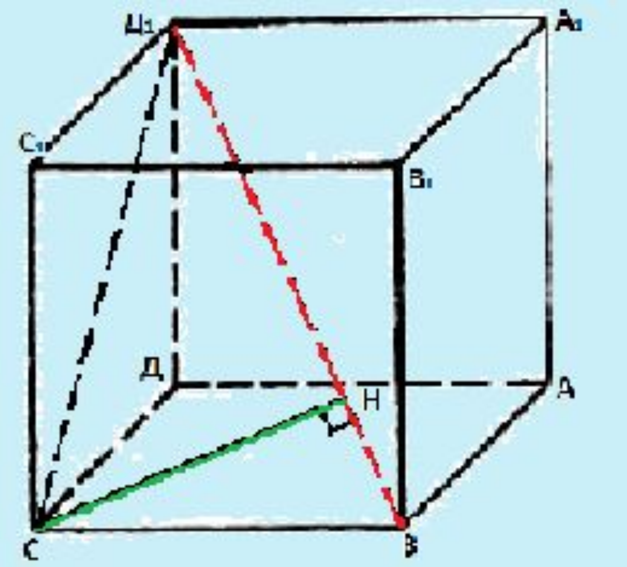
$$\frac{BH}{CB} = \frac{CB}{BД_1}; \quad \frac{BH}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad BH = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Из ΔCHB *получаем*

$$CH = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Ответ: СН = $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

II способ



Н – расстояние от точки С до прямой Д$_1$, поэтому СН – высота треугольника СД$_1$. СН = 2·$S_{\Delta ВСД_1}$: ВД$_1$.

Д$_1$СВ – прямоугольный, т.к. Д$_1$С $\perp$ СВ о теореме о трёх перпендикулярах.

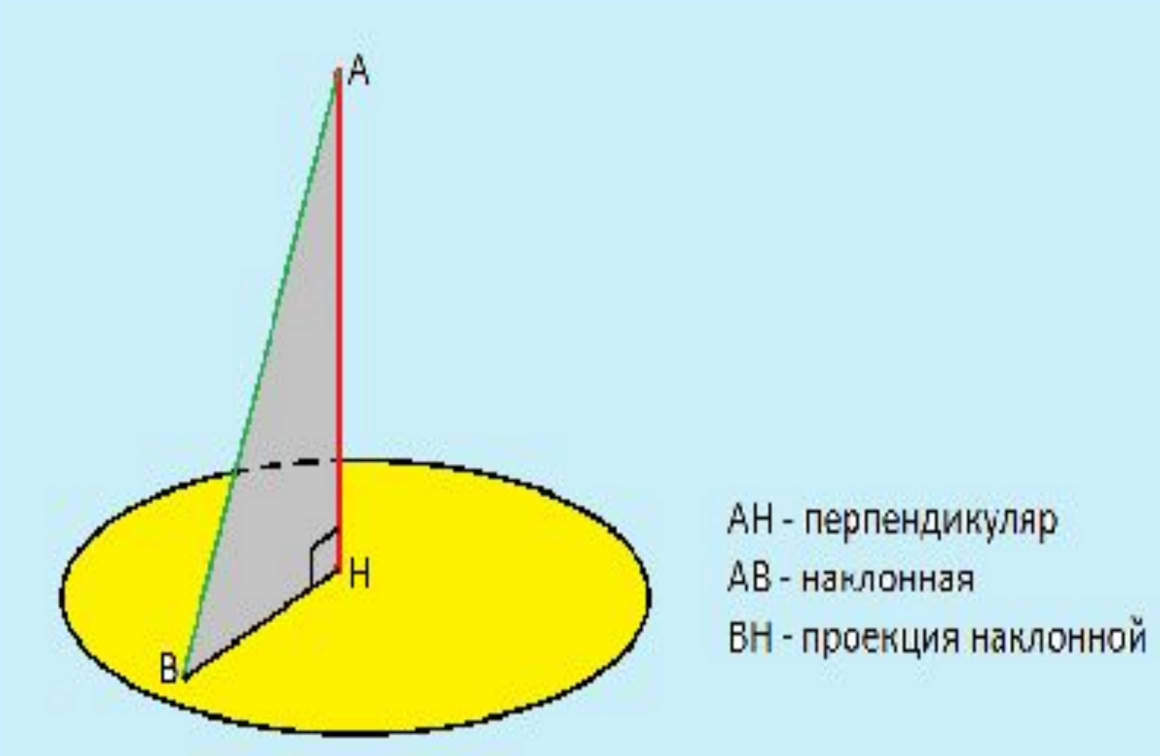
$$S_{\Delta ВСД_1} = \frac{1}{2} BC \cdot СД_1$$

