ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ТЕПЛОПЕРЕДАЧЕ

Теплопроводность - когда неравномерно нагретые тела находятся в соприкосновении и неподвижны относительно друг друга.
Конвективный теплообмен- если среда движется относительно поверхности твердого тела, имеющей температуру, отличную от температуры среды.
Теплообмен излучением- тепловая энергия передается в форме электромагнитных волн или фотонов.

Общие для всех видов теплопередачи вопросы:

- Как распределены в пространстве и как изменяются во времени значения температуры в различных (в принципе — во всех) точках рассматриваемой термодинамической системы?
- Какое количество теплоты передается от системы в целом и от любой, сколь угодно малой части ее поверхности, в окружающую среду?

Итак, **теория теплопередачи основана на первом и втором началах термодинамики и на ограниченном числе феноменологических гипотез**, т. е., в отличие от равновесной термодинамики, не является вполне строгой теорией.

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Основные понятия и определения

Теплопроводность — молекулярный перенос теплоты в сплошной среде, обусловленный неравномерностью распределения температуры в различных ее областях**.**

В теории теплопроводности не рассматривают природу передачи теплоты в той или иной материальной среде. При таком подходе физические особенности среды характеризуют эмпирическими величинами — **теплофизическими свойствами.**

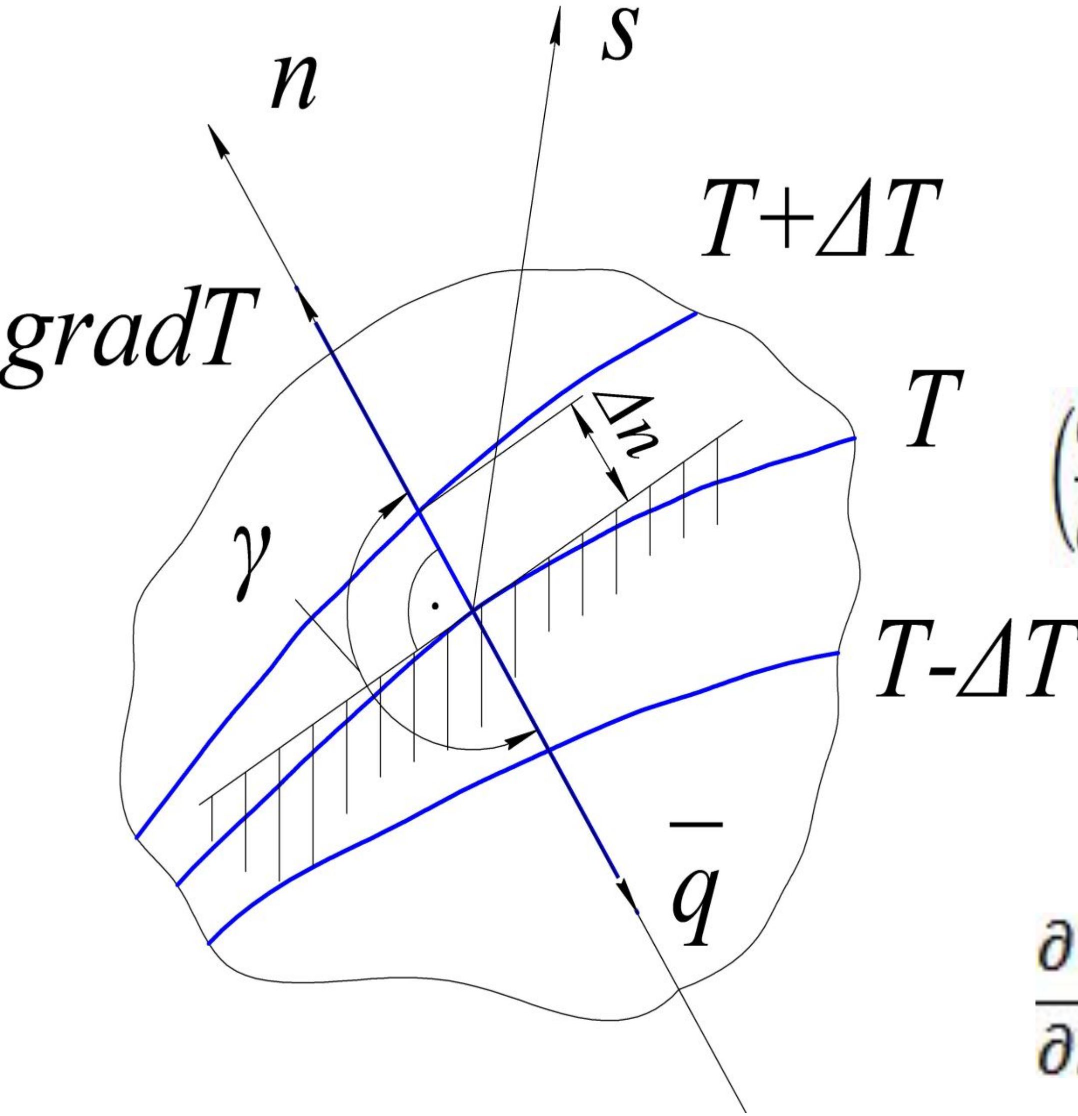
Распределение температуры в теплопроводящей среде характеризует так называемое **поле температуры**

$$T = T(x,y,z, \tau),$$

Если процесс теплопроводности не зависит от времени t, то поле температуры называют **стационарным**, а функцию T=T(x,y,z) — **уравнением стационарного поля температуры**. В противном случае поле и его уравнение называют **нестационарными**.

Если температура меняется вдоль одной или двух координат, то говорят об одномерном или двумерном поле температуры. Так, T(x, τ) — нестационарное одномерное, а T(x,y)— стационарное двумерное поле температуры.

Если мысленно соединить все точки среды, температура в которых одинакова, то такое геометрическое место точек образует **изотермическую поверхность**



Изотермические поверхности

Максимальное значение производной называют **градиентом температуры**.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_{max} = \lim_{\Delta n \to 0}\left(\frac{\Delta T}{\Delta n}\right) = \vec{n}\frac{\partial T}{\partial n} = gradT$$

$$\frac{\partial T}{\partial S} = \frac{\partial T}{\partial n}\cos(\overrightarrow{n},\vec{s}) \le \frac{\partial T}{\partial n}$$

Количество теплоты, проходящее через произвольную поверхность в единицу времени, назовем **тепловым потоком**:

$$Q = dQ_\tau / d\tau, Bm$$

тепловой поток определяется в расчете на единицу площади поверхности dF - **плотность теплового потока**

$$q = \frac{dQ}{dF} = \frac{d^2 Q_\tau}{d\tau dF}, \text{В т/м}^2$$

$$\vec{q} = \vec{i} q_x + \vec{j} q_y + \vec{k} q_z$$

частных случаях $Q = \frac{Q_\tau}{\tau}$ $q = \frac{Q}{F}$

Гипотеза Био-Фурье

Количество теплоты d^2Q_τ проходящее через любую изотермическую поверхность в сторону уменьшения температуры, должно быть прямо пропорционально времени $d\tau$ площади поверхности ***dF***, разности температур ΔT между "соседними" изотермами и обратно пропорционально расстоянию между ними Δn .

$$d^2Q_\tau = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta n} dF d\tau \qquad \Delta T > O, d^2Q_\tau < O$$

Ж.-Б. Фурье предположил что при Δn >0

$$\frac{d^2Q_\tau}{dFd\tau} = \vec{q} = -\lambda gradT$$

Это соотношение называют **законом Фурье**

Гипотеза Био-Фурье

Теплопроводность численно равна плотности теплового потока при градиенте температуры, равном единице

Теплопроводность меняется в широких пределах:

0,006-0,6 Вт/(мК) — для газов,

0,07.. .0,7 Вт/(мК — для жидкостей,

0,04... 10 Вт/(мК) — для неметаллов,

8.. .425 Вт/(мК) — для металлических материалов

Дифференциальное уравнение теплопроводности

Первое начало для среды объемом V запишем в виде

$$Q_v - Q_F = \Delta H - \int_p V dp$$

Qv — количество теплоты, выделяемое (поглощаемое) внутренними источниками (стоками), имеющими мощность q_v^2

Q_F — количество теплоты, переданное через поверхность среды F;

