МАТЕМАТИКА

СТРОИТЕЛЬСТВО

БАКАЛАВРИАТ

1 семестр

2020

3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3.1 Линии на плоскости и их уравнения

3.2 Прямая линия на плоскости

3.3 Кривые второго порядка

3.4 Уравнение поверхности и уравнения линии в пространстве

3.5 Плоскость

3.6 Прямая линия в пространстве

3.7 Взаимное расположение прямой и плоскости

3.4 УРАВНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ И УРАВНЕНИЯ ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Уравнение вида $F(x;y;z)=0$ называется уравнением поверхности **Σ** в декартовой системе координат ***Oxyz***, если:

1) координаты ***x***, ***y***, ***z*** любой точки ***M(x;y;z)*** **∈ Σ** удовлетворяют этому уравнению,
2) координаты ***x***, ***y***, ***z*** любой точки ***N(x;y;z)*** **∉ Σ** не удовлетворяют ему.

M(x;y;z) - текущая точка поверхности **Σ**
x, ***y***, ***z*** - текущие координаты

Если две поверхности пересекаются, то они образуют некоторую линию в пространстве.

Линия ***L*** в пространстве задаётся системой уравнений, которые являются уравнениями двух поверхностей (координаты точки ***M(x;y;z)*** **∈ *L*** удовлетворяют одновременно этим двум уравнениям):

$$L:\begin{cases} F_1(x;y;z)=0, \\ F_2(x;y;z)=0 \end{cases}$$

3.4 УРАВНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ И УРАВНЕНИЯ ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

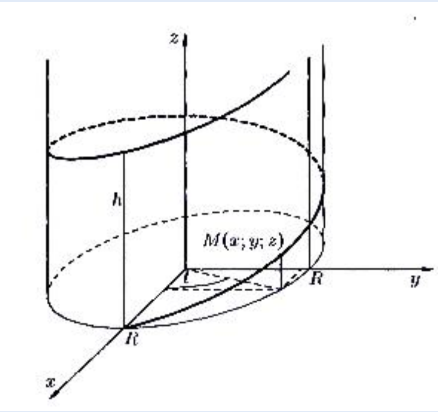
Линия ***L*** в пространстве задана параметрическими уравнениями, если текущие координаты ***x***, ***y***, ***z*** точек линии выражены через вспомогательный параметр ***t***, т. е.

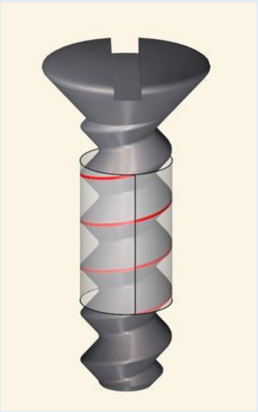
$$L:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in (\alpha; \beta)$$

Пример

Винтовая линия - линия, описываемая точкой ***M***, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси ***Oz*** и одновременно перемещается поступательно с постоянной скоростью v вдоль этой оси.

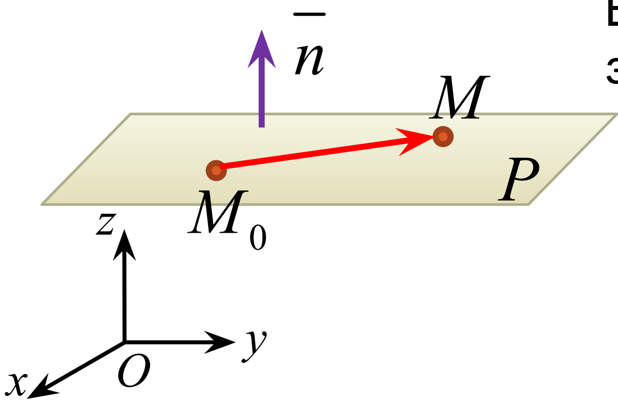
$$\begin{cases} x = R\cdot\cos\omega t \\ y = R\cdot\sin\omega t \\ z = vt \end{cases} \quad t \in [0; +\infty)$$





3.5 ПЛОСКОСТЬ

Задача 1



Вывести уравнение плоскости ***P***, проходящей через заданную точку, перпендикулярно заданному вектору.