$$BC = 1; \quad СД_1 = \sqrt{2}; \quad \textit{тогда} \quad S_{\Delta ВСД_1} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$BД_1 = \sqrt{3}. \quad \textit{Отсюда} \quad CH = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} : \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

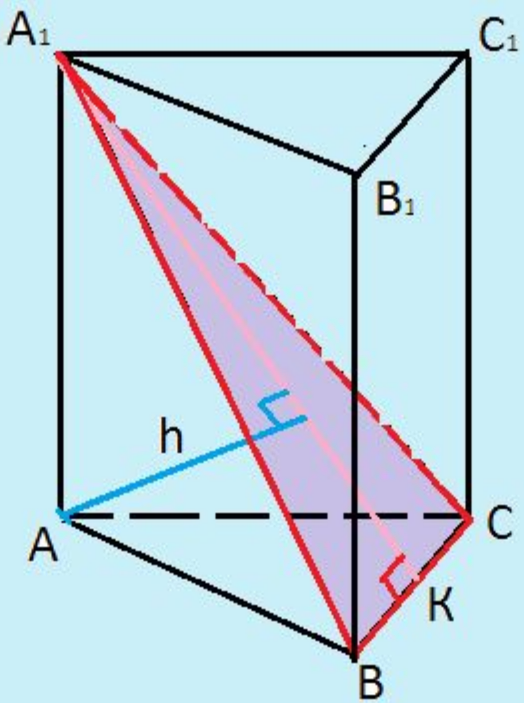
II. Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки до плоскости – это длина перпендикуляра, проведённого из точки А к плоскости.



Задача. **Дано:** $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма, все рёбра равны 1.

Найдите: Расстояние от точки A до плоскости (BCA_1)



h – расстояние от точки A до плоскости (BCA_1), поэтому h – высота пирамиды $ABCA_1$ с основанием BCA_1. $h = \dfrac{3V_{ABCA_1}}{S_{\Delta BCA_1}}$. Пусть основанием пирамиды будет ΔABC, тогда её высота – AA_1.

$$V_{ABCA_1} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1^2\sqrt{3}}{4} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

ΔBCA_1 – равнобедренный, A1K – его высота, тогда

$$S_{\Delta BCA_1} = \frac{1}{2} BC \cdot A_1K; \qquad A_1K = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

$$S_{\Delta BCA_1} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4}. \qquad h = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{12}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Ответ: $h = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$

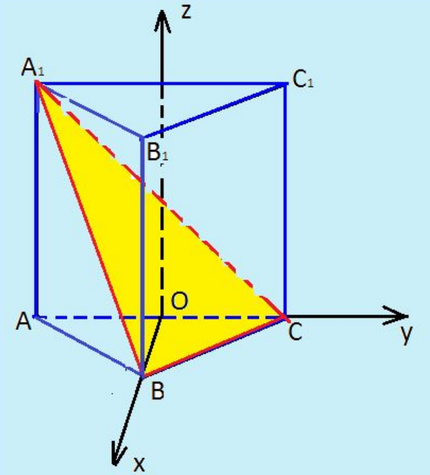
За страницами учебника

Расстояние от точки А до плоскости можно вычислить по формуле:

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad где \quad ax + by + cz + d = 0 -$$

$$уравнение \quad плоскости, \quad A(x_0; y_0; z_0).$$

$$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ 0;\ 0\right),\ C\left(0;\ \frac{1}{2};\ 0\right),\ A_1\left(0;\ -\frac{1}{2};\ 1\right),$$ тогда



$$\overrightarrow{BC}\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2};\ 0\right\};\ \overrightarrow{BA_1}\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2};\ 1\right\}$$

они лежат в плоскости (BCA_1).Рассмотрим $\vec{n}\{a;b;c\}\perp(BCA_1)$ и найдём его координаты.

