

ТЕОРИЯ ИГР

- При решении ряда практических задач (в области экономики, военного дела и т. д.) приходится анализировать ситуации, где налицо две (или более) враждующие стороны, преследующие противоположные цели, причем результат каждого мероприятия одной из сторон зависит от того, какой образ действий выберет противник. Такие ситуации будем называть "конфликтными ситуациями".
- **Конфликтная ситуация** - ситуация, в которой две (или более) стороны преследуют различные цели, а результаты любого действия каждой из сторон зависят от действий партнера.

- Ряд ситуаций в области экономики (особенно при наличии свободной конкуренции) принадлежит к конфликтным ситуациям;
- в роли борющихся сторон выступают торговые фирмы, промышленные предприятия и т. д. Необходимость анализировать подобные ситуации вызвала к жизни специальный математический аппарат.
- Теория игр по существу представляет собой не что иное, как математическую теорию конфликтных ситуаций. Цель теории - выработка рекомендаций по рациональному образу действий каждого из противников в ходе конфликтной ситуации.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

В процессе поиска принятия решений появляются многочисленные варианты, которые приходится рассматривать, чтобы выбрать наилучший из числа имеющихся. С этой целью необходимо проводить количественный анализ и на его основе принимать обоснованное решение.

Для обоснования принятия решений в условиях неопределенности разработаны специальные математические методы и модели. Задачи принятия решений в условиях полной или частичной неопределенности решаются с помощью теории игр и статистических решений.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

Теория игр — математическая (модель) теории конфликтных ситуаций, занимается принятием решений в этих ситуациях двумя или более противниками, каждый из которых стремится оптимизировать свои решения за счет других.

Игра — это совокупность правил, определяющих сущность конфликтной ситуации, которые устанавливают:

- а) выбор способа действия игроками на каждом этапе игры;
- б) информацию, которой обладает каждый игрок при выполнении таких выборов;
- в) плату для каждого игрока после завершения любого этапа игры.

- От реальной конфликтной ситуации игра отличается тем, что ведется по вполне определенным **правилам**. Человечество издавна пользуется такими формализованными моделями конфликтных ситуаций, которые являются *играми* в буквальном смысле слова.
- Примерами могут служить шахматы, шашки, карточные игры и т.д. Все эти игры носят характер соревнования, протекающего по известным правилам и заканчивающегося "победой" (выигрышем) того или иного игрока.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

- Основными понятиями теории игр являются: **конфликтующие стороны**, называемые **игроками**, одна реализация игры — **партией** и набор ее возможных конечных состояний, называемых **исходом игры**, — это **Выигрыш**, **ничья** или **проигрыш**. Игрокам (участникам игры) известны **Платежи** в виде матрицы $A = \{a_{ik}\}$.
- Развитие игры во времени проходит последовательно по этапам (ходам). **Ходом** в теории игр называется выбор одного из правил действия, предусмотренных игрой, и его реализацию. Ходы бывают **личные** и **случайные**.

- **Игра с нулевой суммой** - парная игра, в которой выигрыш одного из игроков равен проигрышу другого.
- Игра называется *игрой с нулевой суммой*, если один игрок выигрывает то, что проигрывает другой, т. е. сумма выигрышей обеих сторон равна нулю. В игре с нулевой суммой интересы игроков прямо противоположны.
- Так как в игре с нулевой суммой выигрыш одного из игроков равен выигрышу другого с противоположным знаком, то, очевидно, при анализе такой игры можно рассматривать выигрыш только одного из игроков. Пусть это будет, например, игрок А. В дальнейшем мы для удобства сторону А будем условно именовать "мы", а сторону В - "противник".
- При этом сторона А ("мы") будет всегда рассматриваться как "выигрывающая", а сторона В ("противник") как "проигрывающая". Это формальное условие, очевидно, не означает какого-либо реального преимущества для первого игрока; легко видеть, что оно заменяется противоположным, если знак выигрыша изменить на обратный.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

- **Личным ходом** называют сознательный выбор игроком одного из вариантов действия и его осуществление.