ΔH— изменение энтальпии среды;

p — давление в объеме V

Дифференциальное уравнение теплопроводности

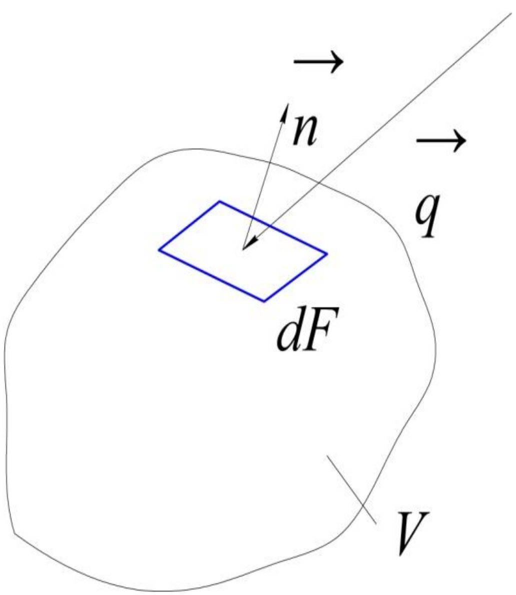
$$Q_v - Q_F = \Delta H$$

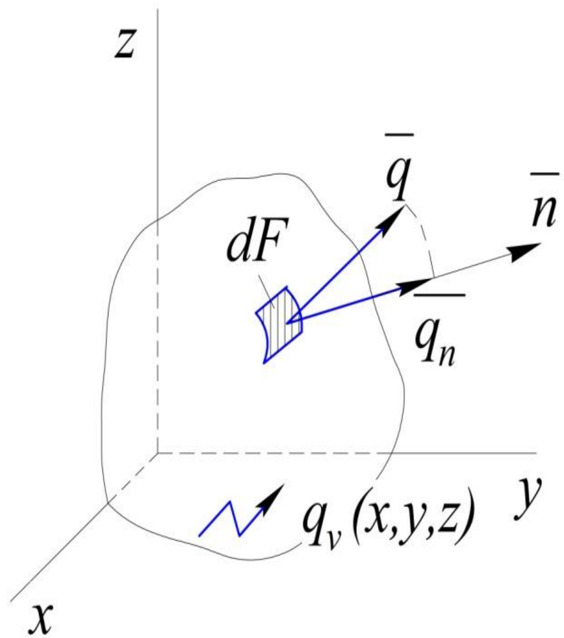
При $p = const,\ dp = 0$

Второе начало применительно к процессу теплопроводности

$$\cos\gamma = \cos(\vec{q}, gradT) < 0$$

$$\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{3\pi}{2}$$





$$q_n = |q|\cos(\overrightarrow{q}, \vec{n}).$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности

$$q_n = q_x \cos(\overrightarrow{n}, \vec{x}) + q_y \cos(\overrightarrow{n}, \vec{y}) + q_z \cos(\overrightarrow{n}, \vec{z})$$

Теплота Q_F, подведенная через всю поверхность среды F за время τ

$$Q_F = \iint\limits_{F\,\tau} q_n dF d\tau.$$

$$Q_F = \iint\limits_{F\,\tau} \left[q_x \cos(\overrightarrow{n}, \vec{x}) + q_y \cos(\overrightarrow{n}, \vec{y}) + q_z \cos(\overrightarrow{n}, \vec{z})\right] dF d\tau$$

$$= -\iint\limits_{F\,\tau} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \cos(\overrightarrow{n}, \vec{x}) + \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \cos(\overrightarrow{n}, \vec{y}) + \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \cos(\overrightarrow{n}, \vec{z})\right] dF d\tau$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности

Применим к этому интегралу теорему Остроградского-Гаусса

$$Q_F = -\iint \left[\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\cos(\vec{n},\vec{x}) + \lambda\frac{\partial T}{\partial y}\cos(\vec{n},\vec{y}) + \lambda\frac{\partial T}{\partial z}\cos(\vec{n},\vec{z})\right] dF d\tau$$

$$= -\iint_{V\,\tau} \left[\frac{\partial T}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \lambda\frac{\partial T}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \lambda\frac{\partial T}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right] dV d\tau =$$

$$= -\iint_{V\,\tau} \left[\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)\right] dV d\tau = -\iint_{V\,\tau} \lambda\nabla^2 T\, dV d\tau$$

Где $\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ оператор Лапласа в

декартовых координатах *x, y, z*.

Дифференциальное уравнение теплопроводности

Действие внутренних источников мощностью *qv* обеспечит вы

$$Q_V = \iint\limits_{V\,\tau} q_v \, dV d\tau,$$

изменение энтальпии среды

$$\Delta H = \iint\limits_{V\,\tau} \frac{\partial H}{\partial \tau} dV d\tau = \iint\limits_{V\,\tau} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} dV d\tau,$$

Подставляя в исходное уравнение Q_F, Q_V и ΔH

$$\iint\limits_{V\,\tau} q_v dV d\tau + \iint\limits_{V\,\tau} \lambda \nabla^2 T dV d\tau = \iint\limits_{V\,\tau} \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} dV d\tau,$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \nabla^2 T + q_V$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \nabla^2 T + \frac{q_V}{\rho c}$$

$$a = \frac{\lambda}{\rho c}, \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$$

температуропроводность среды величина, которая характеризует ее тепловую инерционность

уравнение в частных производных параболического типа, его называют **дифференциальным уравнением теплопроводности**, или дифференциальным уравнением Фурье

Дифференциальное уравнение теплопроводности

В стационарных задачах теплопроводности $\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$

$$\nabla^2 T + \frac{q_V}{\lambda} = 0$$

для областей с осевой симметрией удобно использовать цилиндрические координаты

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{q_V}{\rho c}$$

Условия однозначности

Начальное условие описывает поле температуры в момент времени $\tau = 0$

$$T(x, y, z, 0) = T(x, y, z)$$

Иногда используют приближенное соотношение

$$T(x, y, z, 0) = \lim_{\tau \to 0} T(x, y, z, \tau).$$

Граничные условия $\Gamma \in F$ всех случаях $\tau \geq 0$

Граничные условия I рода (условия Дирихле)

$$T(\Gamma, \tau) = T_\Gamma(\Gamma, \tau)$$

Граничные условия II рода $$-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\Gamma} = q_{\Gamma}(\Gamma, \tau)$$

Принимают $q_{\Gamma} > 0$ при охлаждении среды и $q_{\Gamma} < 0$ — при нагреве

Граничные условия III рода (условия Ньютона)

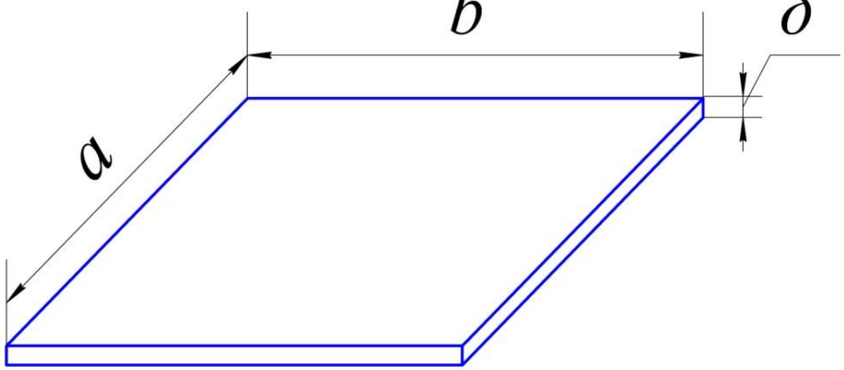
$$-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\Gamma} = \alpha\left(T_f - T_w\right) \qquad q = \alpha\left(T_f - T_w\right)$$

Граничные условия IV

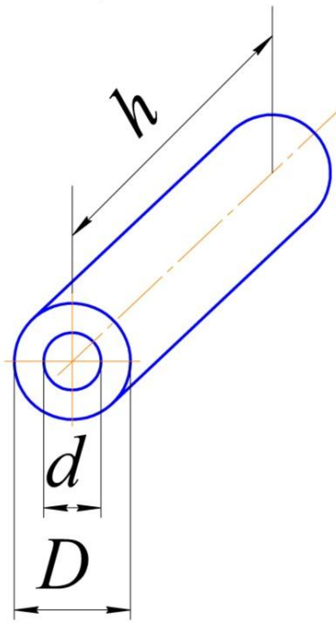
$$\lambda_1\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\Gamma=0} = \lambda_2\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\Gamma=0}; \; T_{\Gamma-0} = T_{\Gamma+0}$$

Модели тел в задачах теплопроводности

а)



б)



