Различные способы решения тригонометрических неравенств

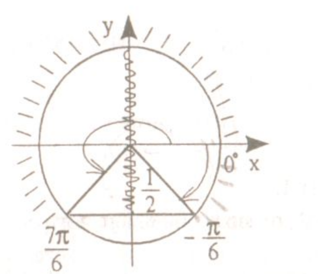
Мильтюсова Анна 10 класс

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ

$\sin t>(<)a,\ |a| < 1.$

- Отметить на линии синусов число а.
- Отметить все синусы, которые больше(меньше) числа а.
- Выделить на единичной тригонометрической окружности дугу, на которой находятся точки t, удовлетворяющие данному условию.
- Записать ответ. Если выделенная дуга прошла через 0 , то для записи предельных точек выбирают разное направление(один угол отрицательный, другой – положительный). Если выделенная дуга не прошла через 0 , то для записи предельных точек выбирают одно направление.

$$\sin t > -\frac{1}{2}$$



$$2\pi n - \frac{\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

cos t >(<)a, |a| < 1.

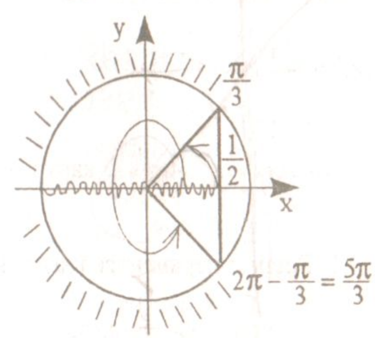
Отметить на линии косинусов число а.

Отметить все косинусы, которые больше(меньше) числа а.

Выделить на единичной тригонометрической окружности дугу, на которой находятся точки t, удовлетворяющие данному условию.

- Записать ответ. Если выделенная дуга прошла через 0 , то для записи предельных точек выбирают разное направление(один угол отрицательный, другой – положительный). Если выделенная дуга не прошла через 0 , то для записи предельных точек выбирают одно направление.

$\cos t < \frac{1}{2}$



$$2\pi n + \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

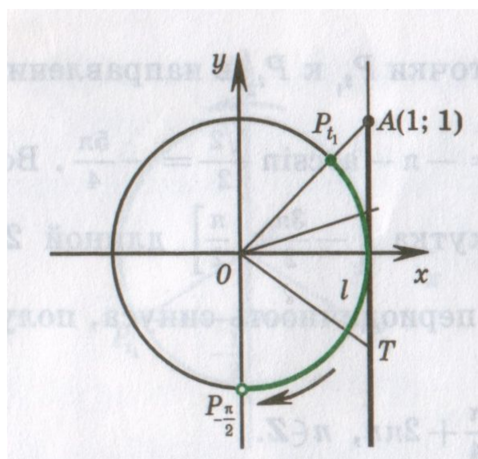
tg t >(<) a.

Отметить на линии тангенсов число а.

Отметить все тангенсы, которые больше(меньше) числа а.

Выделить на единичной тригонометрической окружности дугу, на которой находятся точки t, удовлетворяющие данному условию.

- Записать ответ. Если неравенство имеет вид tg t < а, то решение записывается в виде: - п/2 + пn<t<arctg a+пn, nЄz.
- Если tg t > a, то неравенство имеет решение
- arctg a+пn <t<п/2+пn,nЄz.



ctg t >(<) a.

Отметить на линии котангенсов число а.

- Отметить все котангенсы, которые больше(меньше) числа а.

- Выделить на единичной тригонометрической окружности дугу, на которой находятся точки t, удовлетворяющие данному условию.

- Если ctg t>a, то решением является пn<t<t_1 + пn, n Є Z.

- Если ctg t<a, то t_1+ пn<t<п + пn, n Є Z.

Графический способ решения тригонометрических неравенств

вида $\sin x > a$ $(\sin x < a)$

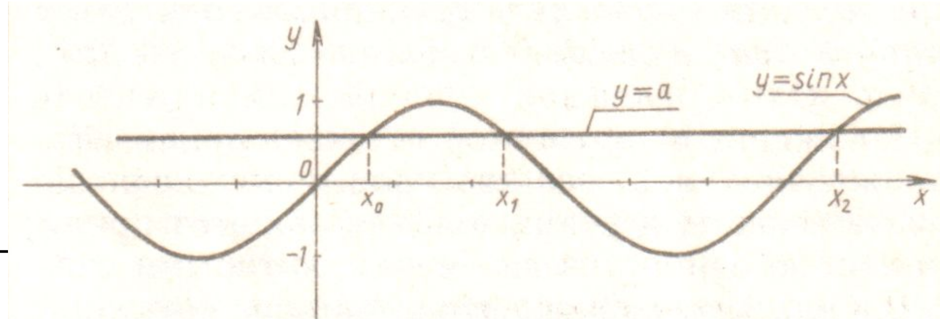
Строим графики $y=\sin x$ и $y=a$, считая, что $|a|<1$.