Пример личного хода - любой из ходов в шахматной игре. Выполняя очередной ход, игрок делает сознательный выбор одного из вариантов, возможных при данном расположении фигур на доске.

Набор возможных вариантов при каждом личном ходе регламентирован правилами игры и зависит от всей совокупности предшествующих ходов обеих сторон.

Случайным ходом называют выбор, выполняемый не волевым решением игрока, а каким-либо способом случайного выбора, например, бросание монеты, сдача карт, вращение барабана рулетки и т.д.

Например, сдача первой карты одному из игроков в преферанс есть случайный ход с 32 равновозможными вариантами. Чтобы игра была математически определенной, правила игры должны указывать для каждого случайного хода *распределение вероятностей* возможных исходов. Некоторые игры могут состоять только из случайных ходов (так называемые чисто азартные игры) или только из личных ходов (шахматы, шашки). Большинство карточных игр принадлежит к играм смешанного типа, т. е. содержит как случайные, так и личные ходы.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

- Одним из основных показателей теории игр является **стратегия**.
- **Стратегией игрока** называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе этого игрока от начала до окончания игры.
- **Оптимальной** называется такая стратегия игрока, которая при многократном проведении игры обеспечивает игроку максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний проигрыш.

- Обычно решение (выбор) при каждом личном ходе принимается игроком в ходе самой игры в зависимости от сложившейся конкретной ситуации. Однако теоретически дело не изменится, если мы представим себе, что все эти решения принимаются игроком *заранее*. Для этого игрок должен был бы заблаговременно составить перечень всех возможных в ходе игры ситуаций и предусмотреть свое решение для каждой из них. В принципе (если не практически) это возможно для любой игры. Если такая система решений будет принята, это будет означать, что игрок выбрал определенную *стратегию*.
- Игрок, выбравший стратегию, может теперь не участвовать в игре лично, а заменить свое участие списком правил, которые за него будет применять какое-либо незаинтересованное лицо (судья). Стратегия может быть также задана машине-автомату в виде определенной программы. Именно так в настоящее время играют в шахматы электронные счетные машины.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

- В зависимости от причин, вызывающих неопределенность исходов, игры делят на основные группы:
- **Комбинаторные игры**, в которых правила позволяют каждому игроку проанализировать все разнообразные ходы и выбрать тот из них, который ведет к лучшему исходу для этого игрока. Неопределенность исхода связана с тем, что количество ходов слишком велико и практически игрок не в состоянии их перебрать и проанализировать. К таким играм относятся шахматы, шашки и др.
- **Азартные игры** — это игры, источником неопределенности которых являются случайные факторы. Эти игры состоят из случайных ходов, при анализе которых применяется теория вероятностей. К ним относятся рулетка, игра в кости, отгадывание стороны выпадения монеты и т.д.
- **Стратегическими играми** являются такие, в которых неопределенность исхода вызвана тем, что каждый из игроков, принимая решение о выборе предстоящего хода, не знает, какой стратегии будут придерживаться другие участники игры. Такие игры изучает теория игр.

- Игры классифицируются не только по характеру ходов (личные, случайные), но и по характеру, и по объему информации, доступной каждому игроку относительно действий другого. Особый класс игр составляют так называемые "игры с полной информацией".
- ***Игрой с полной информацией*** называется игра, в которой каждый игрок при каждом личном ходе знает результаты всех предыдущих ходов, как личных, так и случайных. Примерами игр с полной информацией могут служить шахматы, шашки, а также известная игра "крестики и нолики".
- Большинство игр, имеющих практическое значение, не принадлежит к классу игр с полной информацией, так как неизвестность по поводу действий противника обычно является существенным элементом конфликтных ситуаций.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

В игре могут сталкиваться интересы двух или более игроков. Если в игре участвуют два игрока, то игра называется **парной**, если число игроков больше двух, то она называется **множественной**.

Различают игры по сумме выигрыша.