обобщенный размер

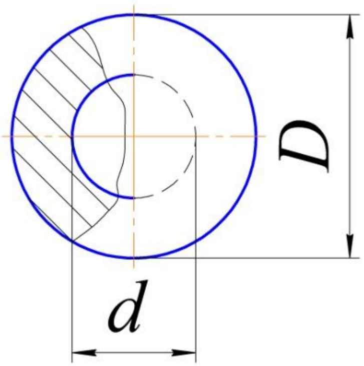
$$R = \frac{V}{F}.$$

Для пластины

$$V = V_p$$

$$F = F_p$$

в)



$$b >> \delta$$

$$h >> \delta$$

$$R_p = \frac{V_p}{F_p} = \frac{bh\delta}{2bh} = \frac{\delta}{2}$$

Модели тел в задачах теплопроводности

Для сплошного цилиндра при $V = V_c$, $F = F_c$ $l >> D$

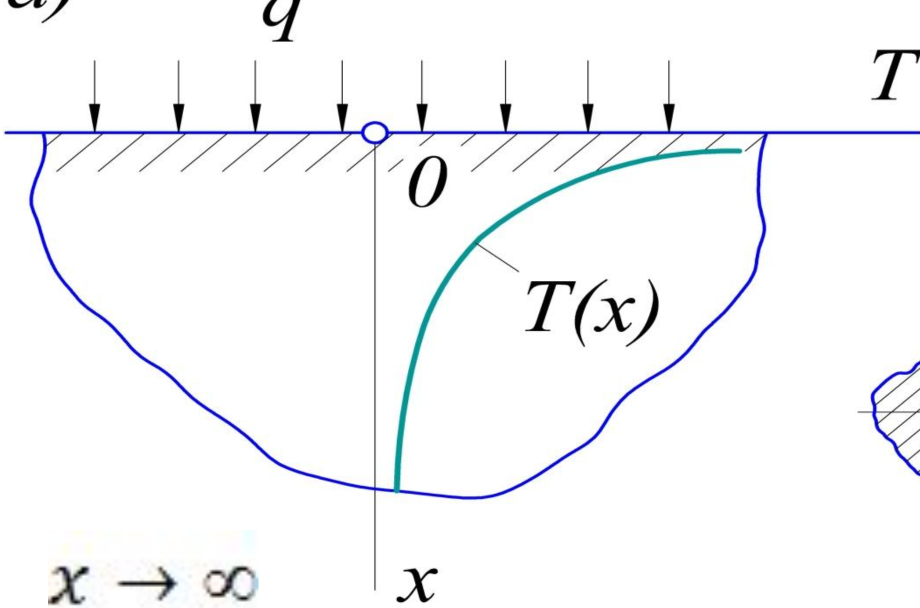
$$R_c = \frac{V_c}{F_c} = \frac{\pi \frac{D^2}{4} l}{\pi D l} = \frac{D}{4}$$

Для сплошного шара *при* $V = V_b$, $F = F_b$

$$R_b = \frac{V_b}{F_b} = \frac{\pi \frac{D^3}{6}}{\pi D^2} = \frac{D}{6}$$

Модели тел в задачах теплопроводности

а) **полуограниченное тело**



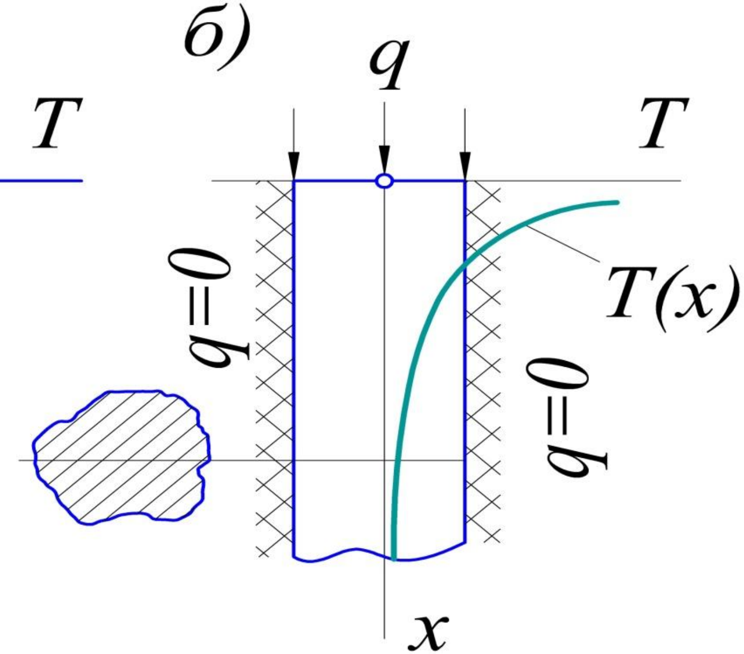
$x \to \infty$

градиент температуры

$$\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x \to 0} = 0$$

Температура $T(x, \tau) = To$

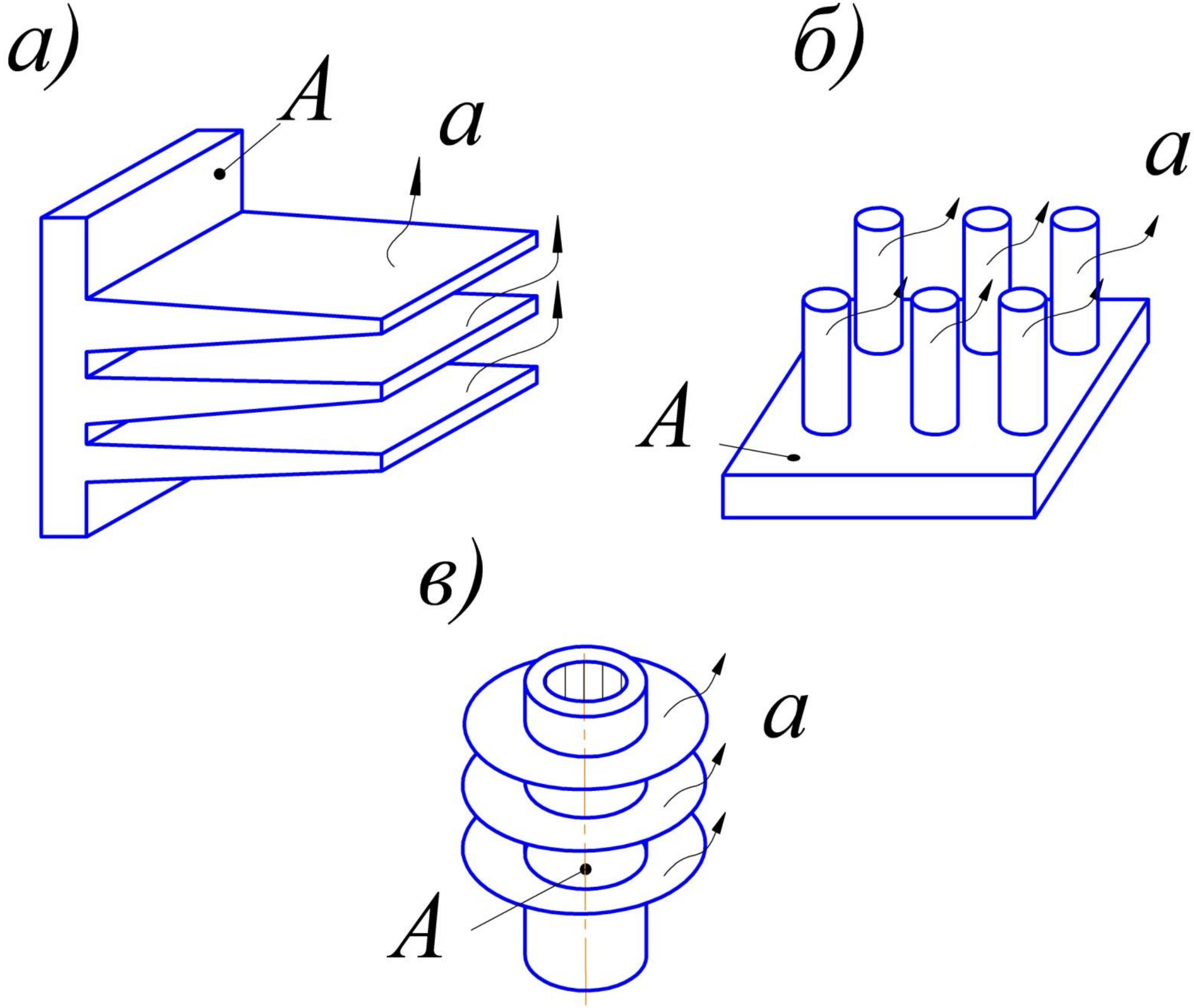
б)



