

МАТЕМАТИКА

СТРОИТЕЛЬСТВО

БАКАЛАВРИАТ

1 семестр

2020



3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3.1 Линии на плоскости и их уравнения

3.2 Прямая линия на плоскости

3.3 Кривые второго порядка

3.4 Уравнение поверхности и уравнения линии в пространстве

3.5 Плоскость

3.6 Прямая линия в пространстве

3.7 Взаимное расположение прямой и плоскости

3.4 УРАВНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ И УРАВНЕНИЯ ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Уравнение вида $F(x; y; z) = 0$ называется **уравнением поверхности Σ** в декартовой системе координат $Oxyz$, если:

- 1) координаты x, y, z любой точки $M(x; y; z) \in \Sigma$ удовлетворяют этому уравнению,
- 2) координаты x, y, z любой точки $N(x; y; z) \notin \Sigma$ не удовлетворяют ему.

$M(x; y; z)$ - текущая точка поверхности Σ
 x, y, z - текущие координаты

Если две поверхности пересекаются, то они образуют некоторую линию в пространстве.

Линия L в пространстве задаётся **системой уравнений**, которые являются уравнениями двух поверхностей (координаты точки $M(x; y; z) \in L$ удовлетворяют одновременно этим двум уравнениям):

$$L: \begin{cases} F_1(x; y; z) = 0, \\ F_2(x; y; z) = 0 \end{cases}$$

3.4 УРАВНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ И УРАВНЕНИЯ ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

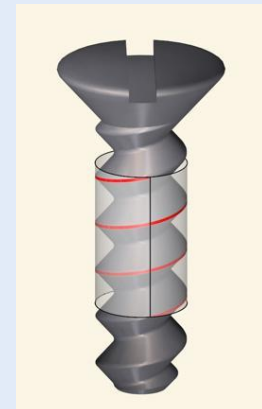
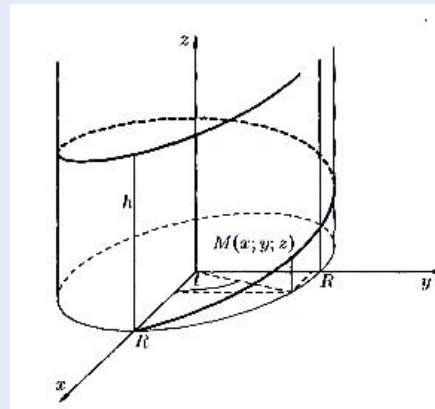
Линия L в пространстве задана **параметрическими уравнениями**, если текущие координаты x , y , z точек линии выражены через

вспомогательный параметр t , т. е. $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in (\alpha; \beta)$

Пример

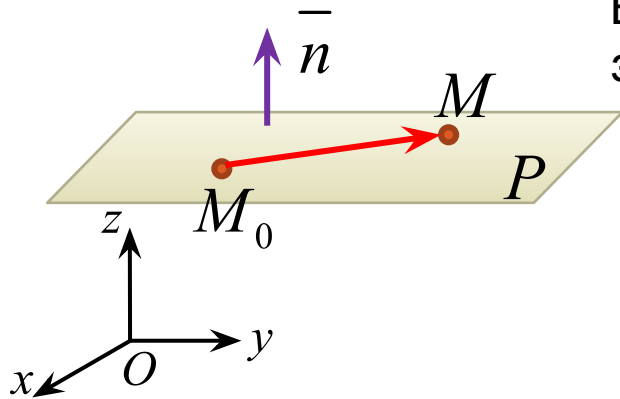
Винтовая линия - линия, описываемая точкой M , которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси Oz и одновременно перемещается поступательно с постоянной скоростью v вдоль этой оси.

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos \omega t \\ y = R \cdot \sin \omega t \\ z = vt \end{cases} \quad t \in [0; +\infty)$$



3.5 ПЛОСКОСТЬ

Задача 1



Вывести уравнение плоскости P , проходящей через заданную точку, перпендикулярно заданному вектору.