- Игра называется **с нулевой суммой**, если один игрок выигрывает за счет другого, а сумма выигрыша одного равна проигрышу другого.
- Парная игра с нулевой суммой называется **антагонистической**, так как интересы игроков прямо противоположны.
- Наиболее полно исследованы в теории игр антагонистические игры.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

В зависимости от количества возможных стратегий игры делятся на конечные и бесконечные.

Игра называется **конечной**, если у каждого игрока имеется только конечное число стратегий.

Игра называется **бесконечной**, если хотя бы у одного игрока имеется бесконечное число стратегий.

По количеству ходов, которые выполняют игроки для достижения определенных целей, игры бывают **одношаговые** и **многошаговые**.

Одношаговые игры состоят в том, что игрок делает один ход. В многошаговых — игроки выполняют последовательно ряд ходов согласно правилам игры.

Платежная матрица

В зависимости от числа возможных стратегий игры делятся на "конечные" и "бесконечные".

Конечной называется игра, в которой у каждого игрока имеется только конечное число стратегий.

Конечная игра, в которой игрок **A** имеет m стратегий, а игрок **B** - n стратегий, называется игрой $m \times n$.

Рассмотрим игру $m \times n$ двух игроков **A** и **B** ("мы" и "противник").

Будем обозначать наши стратегии A_1, A_2, \dots, A_m ; стратегии противника – B_1, B_2, \dots, B_n .

Платежная матрица

- Если игра состоит только из личных ходов, то выбор стратегий A_i, B_j однозначно определяет исход игры - наш выигрыш. Обозначим его α_{ij}
- Если игра содержит, кроме личных, случайные ходы, то выигрыш при паре стратегий A_i, B_j есть величина случайная, зависящая от исходов всех случайных ходов. В этом случае естественной оценкой ожидаемого выигрыша является его *среднее значение* (математическое ожидание). Мы будем обозначать одним и тем же знаком α_{ij} как сам выигрыш (в игре без случайных ходов), так и его среднее значение (в игре со случайными ходами).

Платежная матрица

- Пусть нам известны значения α_{ij} , выигрыша (или среднего выигрыша) при каждой паре стратегий. Значения α_{ij} , можно записать в виде прямоугольной таблицы (матрицы), строки которой соответствуют нашим стратегиям (A_i), а столбцы - стратегиям противника (B_j). Такая таблица называется *платежной матрицей* или *просто матрицей игры*.
- **Матрица игры (платежная матрица)** - таблица, в которой заданы стратегии игроков и платежи.

Платежная матрица

Матрица игры $m \times n$ имеет вид:

	B	B1	B2	...	Bn
A					
A1		α_{11}	α_{12}	...	α_{1n}
A2		α_{21}	α_{22}		α_{2n}
		\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
		\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
		\cdot	\cdot	\cdot	\cdot
Am		α_{m1}	α_{m2}	...	α_{mn}

Сокращенно мы будем обозначать матрицу игры $|| \alpha_{ij} ||$

ПОСТАНОВКА ИГРОВЫХ ЗАДАЧ

- *Оптимальной стратегией* игрока в теории игр называется такая стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш (или, что то же самое, минимально возможный средний проигрыш). При выборе этой стратегии основой рассуждений является предположение, что противник является по меньшей мере таким же разумным, как и мы сами, и делает все для того, чтобы помешать нам добиться своей цели.
- В теории игр все рекомендации вырабатывают, исходя именно из этих принципов; следовательно, в ней не учитываются элементы риска, неизбежно присутствующие в каждой реальной стратегии, а также возможные просчеты и ошибки каждого из игроков.

Платежная матрица

Теория игр, как и всякая математическая модель сложного явления, имеет свои ограничения. Важнейшим из них является то, что выигрыш искусственно сводится к одному-единственному числу. В большинстве практических конфликтных ситуаций при выработке разумной стратегии приходится принимать во внимание не один, а несколько численных параметров-критериев успешности мероприятия.

Стратегия, являющаяся оптимальной по одному критерию, необязательно будет оптимальной по другим.