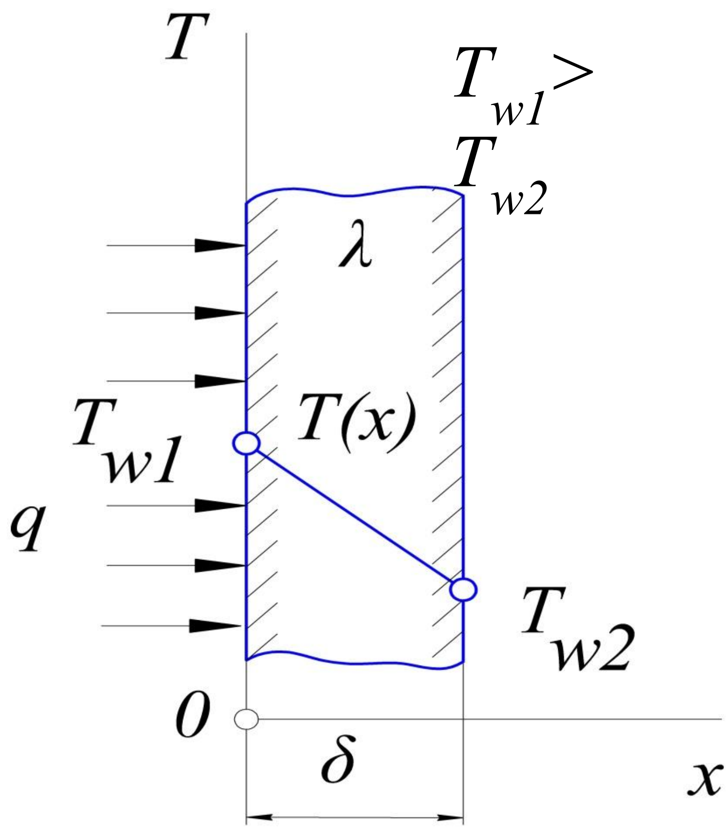
полуограниченный стержень

$x > 0$ $\qquad$ $q = 0$

Модели тел в задачах теплопроводности



Теплопроводность пластин и оболочек



стационарная одномерная задача теплопроводности при граничных условиях I рода

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \\ T_{x=0} = T_{w1} \\ T_{x=\delta} = T_{w2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = C_1$$

$$T = Q_x + C_2$$

При $x = 0$ $\quad T_{w1} = C_2$

при $x = \delta$ $\quad T_{w2} = C_1 + T_{w1}$

$$C_1 = \frac{T_{w2} - T_{w1}}{\delta}$$

$$T = \frac{T_{w2} - T_{w1}}{\delta} x + T_{w1}$$

Теплопроводность пластин и оболочек

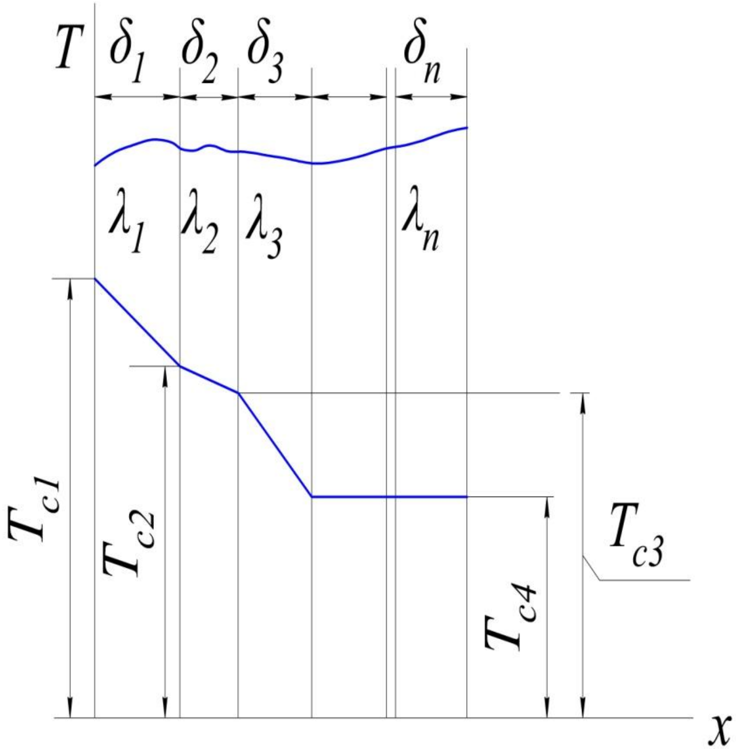
T(x) задана , то плотность теплового потока

$$q = \lambda \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\delta}$$

$\frac{\delta}{\lambda} = R_\lambda$ -внутреннее термическое сопротивление

$$q = \frac{T_{w1} - T_{w2}}{R_\lambda}$$

Теплопроводность пластин и оболочек

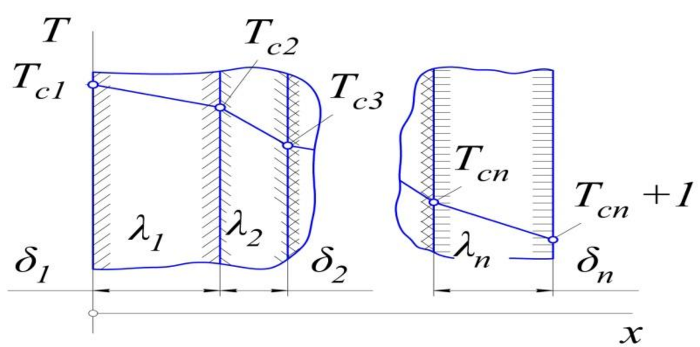


$$q = \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\delta_1 / \lambda_1};$$

$$q = \frac{T_{w2} - T_{w3}}{\delta_2 / \lambda_2};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q = \frac{T_{wn} - T_{wn+1}}{\delta_n / \lambda_n}$$



$$T_{w1} - T_{w2} = \frac{q\delta_1}{\lambda_1}; \quad T_{w2} - T_{w3} = \frac{q\delta_2}{\lambda_2};$$

$$T_{wn} - T_{wn+1} = \frac{q\delta_n}{\lambda_n};$$

Теплопроводность пластин и оболочек

$$T_{w1} - T_{wn+1} = q\left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \cdots + \frac{\delta_n}{\lambda_n}\right) = q(R_{\lambda 1} + R_{\lambda 2} + R_{\lambda n});$$

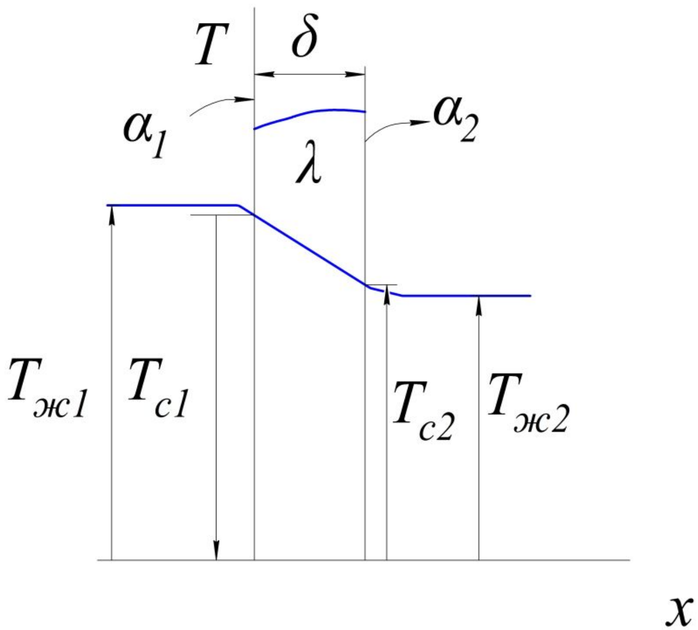
$$q = \frac{T_{w1} - T_{wn+1}}{R_{\lambda 1} + R_{\lambda 2} + R_{\lambda n}}$$

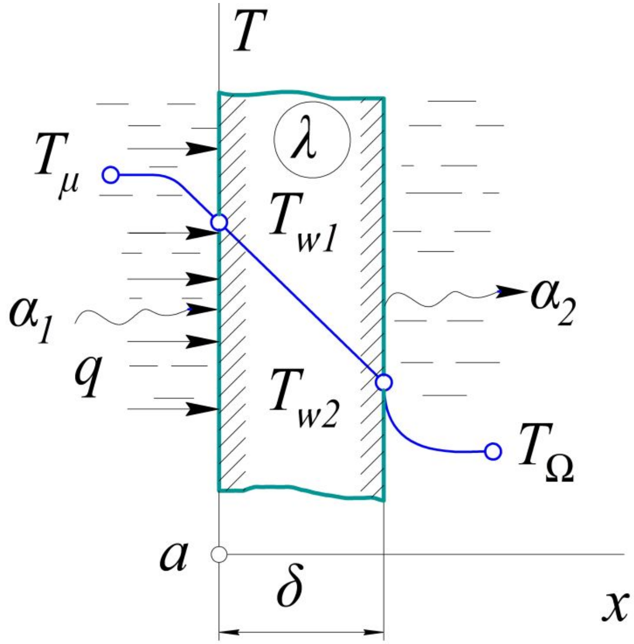
Суммарное внутреннее термическое сопротивление

$$R_{\lambda 1} + R_{\lambda 2} + \cdots + R_{\lambda n} = R_{\lambda \Sigma}$$

аналогия с сопротивлением электрических цепей постоянного тока: суммарное сопротивление последовательно соединенных проводников равно сумме составляющих

Теплопроводность пластин и оболочек





$T_{f1} > T_{f2}$

на левой границе

$$q\big|_{x=0} = \alpha_1 (T_{f1} - T_{w1})$$

правой границе

$$q\big|_{x=\delta} = \alpha_1 \left(T_{w2} - T_{f2}\right)$$

внутри пластины

$$q\big|_{0<x<\delta} = \frac{(T_{w1} - T_{w2})}{\dfrac{\delta}{\lambda}}$$

$$q = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{\delta}{\lambda} + \dfrac{1}{\alpha_2}} = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{R_{\alpha 1} + R_\lambda + R_{\alpha 2}},$$