Дано: $M_0(x_0; y_0; z_0) \in P$, $\bar{n} = \{A; B; C\} \perp P$

Найти: P

Решение:

Пусть $M(x; y; z) \in P$ – текущая точка, тогда $\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$

$\bar{n} \perp \overline{M_0M} \Rightarrow$ критерий перпендикулярности векторов $\Rightarrow \bar{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0$$

$$Ax + By + Cz + \underbrace{(-Ax_0 - By_0 - Cz_0)}_D = 0$$

$$Ax + By + Cz = D = 0$$

общее уравнение плоскости

$\bar{n} = \{A; B; C\}$ – нормальный вектор

3.5 ПЛОСКОСТЬ

Замечание

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

1 $A = 0 \Rightarrow By + Cz + D = 0$

$$B = 0 \Rightarrow Ax + Cz + D = 0$$

$$C = 0 \Rightarrow Ax + By + D = 0$$

Плоскость параллельна оси **Ox**

Плоскость параллельна оси **Oy**

Плоскость параллельна оси **Oz**

2 $D = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz = 0$

Плоскость проходит через
начало координат

3 $A = D = 0 \Rightarrow By + Cz = 0$

$$B = D = 0 \Rightarrow Ax + Cz = 0$$

$$C = D = 0 \Rightarrow Ax + By = 0$$

Плоскость проходит через ось **Ox**

Плоскость проходит через ось **Oy**

Плоскость проходит через ось **Oz**

4 $A = B = 0 \Rightarrow Cz + D = 0$

$$B = C = 0 \Rightarrow Ax + D = 0$$

$$A = C = 0 \Rightarrow By + D = 0$$

Плоскость параллельна плоскости **Oxy**

Плоскость параллельна плоскости **Oyz**

Плоскость параллельна плоскости **Oxz**

3.5 ПЛОСКОСТЬ

Замечание

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

5

$$A = B = D = 0 \Rightarrow Cz = 0 \Rightarrow z = 0$$

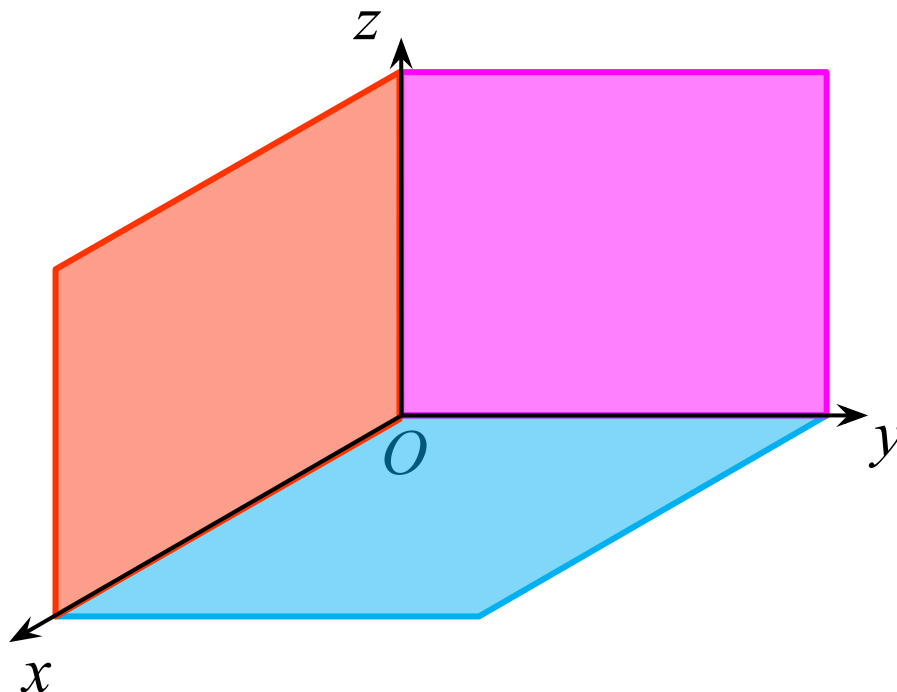
Плоскость Oxy

$$B = C = D = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x = 0$$

Плоскость Oyz

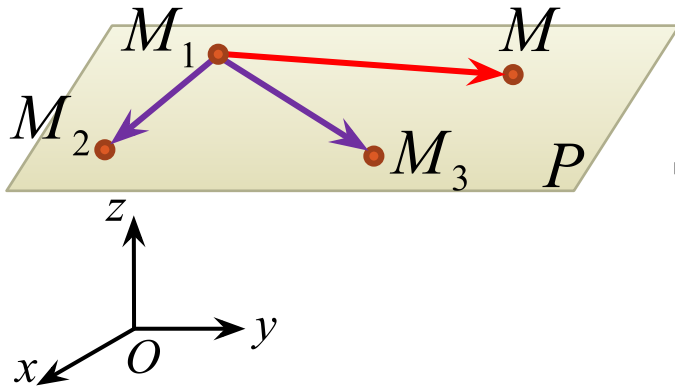
$$A = C = D = 0 \Rightarrow By = 0 \Rightarrow y = 0$$