Однако, сознавая эти ограничения и не придерживаясь слепо рекомендаций, получаемых игровыми методами, можно все же разумно использовать математический аппарат теории игр для выработки если не в точности "оптимальной", то, во всяком случае, "приемлемой" стратегии.

Нижняя и верхняя цена игры

Рассмотрим игру $m \times n$ со следующей матрицей:

	B	B1	B2	...	Bn
A					
A1		α_{11}	α_{12}	...	α_{1n}
A2		α_{21}	α_{22}		α_{2n}
	·	·	·	·	·
	·	·	·	·	·
	·	·	·	·	·
Am		α_{m1}	α_{m2}	...	α_{mn}

Нижняя и верхняя цена игры

- Будем обозначать буквой i номер нашей стратегии; буквой j - номер стратегии противника.
- Поставим себе задачу: определить свою оптимальную стратегию. Проанализируем последовательно каждую из наших стратегий, начиная с A_i . Выбирая стратегию A_i , мы всегда должны рассчитывать на то, что противник ответит на нее одной из стратегий B_j , для которой наш выигрыш α_{ij} минимален. Определим это значение выигрыша, т. е. минимальное из чисел α_{ij} в i -ой строке. Обозначим его α_i $\alpha_i = \min_j \alpha_{ij}$

Нижняя и верхняя цена игры

Здесь знаком \min (минимум по j) обозначено минимальное из значений данного параметра при всех возможных j . Выпишем числа α_j рядом с матрицей справа в виде добавочного столбца:

A	B	B₁	B₂	...	B_n	α_i
A1		α_{11}	α_{12}	...	α_{1n}	α_1
A2		α_{21}	α_{22}		α_{2n}	α_2
.		
.		
.						
A_m		α_{m1}	α_{m2}	...	α_{mn}	α_m
β_i		β_1	β_2		β_m	

Нижняя и верхняя цена игры

Выбирая какую-либо стратегию A_i , мы должны рассчитывать на то, что в результате разумных действий противника мы не выиграем больше чем α_i . Естественно, что, действуя наиболее осторожно и рассчитывая на наиболее разумного противника (т.е. избегая всякого риска), мы должны остановиться на той стратегии A_i для которой число α_i является максимальным. Обозначим это максимальное значение α : $\alpha = \max_i \alpha_i$ или, принимая во внимание формулу $\alpha = \max_i \min_j \alpha_{ij}$

Нижняя и верхняя цена игры

- Величина α называется *нижней ценой игры*; иначе - *максиминным выигрышем* или просто **максимином**.
- Число α лежит в определенной строчке матрицы; та стратегия игрока **A**, которая соответствует этой строчке, называется **максиминной стратегией**.
- Очевидно, если мы будем придерживаться максиминной стратегии, то нам при любом поведении противника *гарантирован выигрыш, во всяком случае не меньший α* . Поэтому величина α и называется "нижней ценой игры".
Нижняя цена игры (максимин) - гарантированный выигрыш игрока **A** при любой стратегии игрока **B**. Это - тот гарантированный минимум, который мы можем себе обеспечить, придерживаясь наиболее осторожной ("перестраховочной") стратегии.

Нижняя и верхняя цена игры

Очевидно, аналогичное рассуждение можно провести и за противника **B**. Так как противник заинтересован в том, чтобы обратить наш выигрыш в минимум, он должен просмотреть каждую свою стратегию с точки зрения максимального выигрыша при этой стратегии. Поэтому внизу матрицы мы выпишем максимальные значения α_{ij} по каждому столбцу: $\beta = \max_i \alpha_{ij}$ и найдем минимальное из β_j : $\beta = \min_j \beta_j$ или $\beta = \min_j \max_i \alpha_{ij}$

Нижняя и верхняя цена игры

- Величина β называется **верхней ценой игры**, иначе - "**минимаксом**". Соответствующая минимаксному выигрышу стратегия противника называется его "**минимаксной стратегией**".
- Придерживаясь своей наиболее осторожной минимаксной стратегии, противник гарантирует себе следующее: что бы мы ни предприняли против него, *он во всяком случае проиграет сумму не большую чем β* .
- **Верхняя цена игры (минимакс)** - гарантированный проигрыш игрока **B** .
- **Принцип осторожности**, диктующий игрокам выбор соответствующих стратегий (максиминной и минимаксной), в теории игр и ее приложениях часто называют "**принципом мини-макса**". Наиболее осторожные максиминную и минимаксную стратегии игроков иногда обозначают общим термином "**минимаксные стратегии**".