Теплопроводность пластин и оболочек

где $R_{\alpha 1} = \frac{1}{\alpha_1}, R_{\alpha 2} = \frac{1}{\alpha_2}$ — внешние термические сопротивления

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$$

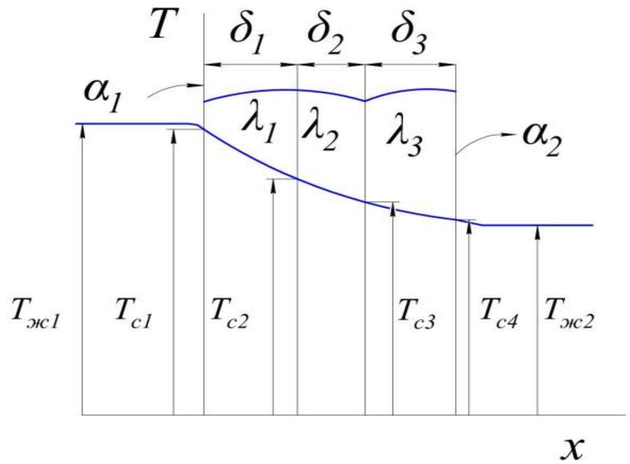
-коэффициент теплопередачи

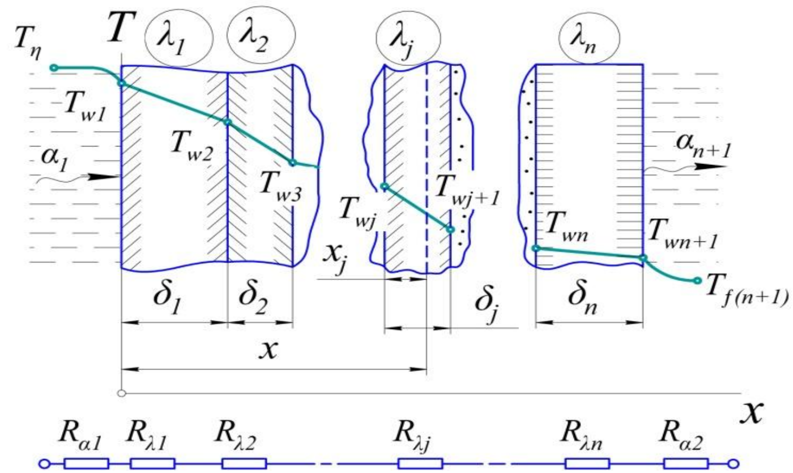
Величина $\frac{1}{k} = R_k$

$$R_k = R_{\alpha 1} + R_{\lambda} + R_{\alpha 2}$$

Распределение температур в многослойной пластине при граничных условиях III рода в пределах каждого слоя остается линейным, а в жидкости или газе вблизи границ пластины приобретает нелинейный характер

Теплопроводность пластин и оболочек





плотность теплового потока

$$q = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\dfrac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\delta}{\lambda} + \dfrac{1}{\alpha_2}} = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{R_k} = k\left(T_{f1} - T_{f2}\right).$$

Теплопроводность пластин и оболочек

температура в произвольном сечении пластины $0 < x < \delta$

При q=idem

$$\begin{cases} T_{f1} - T_{w1} = \dfrac{q}{\alpha_1}; \\ T_{w1} - T_{w2} = \dfrac{q\delta_1}{\lambda_1}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots. \\ T_{wn} - T_{wn+1} = \dfrac{q\delta_n}{\lambda_n}; \\ T_{wn+1} - T_{f2} = \dfrac{q}{\alpha_{n+1}}. \end{cases}$$

Температуры на границах слоев

$$T_{w1} = T_{f1} - q\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)$$

$$T_{w2} = T_{f1} - q\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1}\right)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$T_{wn+1} = T_{f1} - q\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n}\right);$$

$$T_{fn+1} = T_{f1} - q\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} + \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right)$$

Теплопроводность пластин и оболочек

Пусть сечение x находится в j-м слое стенки

расстояние от этого сечения до границы с температурой T_{wj}

$$x_j = x - (\delta_1 + \cdots + \delta_{i-1})$$

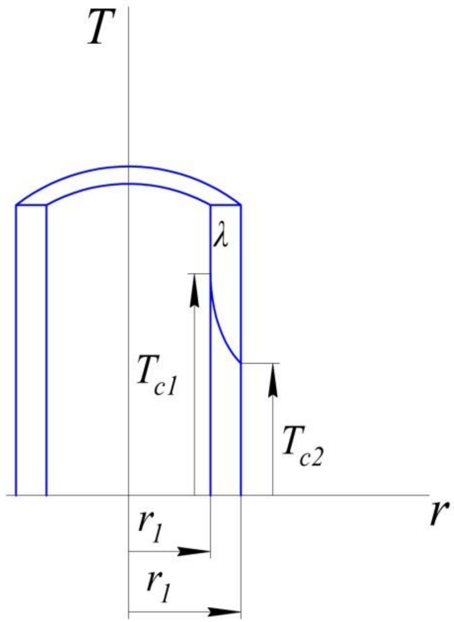
$$T(x) = T_{f1} - q\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \cdots + \frac{\delta_{j-1}}{\lambda_{j-1}} + \frac{x_j}{\lambda_j}\right)$$

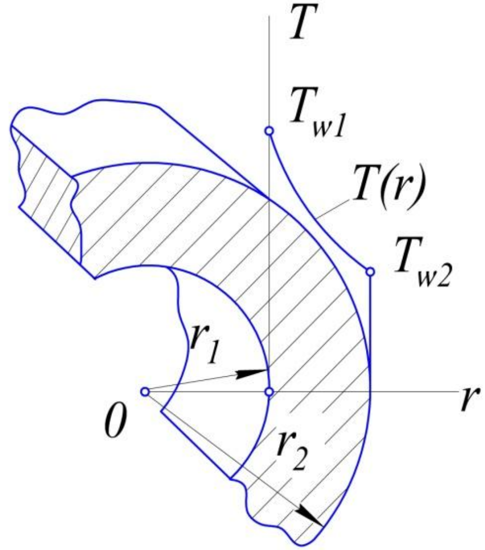
если расчет начинать не с T_{f1}, а с T_{f2} перед q поставить знак

«+», а все члены суммировать в обратном порядке.

Теплопроводность цилиндрической стенки

при граничных условиях I рода





$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial r} = 0 \\ T_{r=r1} = T_{w1} \\ T_{r=r2} = T_{w2} \end{cases}$$

Введем новую переменную $U = \dfrac{\partial T}{\partial r}$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{\partial U}{\partial r}; \ \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{U}{r}; \ \frac{\partial U}{\partial r} + \ \frac{U}{r} = 0;$$

Теплопроводность цилиндрической стенки

разделим переменные и проинтегрируем

$$\ln U + \ln r = C_1$$

$$\partial T = C_1 \frac{\partial r}{\partial r}$$

$$T = C_1 \ln r + C_2.$$

при $r=r_1$ $T=T_{w1}$ $T_{w1}=C_1 lnr_1+C_2$

при $r=r_2$ $T=T_{w2}$ $T_{w2}=C_2 lnr_2+C_2$

$$C_1 = \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)};$$

$$C_2 = T_{w1} - (T_{w1} - T_{w2}) \frac{\ln r_1}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}$$

$$T(r) = T_{w1} - (T_{w1} - T_{w2}) \frac{ln\, {}^{r}/_{r_1}}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}$$

Теплопроводность цилиндрической стенки

тепловой поток

$$Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} 2\pi r l$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{C_1}{r} = \frac{(T_{w1} - T_{w2})}{r \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)},$$

$$Q = \frac{2\pi\lambda l (T_{w1} - T_{w2})}{r \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}$$

плотность теплового потока

$$q_1 = \frac{Q}{2\pi r_1 l} = \frac{(T_{w1} - T_{w2})}{\left(\frac{r_1}{\lambda}\right) \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)},$$

$$q_2 = \frac{Q}{2\pi r_2 l} = \frac{(T_{w1} - T_{w2})}{\left(\frac{r_2}{\lambda}\right) \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)},$$

Линейная плотность теплового потока

$$q_l = \frac{Q}{l} = \frac{\pi (T_{w1} - T_{w2})}{\left(\frac{1}{2\lambda}\right) \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)},$$

$$q_l = 2\pi r_1 l = 2\pi r_2 l, \qquad Вт/м,$$

Теплопроводность цилиндрической стенки

Для n-слойной цилиндрической стенки

$$q_l = \frac{\pi(T_{w1} - T_{w2})}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\lambda_i} \ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)}$$