Дано: $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)\in P,\quad \overline{n}=\left\{A;B;C\right\}\perp P$

Найти: ***P***

Решение:

Пусть $M\left(x;y;z\right)\in P$ – текущая точка, тогда $\overline{M_0M}=\left\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\right\}$

$\overline{n}\perp\overline{M_0M}$ $\Rightarrow$ критерий перпендикулярности векторов $\Rightarrow$ $\overline{n}\cdot\overline{M_0M}=0$

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0$$

$$Ax-Ax_0+By-By_0+Cz-Cz_0=0$$

$$Ax+By+Cz+\underbrace{\left(-Ax_0-By_0-Cz_0\right)}_{D}=0$$

$$\boxed{Ax+By+Cz=D=0}$$

общее уравнение плоскости

$\overline{n}=\left\{A;B;C\right\}$ – нормальный вектор

3.5 ПЛОСКОСТЬ

Замечание

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

1

$A = 0 \;\Rightarrow\; By + Cz + D = 0$ — Плоскость параллельна оси ***Ox***

$B = 0 \;\Rightarrow\; Ax + Cz + D = 0$ — Плоскость параллельна оси ***Oy***

$C = 0 \;\Rightarrow\; Ax + By + D = 0$ — Плоскость параллельна оси ***Oz***

2

$D = 0 \;\Rightarrow\; Ax + By + Cz = 0$ — Плоскость проходит через начало координат

3

$A = D = 0 \;\Rightarrow\; By + Cz = 0$ — Плоскость проходит через ось ***Ox***

$B = D = 0 \;\Rightarrow\; Ax + Cz = 0$ — Плоскость проходит через ось ***Oy***

$C = D = 0 \;\Rightarrow\; Ax + By = 0$ — Плоскость проходит через ось ***Oz***

4

$A = B = 0 \;\Rightarrow\; Cz + D = 0$ — Плоскость параллельна плоскости ***Oxy***

$B = C = 0 \;\Rightarrow\; Ax + D = 0$ — Плоскость параллельна плоскости ***Oyz***

$A = C = 0 \;\Rightarrow\; By + D = 0$ — Плоскость параллельна плоскости ***Oxz***