Плоскость Oxz



3.5 ПЛОСКОСТЬ

Задача 2



Вывести уравнение плоскости P , проходящей через три заданные точки.

Дано: $M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2), M_3(x_3; y_3; z_3) \in P$

Найти: P

Решение:

$$\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}, \quad \overline{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$$

Пусть $M(x; y; z) \in P$ – текущая точка, тогда $\overline{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$

$$\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3} \text{ – компланарные} \Rightarrow (\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}) = 0$$

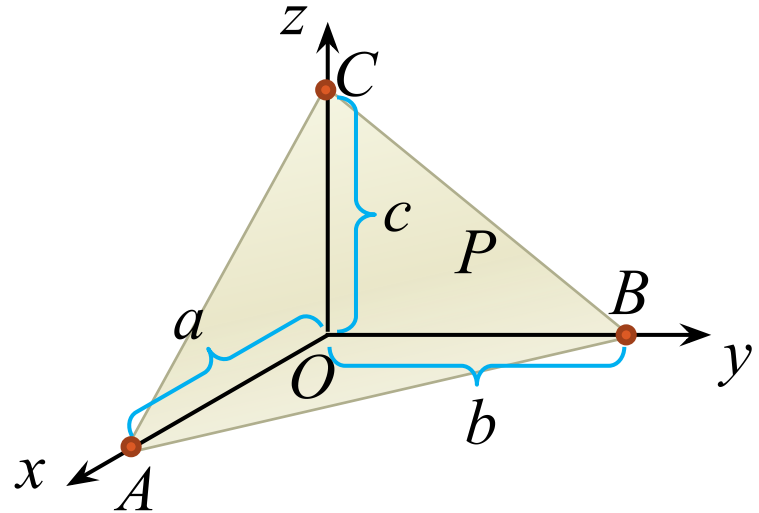
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

уравнение плоскости,
проходящей через три
заданные точки

3.5 ПЛОСКОСТЬ

Замечание

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$



Пусть заданные точки расположены на осях координат, т. е. отсекают на осях заданные отрезки,

Тогда координаты этих точек: $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$.

$$\begin{vmatrix} x - a & y - 0 & z - 0 \\ 0 - a & b - 0 & 0 - 0 \\ 0 - a & 0 - 0 & c - 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

3.5 ПЛОСКОСТЬ

Замечание

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

Воспользуемся правилом треугольников для вычисления определителей третьего порядка:

$$(x-a)bc + 0 + 0 - (-zab - yac + 0) = 0$$

$$xbc - abc + zab + yac = 0$$

$$xbc + yac + zab = abc \quad \text{Разделим обе части уравнения на } abc:$$

$$\frac{xbc}{abc} + \frac{yac}{abc} + \frac{zab}{abc} = \frac{abc}{abc}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

→ уравнение плоскости в отрезках

Это уравнение позволяет быстро сделать чертёж плоскости в декартовой системе координат.