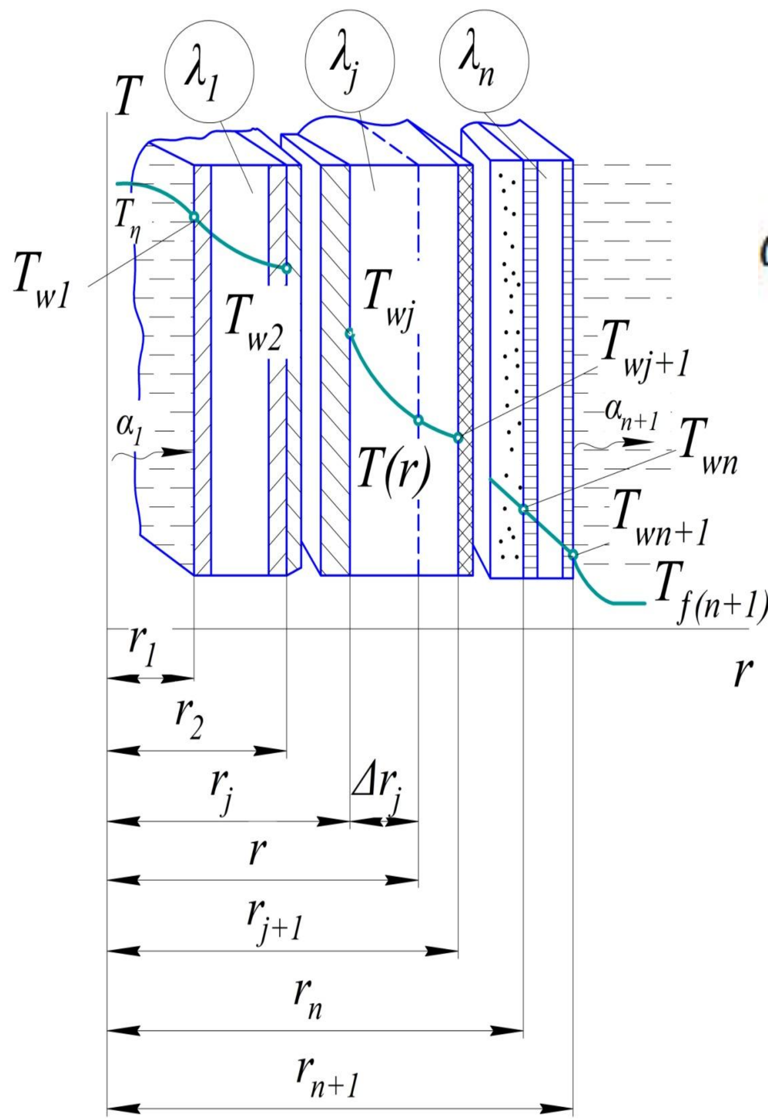
линейное внутреннее термическое сопротивление i-го слоя

$$R_{l\lambda i} = \frac{1}{2\lambda} \ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)$$

суммарным линейным внутренним термическим сопротивлением многослойной цилиндрической стенки

$$R_{l\lambda i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\lambda_i} \ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)$$

Теплопроводность цилиндрической стенки



Для граничных условий III рода

$$q_l = \frac{\pi\left(T_{f1} - T_{f(n+1)}\right)}{\frac{1}{2\alpha_1 r_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\lambda_i} \ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right) + \frac{1}{2\alpha_{n+1} r_{n+1}}}$$

линейные внешние термические сопротивления

$$\frac{1}{2\alpha_1 r_1} = R_{l\alpha 1}, \quad \frac{1}{2\alpha_{n+1} r_{n+1}} = R_{l\alpha 2}$$

$$q_l = k_l\left(T_{f1} - T_{f(n+1)}\right),$$

Теплопроводность цилиндрической стенки

линейный коэффициент теплопередачи

$$k_l = \frac{1}{\frac{1}{2\alpha_1 r_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\lambda_i} \ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right) + \frac{1}{2\alpha_1 r_{n+1}}} = \frac{1}{R_{l\alpha 1} + R_{l\lambda \Sigma} \quad + R_{l\alpha n+1}}$$

полное линейное термическое сопротивление

$$\frac{l}{k_l} = R_{lk},$$

Теплопроводность цилиндрической стенки

Если расчет ведут для плотностей теплового потока

$$q_1 = k_1\left(T_{f1} - T_{f2}\right)$$

Где k_1 и k_2 коэффициенты

и

теплопередачи, Вт/(м^2 К)

$$q_2 = k_2\left(T_{f1} - T_{f2}\right)$$

рассчитанные для соответствующих поверхностей однородного цилиндра

$$k_l = 2r_1k_1 = 2r_2k_2$$

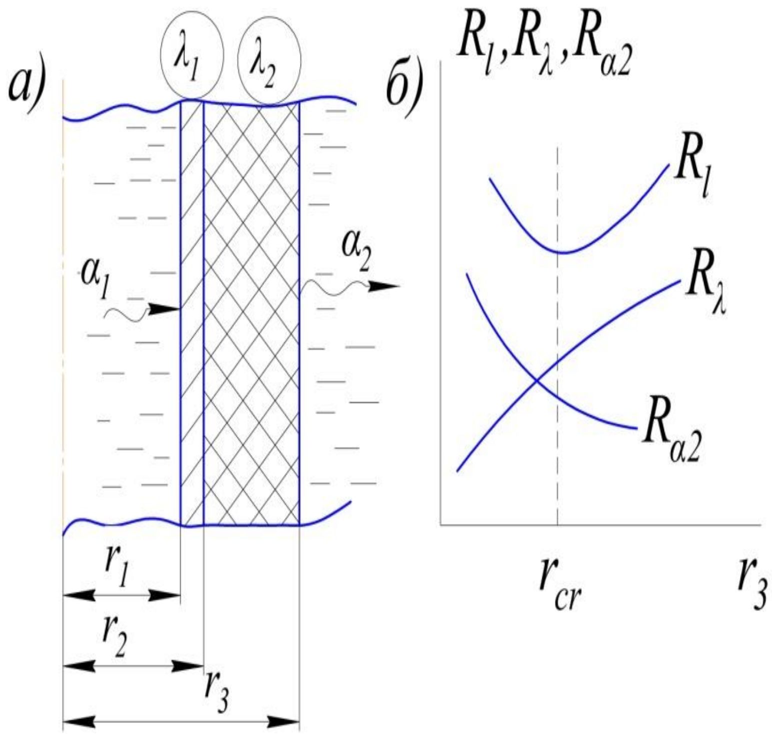
Температура на радиусе r, отдаленном на расстояние Δr_j

$$T(r) = T_{f1} - \frac{q_l}{\pi}\left[\frac{1}{2\alpha_1 r_1} + \sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{2\lambda_i}\ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right) + \frac{1}{2\lambda_j}\ln\left(r_j + \frac{\Delta r_j}{r_j}\right)\right], K.$$

Критический диаметр тепловой изоляции

При граничных условиях III рода

$$R_l = \frac{1}{2\alpha_1 r_1} + \frac{1}{2\lambda_1}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{2\lambda_2}\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{2\alpha_2 r_3}$$



При постоянных и заданных

$$\alpha_1, r_1, \alpha_2, \lambda_1$$

R_l будет зависеть только от r_3

$$R_{\alpha 1} = \frac{1}{2\alpha_1 r_1} \; и \; R_{\lambda 1} = \frac{1}{2\lambda_1}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Критический диаметр тепловой изоляции

$$R_{\lambda 2} = \frac{1}{2\lambda_2} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)$$ увеличивается