$\vec{n}\perp\overrightarrow{BC},\quad \vec{n}\perp\overrightarrow{BA_1},$ тогда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}-\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b+0c=0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{1}{2}b+1c=0\end{cases}\qquad \begin{cases}-\sqrt{3}a+b=0\\ -\sqrt{3}a-b+2c=0\end{cases}$$

отсюда $b=\sqrt{3}a,$

$$-\sqrt{3}a-\sqrt{3}a+2c=0,\quad -2\sqrt{3}a+2c=0,\quad 2\sqrt{3}\,a=2c,\quad a=\frac{2c}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}c$$

$$b=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}c=c,\quad \text{тогда}\quad \vec{n}\left\{\frac{\sqrt{3}}{3};\ 1;\ 1\right\}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1(y-0)+1(z-0)=0,\quad \frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{1}{2}+y+z=0\ \ |\cdot 6$$

$2\sqrt{3}+6y+6z-3=0$ – уравнение плоскости (BCA_1), где

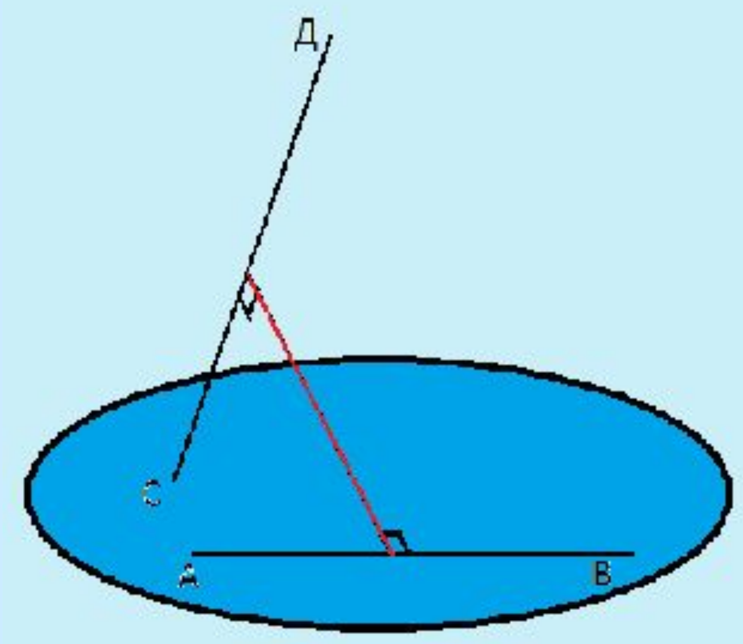
$a=2\sqrt{3},\quad b=6,\quad c=6,\quad d=-3$, тогда

$$h=\frac{|-3-3|}{\sqrt{12+36+36}}=\frac{6}{\sqrt{84}}=\frac{6}{2\sqrt{21}}=\frac{3\sqrt{21}}{21}=\frac{\sqrt{21}}{7}$$

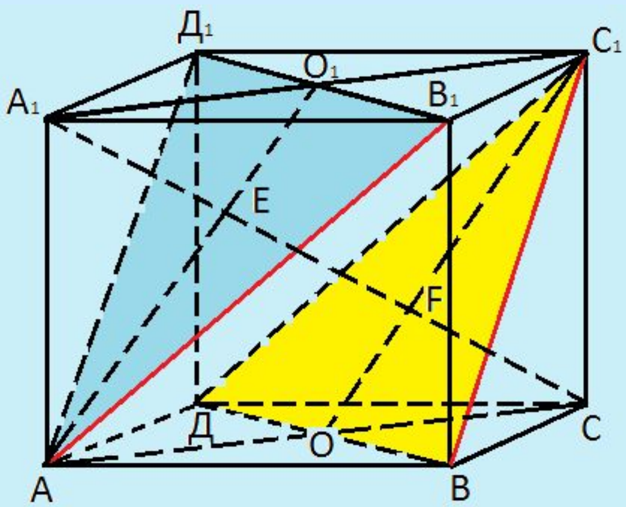
III. Расстояние между двумя прямыми

Расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой, называется расстоянием между скрещивающимися прямыми.

Общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым существует и единственен.