Записываем уравнение $\sin x=a$ и его решение $x=(-1)^{к} \arcsin a + пn$, $n \in Z$.

Придавая n значения 0; 1; 2, находим три корня составленного уравнения:

$x_0 = \arcsin a$, $x_1 = -\arcsin a+п$, $x_2 = \arcsin a + 2п$.

- Значения x_0, x_1 и x_2 являются абсциссами трёх последовательных точек пересечения графиков $y=\sin x$ и $y=a$.
- На интервале $(x_0 ;x_1)$ выполняется неравенство $\sin x>a$, а на интервале
- $(x_1 ;x_2)$ – неравенство $\sin x<a$.

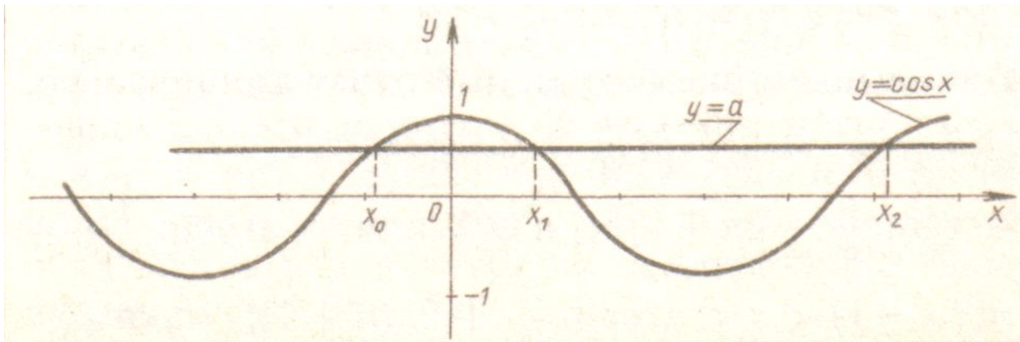


- Добавив к концам этих промежутков число, кратное периоду синуса, в первом случае получим решение неравенства sin x>a в виде:
  - $x_0 + 2πn < x < x_1 + 2πn$, $n ∈ Z$;
- во втором случае – решение неравенства sin x<a в виде:
  - $x_1 + 2πn < x < x_2 + 2πn$, $n ∈ Z$.

Решение неравенств

вида cos x >a   (cos x < a)

- Проводим аналогичные рассуждения для косинуса.
- В отличие от синуса из формулы x=±arccos a + 2пn, n Є Z, при n=0 получаем два корня x_0 = -arccos a, x_1 = arccos a. Третий корень при n=1 в виде x_3 = -arccos a + 2п.
- x_0 ,x_1 и x_2 являются тремя последовательными абсциссами точек пересечения графиков y=cos x и y=a.
- В интервале (x_0 ;x_1) выполняется неравенство cos x>a, в интервале   (x_1 ;x_2) – неравенство cos x<a.



- Запишем решения неравенств cos x>a и cos x<a.
- В первом случае получим:
  - $x_0 + 2\pi n < x < x_1 + 2\pi n,\ n \in Z.$
- Во втором:
  - $x_1 + 2\pi n < x < x_2 + 2\pi n,\ n \in Z.$

Решение тригонометрических неравенств методом интервалов

- Привести неравенство к такому виду, чтобы в одной его части(например в правой) стоял ноль.

$\frac{\pi}{2}$

- Определить нули и точки разрыва функции, стоящей в левой части неравенства.
- Расставить на единичной окружности точки, являющиеся представителями всех найденных чисел.

.

- Выбрать произвольное число F (значение аргумента функции, стоящей в левой части неравенства), не совпадающее ни с одним из ранее полученных чисел.

Провести луч Ox_1 под углом F к координатному лучу Ox.

- На луче Ox_1 получить контрольную точку $X_к$. Для этого подставить число F в левую часть неравенства и определить знак получившегося выражения.
-

- Если выражение больше нуля, то $X_к$ - это произвольная точка луча Ox_1, лежащая вне единичной окружности. Иначе $X_к$ – это произвольная точка луча Ox_1 внутри единичной окружности.

- Начиная с точки X провести плавную линию так, чтобы она пересекала единичную окружность во всех отмеченных точках последовательно в порядке обхода единичной окружности против часовой стрелки. Пройдя все точки, линия должна вернуться в точку X .

- Выбрать нужные участки конфигурации, которую образовала проведённая линия. Для этого: если выражение, стоящее в левой части неравенства, больше нуля,

-то выбрать участки фигуры, лежащие вне единичной окружности.

-Иначе – выбрать те участки фигуры, которые расположены внутри единичной окружности.

- Отметить стрелками в положительном направлении те дуги единичной окружности, которые принадлежит выбранным участкам. Эти дуги соответствуют множеству решений неравенства.