$$R_{\alpha 2} = \frac{1}{2\alpha_2 r_3}$$ уменьшается

Исследуем R_l на экстремум по аргументу r_3

$$\frac{dR_l}{d\mathrm{r}_3} = \frac{1}{4\alpha_2 r_3^2} = 0;$$

Критический диаметр тепловой изоляции

$$r_{cr} = (r_3)_{max} = \frac{\lambda_2}{\alpha_2}$$

$2r_{cr}$ **критический диаметр** тепловой изоляции

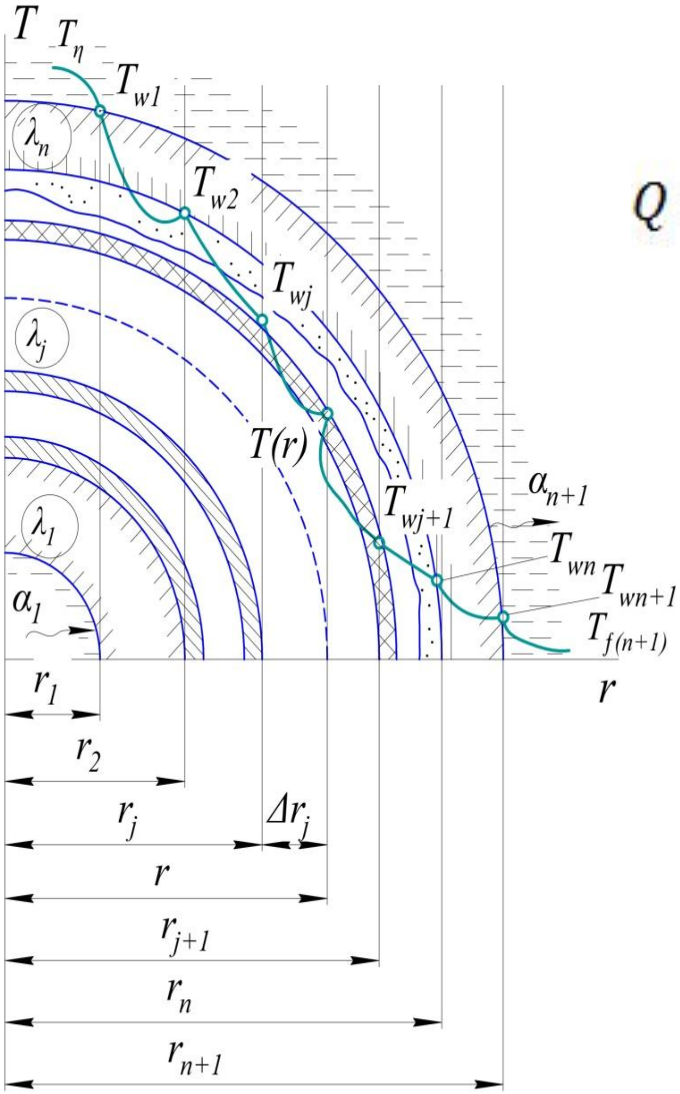
вывод

Если $r_3 < r_{cr}$ **то увеличение толщины изоляции не уменьшает, а увеличивает тепловые потери!** При $r_3 = r_{cr}$ тепловые потери максимальны и только при $r_3 > r_{cr}$ они начинают снижаться

при теплоизоляции трубопроводов необходимо выполнять требование

$$r_3 > \frac{\lambda_2}{\alpha_2}.$$

Многослойная шаровая стенка



при граничных условиях III рода

$$Q = \frac{\pi\left(T_{f1} - T_{f(n+1)}\right)}{\frac{1}{4\alpha_1 r_1^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \ln\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}}\right) + \frac{1}{4\alpha_{n+1} r_{n+1}^2}},$$

$$T(r) = T_{f1} - \frac{q_l}{\pi}\left[\frac{1}{4\alpha_1 r_1^2} + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{\lambda_i} \ln\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}}\right) + \frac{1}{\lambda_i} \ln\left(\frac{1}{r_j} - \frac{1}{r_j + \Delta r_j}\right)\right]$$

внешние термические сопротивления

$$R_{\alpha 1} = \frac{1}{4\alpha_1 r_1^2};\ R_{\alpha_{n+1}} = \frac{1}{4\alpha_2 r_{n+1}^2}$$

многослойная шаровая стенка

суммарное внутреннее сопротивление слоев

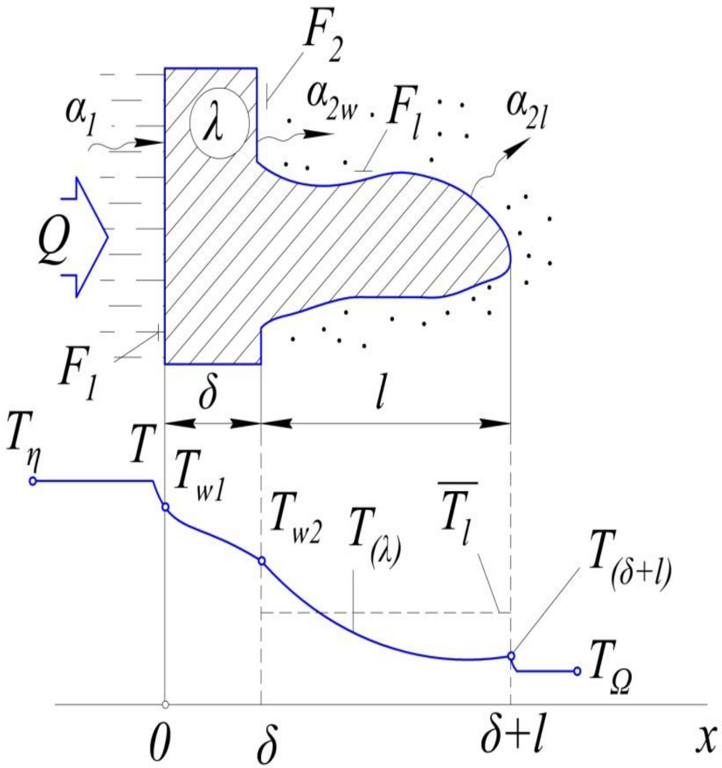
$$R_{\lambda\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \ln\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}}\right)$$

коэффициент теплопередачи

$$k = \frac{1}{R_{\alpha 1} + R_{\lambda\Sigma} + R_{\alpha_{n+1}}}$$

полное термическое сопротивление шаровой стенки $R_k = \frac{1}{k}$

Теплопроводность оребренных поверхностей



$$k = \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\alpha_2}}$$

пренебрежем

$$R_\lambda = \frac{\delta}{\lambda}$$

$$k_\alpha \approx \frac{\alpha_2}{1 + \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}} < \min(\alpha_1, \alpha_2)$$

Уравнение баланса

$$Q = \alpha_1 (T_{f1} - T_{w1}) F_1$$

$$Q = \frac{\delta}{\lambda} (T_{w1} - T_{f2}) F_2$$

$$Q = \alpha_{2w}(T_{w2} - T_{f2})F_2 + \alpha_{2l}(\bar{T}_l - T_{f2})F_l$$

Введем величину

$$\eta = \frac{\bar{T}_l - T_{f2}}{T_{w2} - T_{f2}}$$

Теплопроводность оребренных поверхностей

$$Q = \alpha_{2w}(T_{w2} - T_{f2})F_2 + \alpha_{2l}(T_{w2} - T_{f2})F_l\eta =$$

$$= \left(\alpha_{2w}\frac{F_2}{F_1} + \alpha_{2l}\frac{F_l}{F_1}\right)(T_{w2} - T_{f2})F_1 = \tilde{\alpha}_2(T_{w2} - T_{f2})F_1,$$

$$\tilde{\alpha}_2 = \alpha_{2w}\frac{F_2}{F_1} + \alpha_{2l}\eta\frac{F_l}{F_1}$$

$$Q = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}F_1 = \tilde{k}(T_{f1} - T_{f2})F_1$$

k приведенный коэффициент теплопередачи

$$\tilde{k} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$$

теплопередача станет интенсивнее только при

$$\frac{\tilde{\alpha}_2}{\alpha_{2w}} = \frac{F_2}{F_1} + \frac{\alpha_{2l}}{\alpha_{2w}}\frac{F_l}{F_1}\eta > 1$$

Теплопроводность оребренных поверхностей

$$\frac{\tilde{\alpha}_2}{\alpha_{2w}} = \frac{F_2}{F_1} = 0.5 \qquad \frac{\alpha_{2l}}{\alpha_{2w}} = 1, \qquad \frac{F_l}{F_1} = 5, \qquad \eta = 0.9$$

В этом случае

$$\alpha_2 = \alpha_{2w}$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_{2w}} = 5 \qquad \frac{1}{\alpha_1} = 10^{-4}$$

$$\frac{\delta}{\lambda} = 10^{-4}\,(м^2 \cdot K)/Вт,$$

$$\frac{1}{\alpha_{2w}} = 10^{-4}$$

$$k = \frac{1}{10^{-4} + 10^{-4} + 10^{-4}} = 333 \;\; \text{Вт}/(\text{м}^2\,K)$$

$$\tilde{k}\Big|_{\eta=0,9} = \frac{1}{10^{-4} + 10^{-4} + \left(10^4 \cdot 0.5 + 10^4 \cdot 0.9 \cdot 0.5\right)^{-1}} = 4545\ \text{Вт}/(м^2\ \text{К}) > k$$

Теплопроводность оребренных поверхностей

Если $\eta = 0{,}1$ $\tilde{\alpha}_2 = 10^4 \cdot 0{,}5 + 10^4 \cdot 0{,}1 \cdot 5 = 10^4 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\ \text{К}} = \alpha_{2w}$