3.5 ПЛОСКОСТЬ

Пример

Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точки $K(2;1;1)$, $L(4;2;1)$, $M(-2;3;-1)$.

Преобразовать это уравнение в уравнение плоскости в отрезках и сделать чертёж плоскости в декартовой системе координат.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - 2 & y - 1 & z - 1 \\ 4 - 2 & 2 - 1 & 1 - 1 \\ -2 - 2 & 3 - 1 & -1 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 1 & z - 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x - 2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - (y - 1) \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + (z - 1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

3.5 ПЛОСКОСТЬ

Пример (продолжение)

$$(x-2)(-2) - (y-1)(-4) + (z-1)(8) = 0$$

$$-2x + 4 + 4y - 4 + 8z - 8 = 0$$

$$-2x + 4y + 8z - 8 = 0 \quad \text{разделим обе части уравнения на } (-2):$$

$$x - 2y - 4z + 4 = 0 \quad \text{– общее уравнение плоскости}$$

Преобразуем это уравнение в уравнение плоскости в отрезках:

$$x - 2y - 4z = -4 \quad \text{разделим обе части уравнения на } (-4):$$

$$\frac{x}{-4} + \frac{-2y}{-4} + \frac{-4z}{-4} = \frac{-4}{-4}$$

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1 \quad \text{– уравнение плоскости в отрезках}$$

3.5 ПЛОСКОСТЬ

Пример (продолжение)

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$$

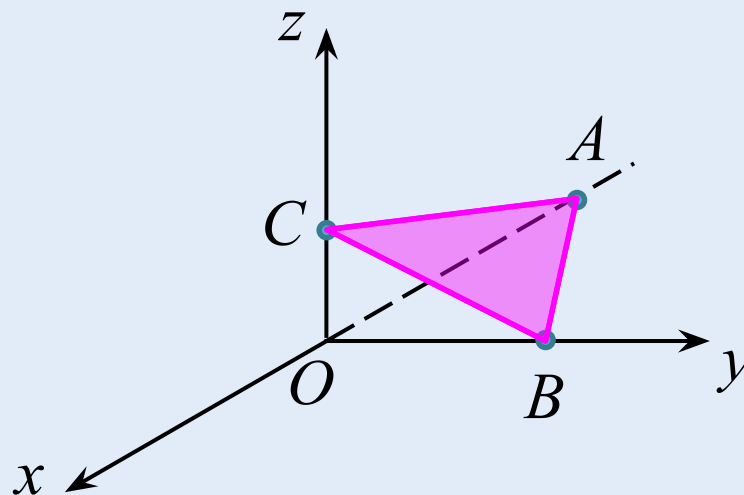
Сделаем чертёж в декартовой системе координат:

отметим на осях точки

$$A(-4; 0; 0), \quad B(0; 2; 0), \quad C(0; 0; 1),$$

соединим их отрезками.

Получили часть искомой плоскости, по которой можно судить о расположении всей плоскости.



3.5 ПЛОСКОСТЬ

Обобщение

Мы получили несколько типов (форм записи) уравнений плоскости в пространстве, которые отличаются по внешнему виду:

- 1) общее уравнение,
- 2) уравнение плоскости, проходящей через три точки,
- 3) уравнение плоскости в отрезках.

Очевидно, что с помощью алгебраических преобразований можно легко перейти от одной формы записи к другой.

Таким образом можно утверждать, что любой способ определения плоскости в пространстве приводит к уравнению первой степени относительно x , y , z .