Принцип минимакса - основной принцип теории игр, диктующий игрокам выбор наиболее "осторожных" стратегий.

Нижняя и верхняя цена игры

- **Седловая точка** - платеж, который одновременно является наибольшим в своем столбце и наименьшим в своей строке. Пара чистых стратегий, которым соответствует седловая точка, дают оптимальное решение игры.
- Седловой точке соответствует пара минимаксных стратегий (в данном примере A_3 и B_2). Эти стратегии называются *оптимальными*, а их совокупность - *решением игры*.
- Решение игры обладает следующим замечательным свойством. Если один из игроков (например, A) придерживается своей оптимальной стратегии, а другой игрок (B) будет любым способом отклоняться от своей оптимальной стратегии, то для игрока, допустившего отклонение, это никогда не может оказаться *выгодным*; такое отклонение игрока B может в лучшем случае оставить выигрыш неизменным, а в худшем случае - увеличить его.

Нижняя и верхняя цена игры

- Наоборот, если **B** придерживается своей оптимальной стратегии, а **A** отклоняется от своей, то это ни в коем случае не может быть выгодным для **A**.
- Это утверждение легко проверить на примере рассматриваемой игры с седловой точкой.
- Мы видим, что в случае игры с седловой точкой минимаксные стратегии обладают своеобразной "устойчивостью": если одна сторона придерживается своей минимаксной стратегии, то для другой может быть только невыгодным отклоняться от своей. Заметим, что в этом случае наличие у любого игрока сведений о том, что противник избрал свою оптимальную стратегию, не может изменить собственного поведения игрока: если он не хочет действовать против своих же интересов, он должен придерживаться своей оптимальной стратегии. Пара оптимальных стратегий в игре с седловой точкой является как бы "положением равновесия": любое отклонение от оптимальной стратегии приводит отклоняющегося игрока к невыгодным последствиям, вынуждающим его вернуться в исходное положение.

Нижняя и верхняя цена игры

Итак, для каждой игры с седловой точкой существует решение, определяющее пару оптимальных стратегий обеих сторон, отличающуюся следующими свойствами.

- 1. Если обе стороны придерживаются своих оптимальных стратегий, то средний выигрыш равен чистой цене игры p , одновременно являющейся ее нижней и верхней ценой.
- 2. Если одна из сторон придерживается своей оптимальной стратегии, а другая отклоняется от своей, то от этого отклоняющаяся сторона может только потерять и ни в коем случае не может увеличить свой выигрыш.
- Класс игр, имеющих седловую точку, представляет большой интерес как с теоретической, так и с практической точки зрения.

Нижняя и верхняя цена игры

В теории игр доказывається, что, в частности, каждая игра с полной информацией имеет седловую точку, и, следовательно, каждая такая игра имеет решение, т. е. существует пара оптимальных стратегий той и другой стороны, дающая средний выигрыш, равный цене игры. Если игра с полной информацией состоит только из личных ходов, то при применении каждой стороной своей оптимальной стратегии она должна всегда кончаться вполне определенным исходом, а именно, выигрышем, в точности равным цене игры.

Решение игры в смешанных стратегиях

Среди конечных игр, имеющих практическое значение, сравнительно редко встречаются игры с седловой точкой; более типичным является случай, когда нижняя и верхняя цена игры различны. Если каждому игроку предоставлен выбор одной-единственной стратегии, то в расчете на разумно действующего противника этот выбор должен определяться принципом минимакса.