3.5 ПЛОСКОСТЬ

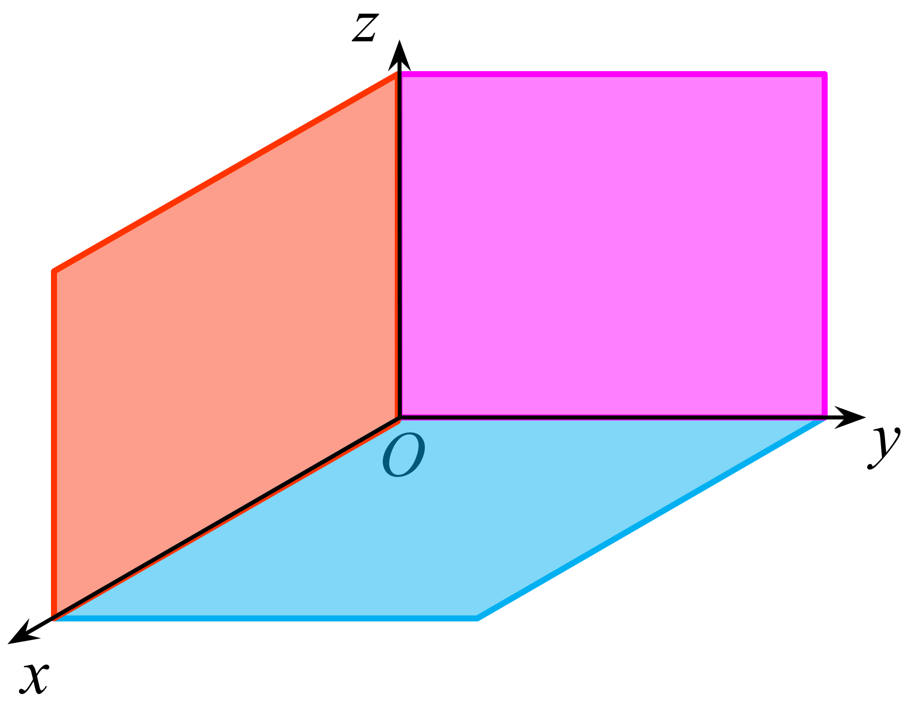
Замечание $$Ax + By + Cz + D = 0$$

5

$$A = B = D = 0 \Rightarrow Cz = 0 \Rightarrow z = 0$$ Плоскость ***Oxy***

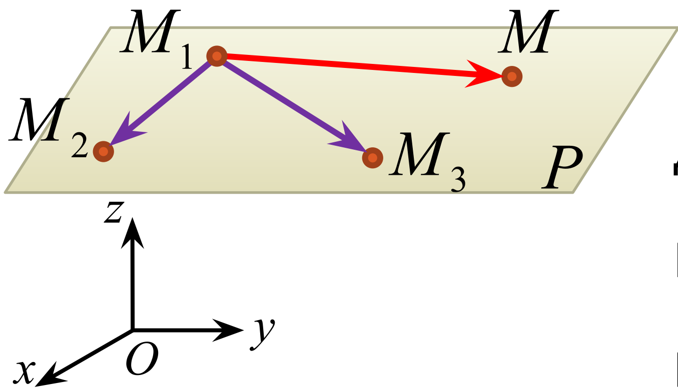
$$B = C = D = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x = 0$$ Плоскость ***Oyz***

$$A = C = D = 0 \Rightarrow By = 0 \Rightarrow y = 0$$ Плоскость ***Oxz***



3.5 ПЛОСКОСТЬ

Задача 2



Вывести уравнение плоскости ***P***, проходящей через три заданные точки.

Дано: $M_1(x_1;y_1;z_1), M_2(x_2;y_2;z_2), M_3(x_3;y_3;z_3) \in P$

Найти: ***P***

Решение:

$$\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\},\ \overline{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$$

Пусть $M(x;y;z) \in P$ – текущая точка, тогда $\overline{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$

$\overline{M_1M},\ \overline{M_1M_2},\ \overline{M_1M_3}$ – компланарные $\Rightarrow \left(\overline{M_1M},\ \overline{M_1M_2},\ \overline{M_1M_3}\right) = 0$

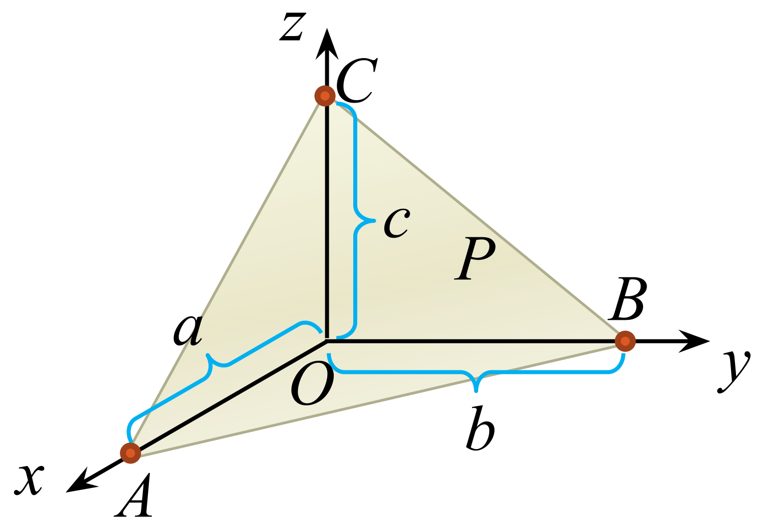
$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0}$$

уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

3.5 ПЛОСКОСТЬ

Замечание

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$



Пусть заданные точки расположены на осях координат, т. е. отсекают на осях заданные отрезки,