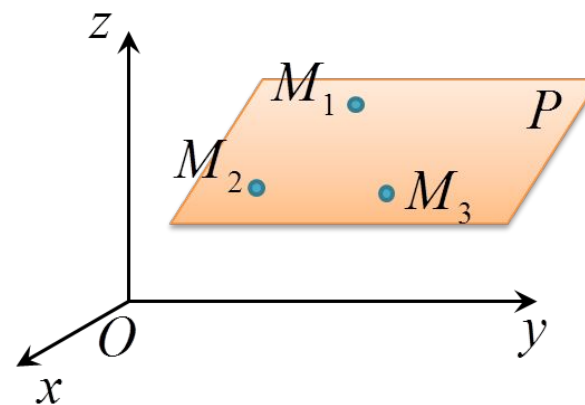
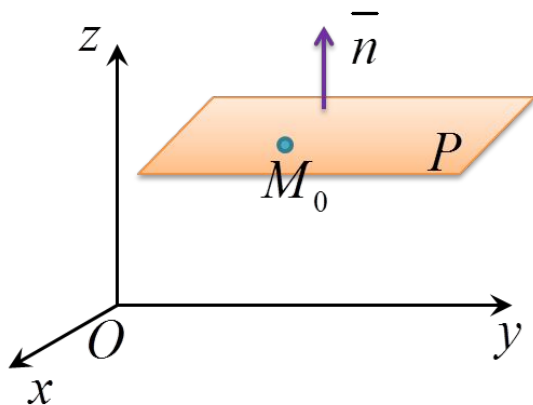
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

(числа A , B и C одновременно не могут быть равны нулю)

3.5 ПЛОСКОСТЬ

Указания к составлению уравнений плоскости

Дано	Выбор формулы
Точка и перпендикулярный вектор	$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
Три точки	$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$



3.5 ПЛОСКОСТЬ

Взаимное расположение плоскостей

Рассмотрим две плоскости, заданные общими уравнениями, и соответствующие им нормальные векторы:

$$P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \overline{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\} \perp P_1$$

$$P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad \overline{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\} \perp P_2$$

1 Параллельность плоскостей

$$P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \overline{n}_1 \parallel \overline{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

2 Совпадение плоскостей

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

3 Перпендикулярность плоскостей

$$P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow \overline{n}_1 \perp \overline{n}_2 \Leftrightarrow \overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

3.5 ПЛОСКОСТЬ

Взаимное расположение плоскостей

4 Угол между плоскостями

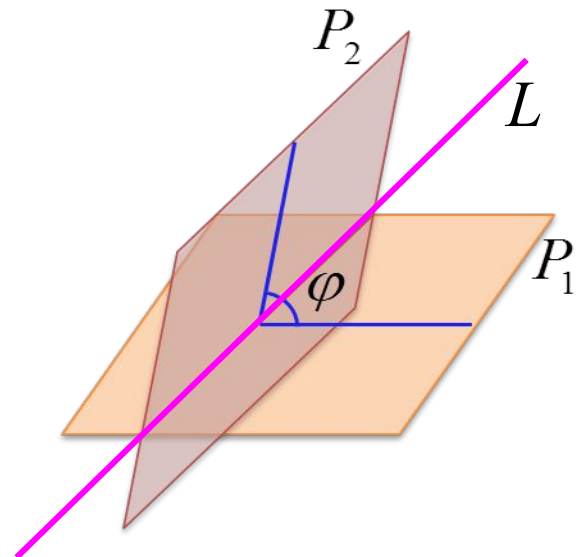
$$\cos \angle(P_1; P_2) = \cos \angle(\overline{n_1}; \overline{n_2}) = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$$\angle(L_1; L_2) = \arccos \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = \varphi$$

5 Пересечение плоскостей

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Линией пересечения двух плоскостей является прямая.



Лекция выложена впервые.

**Если Вы заметили ошибку, то сообщите мне на эл.
почту.**