Придерживаясь своей максиминной стратегии, мы при любом поведении противника заведомо гарантируем себе выигрыш, равный нижней цене игры α . Возникает естественный вопрос: нельзя ли гарантировать себе средний выигрыш, больший α , если применять не одну-единственную "чистую" стратегию, а чередовать случайным образом несколько стратегий?

Решение игры в смешанных стратегиях

- Такие комбинированные стратегии, состоящие в применении нескольких чистых стратегий, чередующихся по случайному закону с определенным соотношением частот, в теории игр называются **смешанными стратегиями**.
- Очевидно, каждая чистая стратегия является частным случаем смешанной, в которой все стратегии, кроме одной, применяются с нулевыми частотами, а данная - с частотой 1.
- Оказывается, что применяя не только чистые, но и смешанные стратегии, можно для каждой конечной игры получить решение, т. е. пару таких (в общем случае смешанных) стратегий, что при применении их обоими игроками выигрыш будет равен цене игры, а при любом одностороннем отклонении от оптимальной стратегии выигрыш может измениться только в сторону, невыгодную для отклоняющегося.
- Высказанное утверждение составляет содержание так называемой **основной теоремы теории игр**. Эта теорема была впервые доказана **фон Нейманом** в 1928 г. Приведем ее формулировку.

Каждая конечная игра имеет, по крайней мере, одно решение (возможно, в области смешанных стратегий).

Решение игры в смешанных стратегиях

- Выигрыш, получаемый в результате решения, называется ценой игры. Из основной теоремы следует, что каждая конечная игра имеет цену. Очевидно, что цена игры v всегда лежит между нижней ценой игры α и верхней ценой игры β :

$$\alpha \leq v \leq \beta$$

- Действительно, α есть максимальный гарантированный выигрыш, который мы можем себе обеспечить, применяя только свои чистые стратегии. Так как смешанные стратегии включают в себя в качестве частного случая и все чистые, то, допуская, кроме чистых, еще и смешанные стратегии, мы, во всяком случае, не ухудшаем своих возможностей; следовательно, $v \geq \alpha$

Решение игры в смешанных стратегиях

Аналогично, рассматривая возможности противника, покажем, что $v \leq \beta$

Введем специальное обозначение для смешанных стратегий. Если, например, наша смешанная стратегия состоит в применении стратегий A_1, A_2, A_3 частотами p_1, p_2, p_3 , причем $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, будем обозначать



Аналогично стратегию противника будем обозначать где q_1, q_2, q_3 - частоты,



в которых

смешиваются

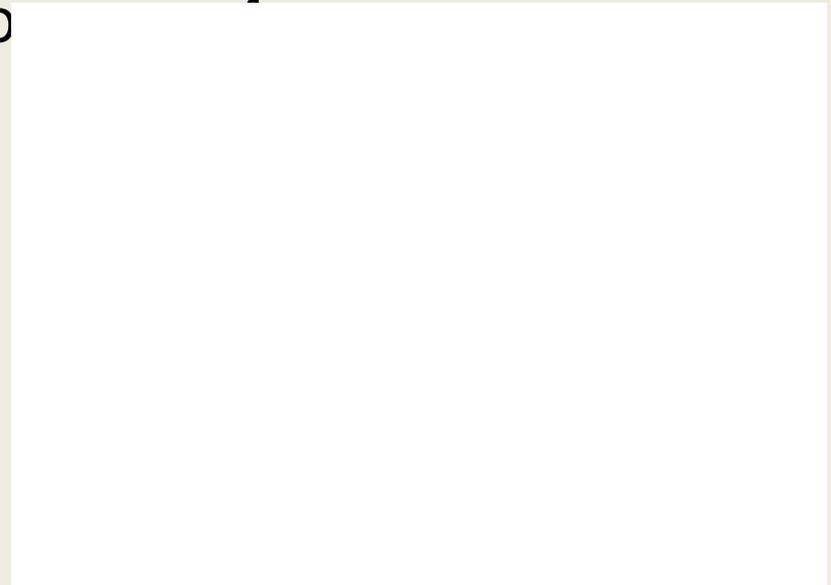
стратегии $B_1, B_2, B_3 : q_1 + q_2 + q_3$