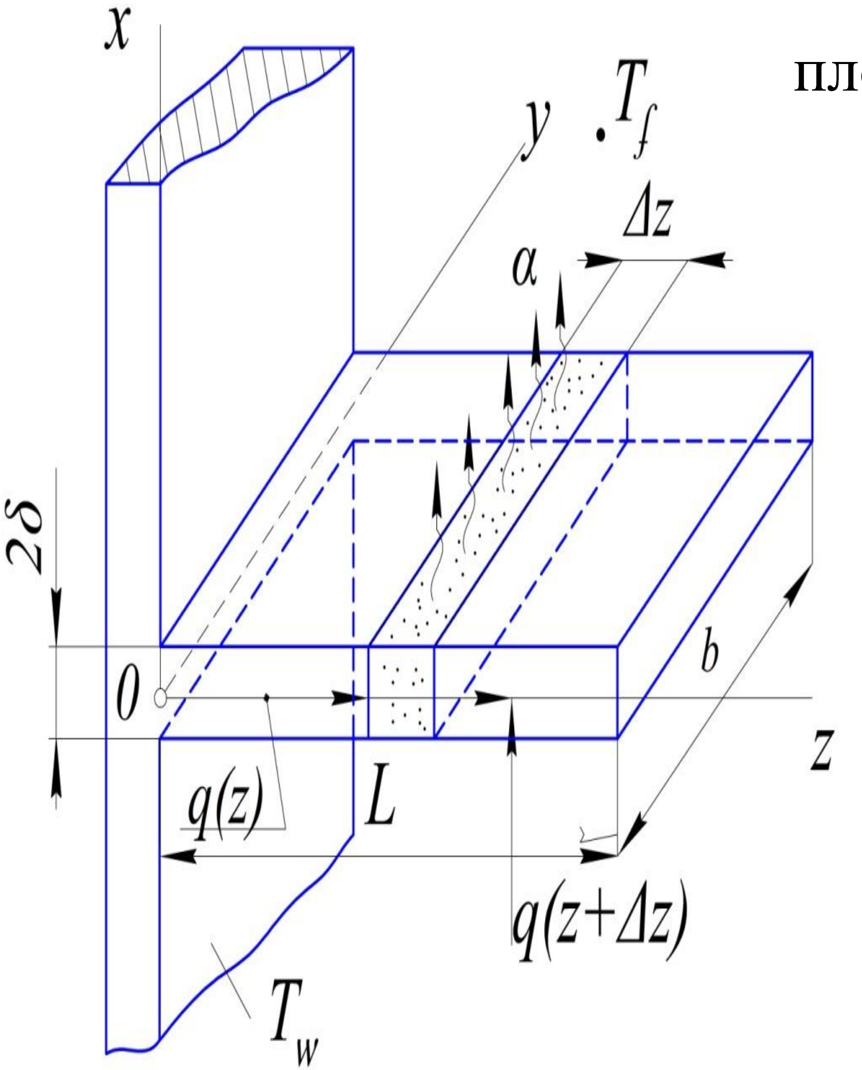
$$\tilde{k}\big|_{\eta=0,1} = k$$

В случае же, если $\eta = 0{,}05$

$$\tilde{\alpha}_2 = 10^4 \cdot 0{,}5 + 10^4 \cdot 0{,}05 \cdot 5 = 0.75 \cdot 10^4 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\ \text{К}} < \alpha_{2w}$$

$$\tilde{k}\big|_{\eta=0,05} = \frac{1}{10^{-4} + 10^{-4} + (0.75 \cdot 10^4)^{-1}} = 3000 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\ \text{К}} < k:$$

Задача теплопроводности для ребра постоянного сечения



плотность теплового потока

$$q(z) = \alpha\left[T(z) - T_f\right]$$

Уравнение теплового баланса

$$q(z)2\delta b - q(z+\Delta z)2\delta b - \alpha(2b\Delta z)(T - T_f) = 0,$$

Разделив все члены на $2\delta b \Delta z$

$$-\frac{\partial q(z)}{\partial z} = \frac{\alpha}{\delta}\left(T - T_f\right)$$

Задача теплопроводности для ребра постоянного сечения

по закону Фурье $q(z) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\alpha}{\lambda \delta}(\mathrm{T} - T_f)$

граничные условия $T|_{z=0} = T_f$ $\quad \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=L} = 0$

Решение в обобщенных (безразмерных) переменных

$$\frac{T - T_f}{\mathrm{T}_w - T_f} = \Theta \;;$$

$$\frac{z}{L} = Z; \quad \frac{L}{\delta} = L^*$$

$$\frac{\alpha L}{\lambda} = Bi$$

Задача теплопроводности для ребра постоянного сечения

Критерий Био $$Bi = \frac{\alpha L}{\lambda} = \frac{\frac{L}{\lambda}}{\frac{1}{\alpha}} = \frac{R_\lambda}{R_\alpha}$$

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial Z^2} = \Theta Bi \cdot L^*$$

общее решение $$\Theta = C_1 exp\left(Z\sqrt{Bi \cdot L^*}\right) + C_2 exp\left(Z\sqrt{Bi \cdot L^*}\right)$$

граничные условия в безразмерной форме

$$\Theta\big|_{z=0} = 1, \qquad \left.\frac{\partial \Theta}{\partial Z}\right|_{Z=1} = 0$$

гиперболический косинус аргумента u

$$\Theta = \frac{ch\left[(1 - Z)\sqrt{Bi \cdot L^*}\right]}{ch\left(Z\sqrt{Bi \cdot L^*}\right)}$$

$$ch\,u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

Задача теплопроводности для ребра постоянного сечения

Тепловой поток, отводимый от ребра

$$Q = \sqrt{Bi \cdot L^*}\frac{2\lambda\delta b}{L}\left(T_w - T_f\right)th\left(\sqrt{Bi \cdot L^*}\right) \qquad th\, u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$$

Для идеального (бесконечно теплопроводного) ребра тепловой поток равен

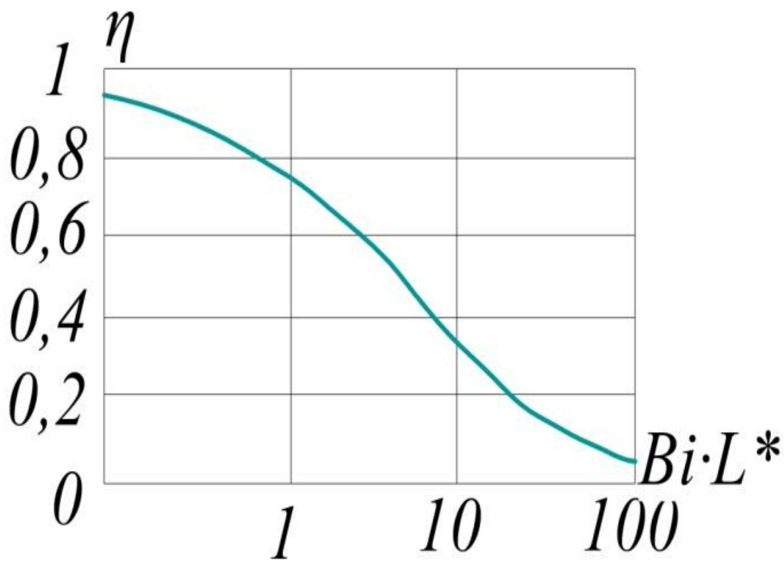
$$Q^* = \lambda 2\delta b\left(T_w - T_f\right)$$

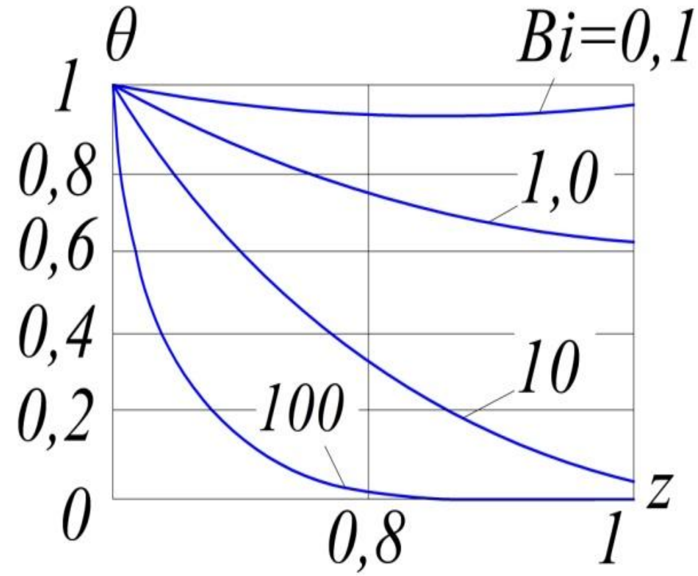
коэффициент эффективности ребра

$$\eta = \frac{Q}{Q^*} = \frac{\sqrt{Bi \cdot L^*}\frac{\lambda 2\delta b}{L}\left(T_w - T_f\right)th\left(\sqrt{Bi \cdot L^*}\right)}{2\lambda bL\left(T_w - T_f\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{Bi \cdot L^*}}th\left(\sqrt{Bi \cdot L^*}\right)$$

Задача теплопроводности для ребра постоянного сечения





для теплового расчета оребрения необходимо:

1)сформулировать задачу: оценить значения α , размеры, обусловленные конструкцией, а в ряде случаев также и материал ребра (т. е. задать λ,)

Задача теплопроводности для ребра постоянного сечения

по справочным данным определить вид функций и после чего уточнить размеры, выбор материала и рассчитать все необходимые величины, в первую очередь — Q

При расчете транспортных систем могут возникнуть и другие задачи, например:

- **экономия массы оребрения**;
- **оценка предельно допустимых значений температуры оребрения;**
- **обеспечение расчетного значения коэффициента теплопередачи**