Пример 1.

- Решите неравенство cos 3x: + cosx>0.
- Приведем левую часть неравенства к виду 2 cos 2x cos *x* и рассмотрим уравнение
- 2 cos 2x-cos *x=0,* которое равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0,\\ \cos x = 0.\end{array}\right.$$

- I серия значений *x:*

  $x_1 = (п/4) + (п n/2).$

- II серия значений x:

  $x_2 = (п/2)+ п n.$

- Заполним теперь единичную окружность соответствующими точками. Для I серии достаточно взять *п* = 0, 1, 2, 3. Тогда значения x_1 соответственно равны п/4, 3п/4, 5п/4, 7п/4 (при остальных значениях *п* точки будут повторяться).

- Значения из серии x_2 на единичной окружности можно представить точками п/2 и 3п/2, которые получены при $n = 0$ и $n=1$.

- Выберем теперь контрольную точку, положив α=0. Тогда

  $\cos 3*0 + \cos 0 = 2 > 0$. Значит, в данном случае луч *Ox′* совпадает с координатным лучом *Ox* (угол между ними равен 0). Выберем на луче *Ox* произвольную точку *Xк,* находящуюся вне единичной окружности.
- Соединяем точку *Xк* со всеми отмеченными точками на единичной окружности так, как показано на рис. 1.

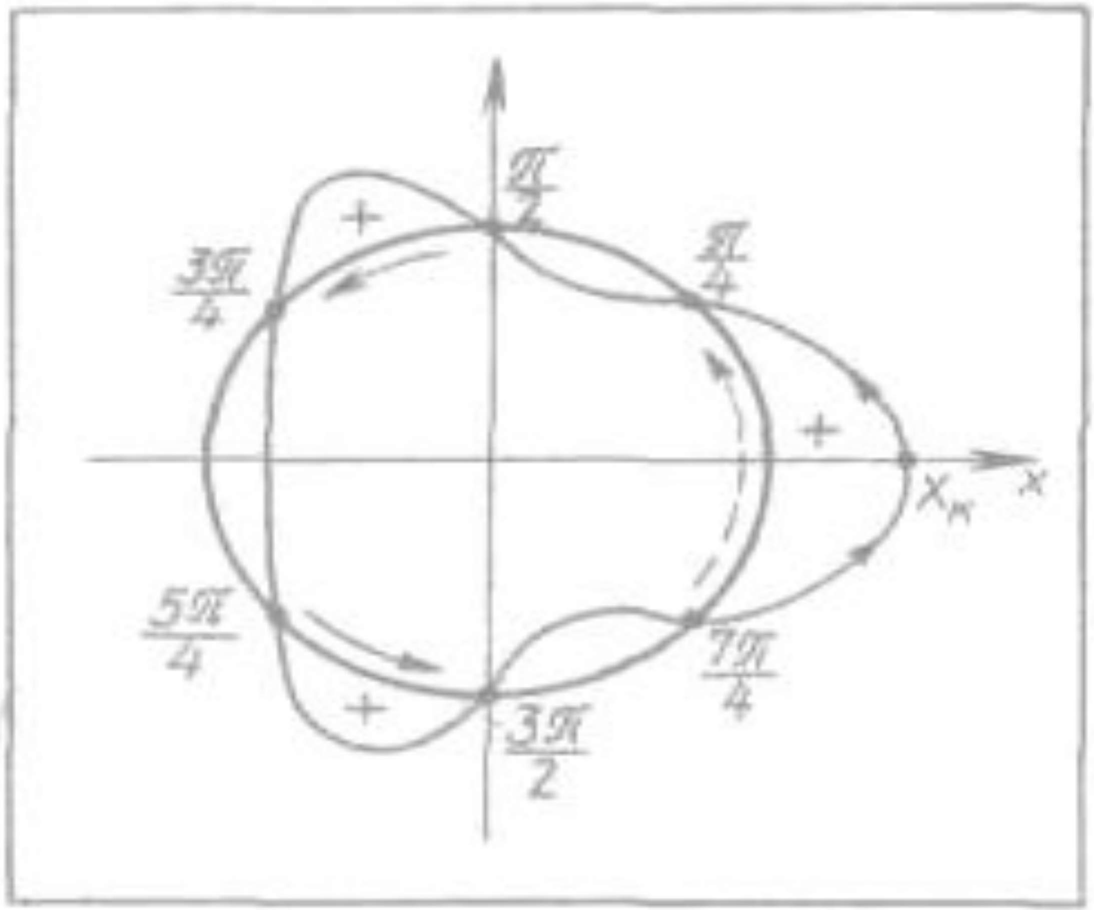


Рис. 1

$$x \in \left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}+2\pi n;\frac{9\pi}{4}+2\pi n\right).$$