Решение игры в смешанных стратегиях

- Предположим, что нами найдено решение игры, состоящее из двух оптимальных смешанных стратегий s_A^* , (s_B^*) . В общем случае не все чистые стратегии, доступные данному игроку, входят в его оптимальную смешанную стратегию, а только некоторые. Будем называть стратегии, входящие в оптимальную смешанную стратегию игрока, его "полезными" стратегиями.
- Оказывается, что решение игры обладает еще одним замечательным свойством: *если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии s_A^* (s_B^*), то выигрыш остается неизменным и равным цене игры v , независимо от того, что делает другой игрок, если он только не выходит за пределы своих "полезных" стратегий.* Он, например, может пользоваться любой из своих "полезных" стратегий в чистом виде, а также может смешивать их в любых пропорциях.

ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ИГР

Решение матричной игры, платежная матрица которой имеет размерность 2×2 , может быть представлено графически. В координатных осях XOY рис. по оси абсцисс откладывается единичный отрезок, левый конец которого (точка $x = 0$) соответствует стратегии A_1 , а правый (точка $x = 1$) — стр



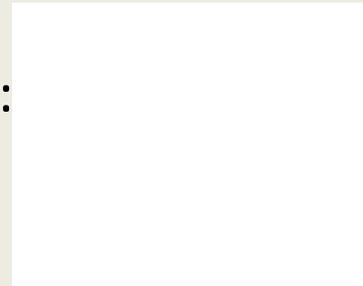
ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ИГР

- Промежуточные точки x_i соответствуют вероятностям смешанных стратегий игрока I, то есть $X = (x_1, x_2)$. На осях Y и Y' откладываются выигрыши при стратегиях A_1 и A_2 соответственно. Если игрок II принимает стратегию B_1 то выигрыш игрока I при использовании чистых стратегий A_1 и A_2 составляет a_{11} и a_{21} соответственно. Соединим точки $(0, a_{11})$ и $(1, a_{21})$ отрезком (рис.), который называется стратегией B_1 игрока II.
- На этом же графике отмечаются значения a_{12} на оси Y' и a_{22} на оси Y , которые соответствуют стратегии B_2 игрока II. Ординаты точек отрезка $(0, a_{12})$ и $(1, a_{22})$ соответствуют среднему выигрышу игрока I при применении им чистых стратегий A_1 и A_2 с соответствующими вероятностями x_1 и x_2 . Точка пересечения отрезков $(0, a_{12})$ и $(1, a_{22})$ является точкой максимина (точка K рис.).

ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ИГР

Отрезок KM соответствует цене игры, равной V , которую выигрывает игрок I. Ломанная  определяет нижнюю границу игры.

Пусть платежная матрица имеет вид:



Определить вероятности игроков x_1, x_2 и, y_1, y_2 цену игры V ;
Для определения вероятности x_1 и x_2 игрока I измеряем отрезки OM и OM , учитывая масштаб построения графика. Вероятности игрока II определяе 

На рис. указаны верхняя и нижняя цены игры β и α , а выигрыш игрока I составляет $V = KM$ в соответствующем масштабе.

Решение игры 2x2

Найти оптимальные стратегии игроков и цену игры, если платежная матрица C имеет размерность 2×2 , то есть



Решение игры 2x2

Решение

1. Определяем нижнюю и верхнюю цены игры, применяя максимальную и минимаксную стратегии:

Так как $\alpha \neq \beta$ то седловая точка отсутствует и решение определяем в смешанных стратегиях, вычисляя вероятности соответствующих стратегий.

- 2. Задачу решаем графически в координатных осях XOY с позиции игрока I, откладывая значения стратегий B_1 и B_2 на осях Y и Y' (рис.).