Задача. Дано: $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ – куб. Все его рёбра равны 1. Найдите расстояние между прямыми $АВ_1$ и $ВС_1$.



$$BC_1 \subset (ВДС_1); \quad AB_1 \subset (AB_1Д_1); \quad (ВДС_1) \parallel (AB_1Д_1)$$

следовательно расстояние между скрещивающимися прямыми $ВС_1$ и $АВ_1$ равно расстоянию между соответствующими плоскостями. Диагональ $СА_1$ перпендикулярна этим плоскостям.

$СА_1 \cap (ВДС_1) = F$;

$СА_1 \cap (АД_1В_1) = Е$.

EF – расстояние между $ВС_1$ и $АВ_1$.

В Δ АСЕ отрезок OF ‖ АЕ и проходит через середину отрезка АС, следовательно OF – средняя линия треугольника АСЕ и, значит, EF = FC. Аналогично, $О_1Е$ – средняя линия треугольника $А_1С_1F$

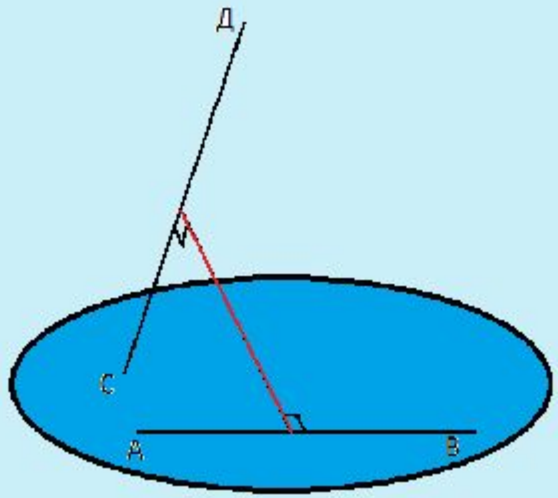
$$A_1E = EF. \text{ Отсюда } EF = \frac{1}{3}CA_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\textit{Ответ}: \ \frac{\sqrt{3}}{3}$$

За страницами учебника

Расстояние между скрещивающимися прямыми можно найти по формуле:

$$d = \frac{\left|\vec{n} \cdot \vec{m}\right|}{\left|\vec{n}\right|}$$



1) $\overrightarrow{AB}\{x_1; y_1; z_1\}$, $\overrightarrow{СД}\{x_2; y_2; z_2\}$;

2) $\vec{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$; $\vec{n} \perp \overrightarrow{СД}$, *тогда*

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{СД} = 0 \end{cases}$$

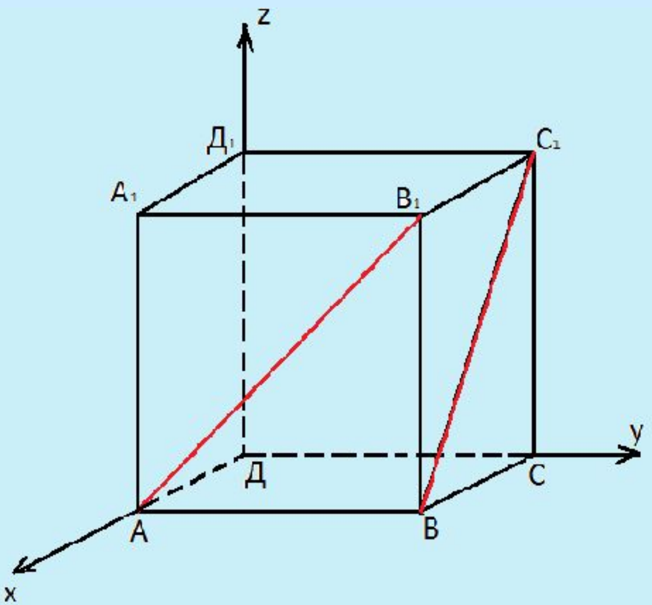
Решая данную систему, находим

координаты $\vec{n}$

3) *Находим координаты вектора* $\vec{m}$, *лежащего в плоскости, отличного от* $\overrightarrow{AB}$, *тогда искомое расстояние*

$$d = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}|}$$

Задача. Дано: АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$ – куб. Все его рёбра равны 1. Найдите расстояние между прямыми АВ$_1$ и ВС$_1$.