Тогда координаты этих точек: $A(a;0;0),\ B(0;b;0),\ C(0;0;c).$

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix}=0$$

3.5 ПЛОСКОСТЬ

Замечание

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

Воспользуемся правилом треугольников для вычисления определителей третьего порядка:

$$(x-a)bc + 0 + 0 - (-zab - yac + 0) = 0$$

$$xbc - abc + zab + yac = 0$$

$$xbc + yac + zab = abc$$

Разделим обе части уравнения на abc:

$$\frac{xbc}{abc} + \frac{yac}{abc} + \frac{zab}{abc} = \frac{abc}{abc}$$

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

уравнение плоскости в отрезках

Это уравнение позволяет быстро сделать чертёж плоскости в декартовой системе координат.

3.5 ПЛОСКОСТЬ

Пример

Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки $K(2;1;1),\ L(4;2;1),\ M(-2;3;-1).$

Преобразовать это уравнение в уравнение плоскости в отрезках и сделать чертёж плоскости в декартовой системе координат.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ 4-2 & 2-1 & 1-1 \\ -2-2 & 3-1 & -1-1 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -2 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}=0$$

3.5 ПЛОСКОСТЬ

Пример (продолжение)

$$(x-2)(-2)-(y-1)(-4)+(z-1)(8)=0$$

$$-2x+4+4y-4+8z-8=0$$

$$-2x+4y+8z-8=0$$ разделим обе части уравнения на (-2):

$$x-2y-4z+4=0$$ – общее уравнение плоскости

Преобразуем это уравнение в уравнение плоскости в отрезках:

$$x-2y-4z=-4$$ разделим обе части уравнения на (-4):

$$\frac{x}{-4}+\frac{-2y}{-4}+\frac{-4z}{-4}=\frac{-4}{-4}$$

$$\frac{x}{-4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$$ – уравнение плоскости в отрезках

3.5 ПЛОСКОСТЬ

Пример (продолжение)

$$\frac{x}{-4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$$

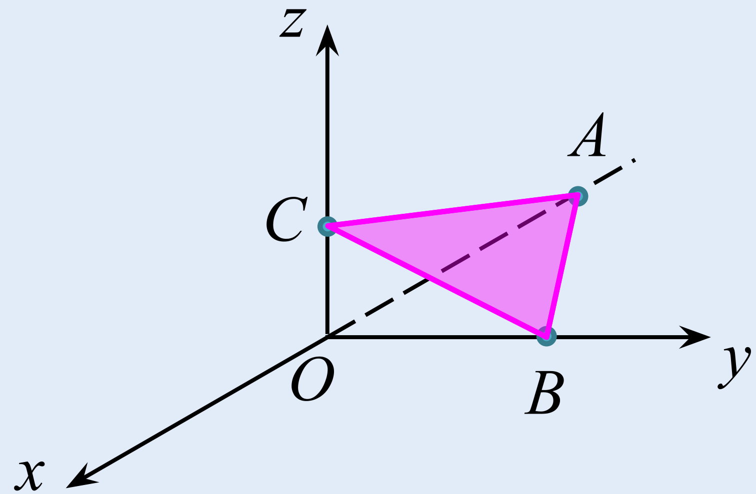
Сделаем чертёж в декартовой системе координат:

отметим на осях точки

$$A(-4;0;0),\ \ B(0;2;0),\ \ C(0;0;1),$$

соединим их отрезками.

Получили часть искомой плоскости, по которой можно судить о расположении всей плоскости.



3.5 ПЛОСКОСТЬ

Обобщение

Мы получили несколько типов (форм записи) уравнений плоскости в пространстве, которые отличаются по внешнему виду:

1) общее уравнение,
2) уравнение плоскости, проходящей через три точки,
3) уравнение плоскости в отрезках.

Очевидно, что с помощью алгебраических преобразований можно легко перейти от одной формы записи к другой.

Таким образом можно утверждать, что любой способ определения плоскости в пространстве приводит к уравнению первой степени относительно ***x***, ***y***, ***z*** .