Решение игры 2x2



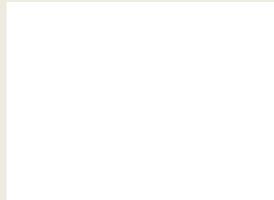
Соединим точки с ординатами 9 и 3 отрезком A_1A_2 , а точки 4 и 6 отрезком A_2A_1 расположенные на координатных осях Y_i соответственно. Точка пересечения k этих отрезков определяет решение задачи. Проектируя точку k на координатные оси x и определяем искомые вероятности X и Y для игроков I и II. Для этого измеряем отрезки $MA_2 = x_1$, $A_1M = x_2$ и $KM = V$ — цена игры.

Решение игры 2x2

Вероятности y_1 и y_2 определяем по формулам:



Составляем системы уравнений для определения вероятностей смешанных стратегий и цену игры для игроков I и II на основании платежной матрицы:

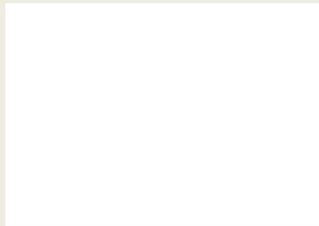


Решение игры 2x2

игрок I



игрок II



Решая системы уравнений, определяем вероятности X и Y и цену игры V :



Решение игры 2x2

Смешанные стратегии имеют вид:

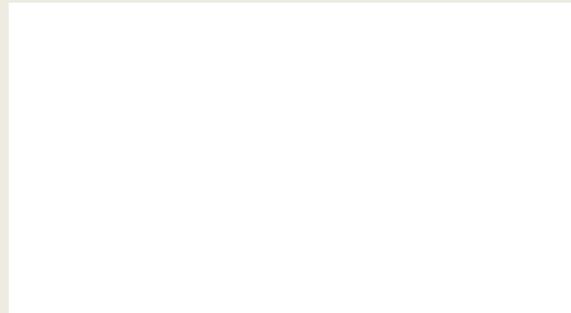
или

Ответ:

ИГРА С ПРИРОДОЙ

Матричная игра двух лиц, у которой действия одного из игроков являются случайными, а возможные стратегии определяются как ее состояние, называются играми с природой.

Например, природой можно считать условия погоды в соответствующем районе, спрос на определенную продукцию, объем перевозок и т.д. Условия игры с природой задаются в виде матрицы A :



ИГРА С ПРИРОДОЙ

- Элемент матрицы a_{ij} равен выигрышу игрока I, если он использует стратегию S_i в состоянии природы ω_j .

При решении задач игры с природой используют критерии для выбора оптимальных стратегий. Рассмотрим некоторые из них.

1. Критерий максимального математического ожидания (вероятностных оценок).

Если вероятности состояний природы P_j известны, то критерием принятия решений является максимум математического ожидания выигрыша (минимум математического ожидания риска):

ИГРА С ПРИРОДОЙ

где \bar{a}_i — математическое ожидание выигрыша, p_j — вероятность состояния «природы», a_{ij} — элементы чистой стратегии i -той платежной матрицы A ; r_{ij} — элементы i -той стратегии матрицы риска R .

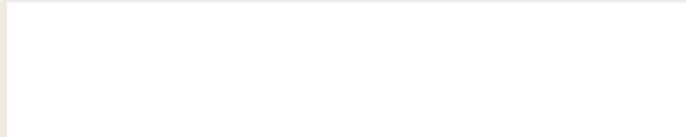
- 2. Максиминный критерий Вальда. Этот критерий пессимизма, при котором выбирается стратегия, позволяющая получить выигрыш не меньше, чем

ИГРА С ПРИРОДОЙ

2. Максиминный критерий Вальда. Этот критерий пессимизма, при котором выбирается стратегия, позволяющая получить выигрыш не меньше, чем



3. Критерий Гурвица определяет оптимальную стратегию по формуле



где α — коэффициент пессимизма-оптимизма, величина которого определяется из субъективных соображений / условия

ИГРА С ПРИРОДОЙ

4. Критерий минимального риска Севиджа, согласно которому выбирают стратегию, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации, т.е.



Игрок ориентируется при этом не на выигрыш, а на минимально возможный риск потерь в связи с недостаточной информацией о реальной ситуации.