1) $A(1;0;0);\quad B_1(1;1;1);\quad \overrightarrow{AB_1}\{0;1;1\}.$

$B(1;1;0);\quad C_1(0;1;1);\quad \overrightarrow{BC_1}\{-1;0;1\}.$

2) *Пусть* $\vec{n}\{a;b;c\};\quad \vec{n}\perp\overrightarrow{AB_1};\quad \vec{n}\perp\overrightarrow{BC_1},$

тогда $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0;\end{cases}\quad \begin{cases}b+c=0\\ -a+c=0\end{cases}$

$b+a=0,\qquad a=-b,\qquad c=-b,$

тогда $\vec{n}\{-b;b;-b\},\qquad \vec{n}\{-1;1;-1\}.$

3) $\overrightarrow{AB}\subset(ABB_1),\qquad A(1,0,0),\qquad B(1,1,0),\qquad \overrightarrow{AB}\{0,1,0\}.$

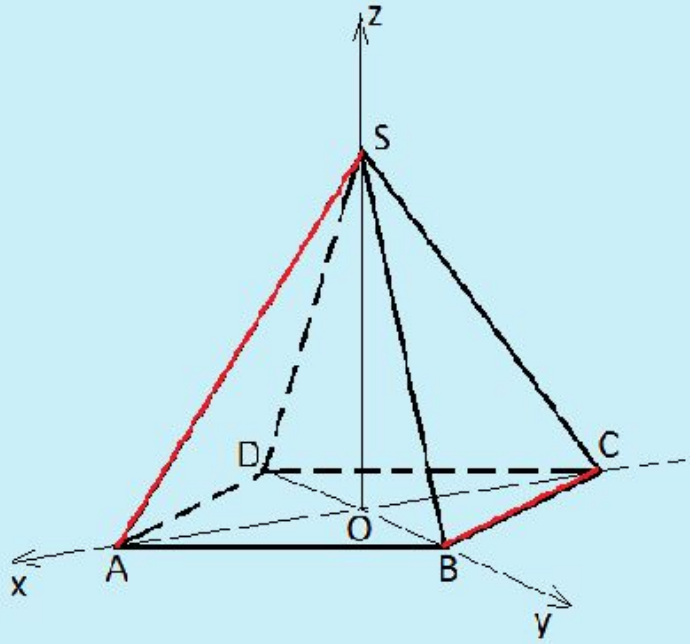
4) Отсюда $d=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{|-1\cdot0+1\cdot1-1\cdot0|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt3}=\dfrac{\sqrt3}{3}.$

Ответ : $\dfrac{\sqrt3}{3}$

Задача 2.

Дано: SABCD – правильная четырёхугольная пирамида, все рёбра которой равны 1.

Найдите: Расстояние между прямыми AS и BC.



1) $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2};0;0\right);\quad S\left(0;0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\quad \overrightarrow{AS}\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

$B\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2};0\right);\quad C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0;0\right);\quad \overrightarrow{CB}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};0\right\}$

2) $\vec{n}\{a;b;c\},\quad \vec{n}\perp\overrightarrow{AS};\quad \vec{n}\perp\overrightarrow{CB},$ тогда

$$\begin{cases}-\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}c=0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}b=0\end{cases}\qquad \begin{cases}a-c=0\\ a+b=0\end{cases}$$

$b+c=0,\quad b=-c,\quad a=c,\quad \vec{n}\{1;-1;1\}$

3) $\overrightarrow{SB}\subset(SBC);\quad \overrightarrow{SB}\left\{0;\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

4) $$d=\frac{\left|0\cdot 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-1)-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{\left|-\sqrt{2}\right|}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ : $\frac{\sqrt{6}}{3}$

Литература:

- Геометрия 10 – 11 классы. Учебник для общеобразовательных учреждений. Базовый и профильный уровни. Авторы: Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б.Кадомцев, Л.С.Киселева, Э.Г.Позняк Москва «Просвещение» 2013 год
- Избранные вопросы профильного и предпрофильного курса математики. Авторы: И.Г. Малышев, М.А. Минчасова, Б.Н.Иванов. Нижний Новгород Нижегородский гуманитарный центр, 2007 год
- ЕГЭ 2011 Математика Задача С2 Геометрия Стереометрия Под редакцией А.Л.Семенова и И.В. Ященко Москва Издательство МЦНМО 2011