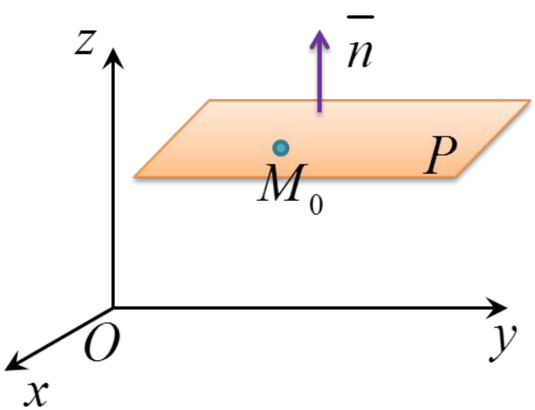
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

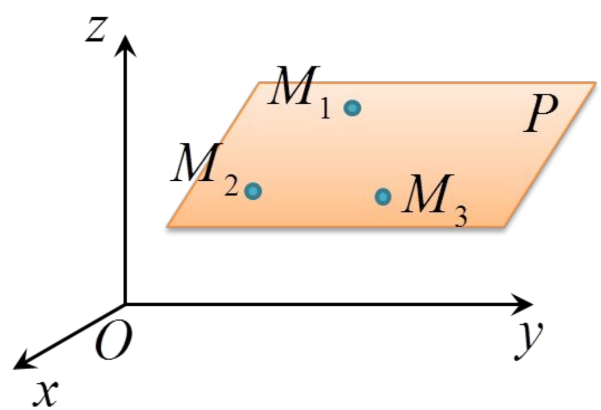
(числа A, B и C одновременно не могут быть равны нулю)

3.5 ПЛОСКОСТЬ

Указания к составлению уравнений плоскости

Дано	Выбор формулы
Точка и перпендикулярный вектор	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
Три точки	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$





3.5 ПЛОСКОСТЬ

Взаимное расположение плоскостей

Рассмотрим две плоскости, заданные общими уравнениями, и соответствующие им нормальные векторы:

$$P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad \overline{n_1} = \{A_1; B_1; C_1\} \perp P_1$$

$$P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \qquad \overline{n_2} = \{A_2; B_2; C_2\} \perp P_2$$

1. Параллельность плоскостей

$$P_1 \parallel P_2 \iff \overline{n_1} \parallel \overline{n_2} \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

2. Совпадение плоскостей

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

3. Перпендикулярность плоскостей

$$P_1 \perp P_2 \iff \overline{n_1} \perp \overline{n_2} \iff \overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0 \iff A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

3.5 ПЛОСКОСТЬ

Взаимное расположение плоскостей

4 Угол между плоскостями

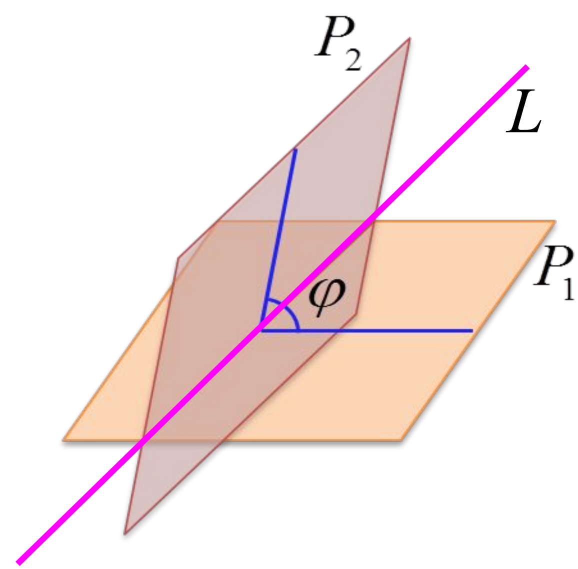
$$\cos\angle(P_1;P_2)=\cos\angle(\overline{n_1};\overline{n_2})=\frac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{|\overline{n_1}|\cdot|\overline{n_2}|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

$$\angle(L_1;L_2)=\arccos\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}=\varphi$$

5 Пересечение плоскостей

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

Линией пересечения двух плоскостей является прямая.



Лекция выложена впервые.

Если Вы заметили ошибку, то сообщите мне на эл. почту.