Глава 3
Динамика механической системы и твердого тела

§ 9. Теорема об изменении момента количества движения системы

- Главным моментом количества движения, или кинетическим моментом системы, относительно данного центра О называется величина, равная геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра

$$\bar{K}_O = \sum_k \overline{mom_O}\left(m_k \bar{V}_k\right) = \sum_k \bar{r}_k \times \left(m_k \bar{V}_k\right)$$

- Моментом количества движения системы относительно координатной оси X называется величина

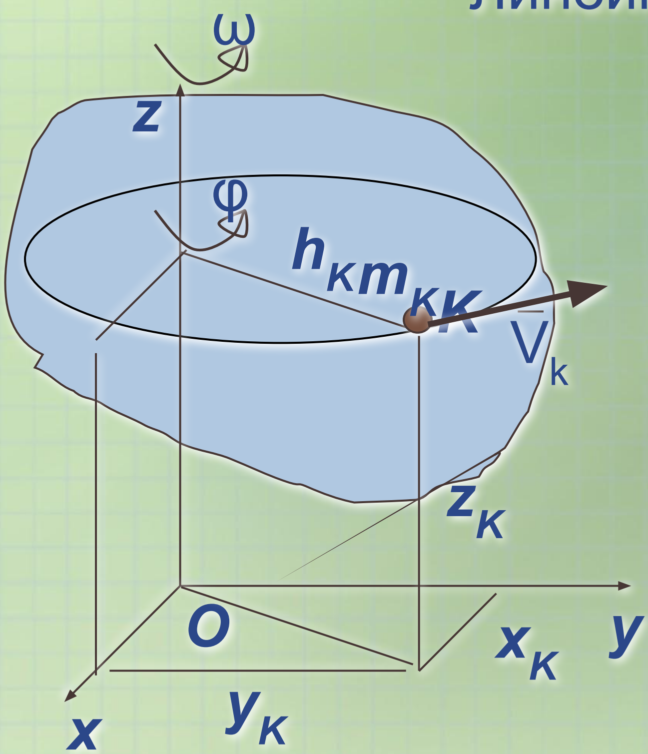
$$K_{OX} = \sum_k mom_{OX}\left(m_k \bar{V}_k\right)$$

Оси Y: $$K_{OY} = \sum_k mom_{OY}\left(m_k \bar{V}_k\right)$$

Оси Z: $$K_{OZ} = \sum_k mom_{OZ}\left(m_k \bar{V}_k\right)$$

Рассмотрим главный момент количества движения вращающегося тела с угловой скоростью ω

Линейная скорость точки К: $V_k = \omega h_k$



Моментом количества движения относительно оси Z

$$mom_{OZ}\left(m_k \overline{V}_k\right) = m_k V_k \cdot h_k = m_k \omega \cdot h_k^2,$$

для всего тела

$$K_{OZ} = \sum_k mom_{OZ}\left(m_k \overline{V}_k\right) = \sum_k m_k \omega\, h_k^2,$$

величина $J_Z = \sum_k m_k \cdot h_k^2$

- момент инерции тела относительно оси Z
- *кинетический момент вращающегося тела* относительно оси Z

$$\boxed{K_{OZ} = J_Z \cdot \omega} \qquad (4)$$

Если система состоит из нескольких тел, вращающихся вокруг одной оси ***Z****, то кинетический момент системы будет*

$$K_{Z}^{сист} = J_{1Z} \cdot \omega_1 + J_{2Z} \cdot \omega_2 + \ldots + J_{nZ} \cdot \omega_n$$

Если тело поворачивается вокруг мгновенной оси вращения ***Oℓ*** *с угловой скоростью* ***ω****, то кинетический момент такого тела*

$$K_{O\ell} = J_{O\ell} \cdot \omega$$

Сопоставляя момент количества движения тела $\bar{K}$ и количество движения $\bar{Q}$ видим, что момент инерции тел J является мерой инертности тел при вращении

Моменты количества движения относительно осей ***X*** *и* ***Y***

$$K_X = -J_{zx} \cdot \omega \qquad K_Y = -J_{yz} \cdot \omega$$

J_{zx}, J_{yz} - центробежные моменты инерции

Докажем эти выражения. Проекции скорости на оси X и Y

$$V_{kx} = -V_k \sin\varphi = -\frac{V_k y_k}{h_k} = -\omega y_k$$

$$V_{ky} = V_k \cos\varphi = \frac{V_k x_k}{h_k} = \omega x_k ,$$

тогда

$$K_X = \sum_k mom_X\left(m_k \bar{V}_k\right) = -\sum_k z_k m_k V_{ky} = -\omega \sum_k m_k z_k x_k = -\omega J_{zx}$$

$$K_Y = \sum_k mom_Y\left(m_k \bar{V}_k\right) = \sum_k z_k m_k V_{kx} = -\omega \sum_k m_k z_k y_k = -\omega J_{zy}$$

В общем случае вектор $\bar{K}_O$ не направлен по оси *OZ*

Но если ось *OZ* будет главной осью инерции тела (осью симметрии тела), то

$$J_{xz} = J_{yz} = 0, \Rightarrow \quad K_X = K_Y = 0 \qquad \text{и} \qquad K_O = K_Z = J_Z\,\omega$$

Если тело вращается вокруг оси, являющейся главной осью инерции тела, то вектор $\bar{K}_O$ *направлен вдоль оси вращения и численно равен*

$$K_O = K_Z = J_Z\,\omega$$

Теорема моментов, доказанная для одной точки системы, будет справедлива для каждой из них Рассмотрим точку системы с массой m_k, имеющую скорость V_k, то для неё

$$\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{mom}_O\left(m_k\vec{V}_k\right)\right] = \overrightarrow{mom}_O\left(\vec{F}_k^e\right) + \overrightarrow{mom}_O\left(\vec{F}_k^i\right)$$

Составляя такие уравнения для всех точек системы и складывая почленно, получим

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_k mom_O\left(m_k\bar{V}_k\right)\right]=\sum_k mom_O\left(\bar{F}_k^e\right)+\sum_k mom_O\left(\bar{F}_k^i\right),$$

по свойству внутренних сил системы $\sum_k mom_O\left(\bar{F}_k^i\right)=0$

Тогда

$$\boxed{\frac{dK_O}{dt}=\sum_k mom_O\left(\bar{F}_k^e\right)} \qquad (5)$$

Теорема моментов для системы

Производная по времени от главного момента количеств движения системы относительно некоторого неподвижного центра равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра

Проектируем обе части равенства (5) на неподвижные оси Oxyz, получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{dK_X}{dt} &= \sum_k mom_X\left(\bar{F}_k^e\right) \\ \frac{dK_Y}{dt} &= \sum_k mom_Y\left(\bar{F}_k^e\right) \\ \frac{dK_Z}{dt} &= \sum_k mom_Z\left(\bar{F}_k^e\right) \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

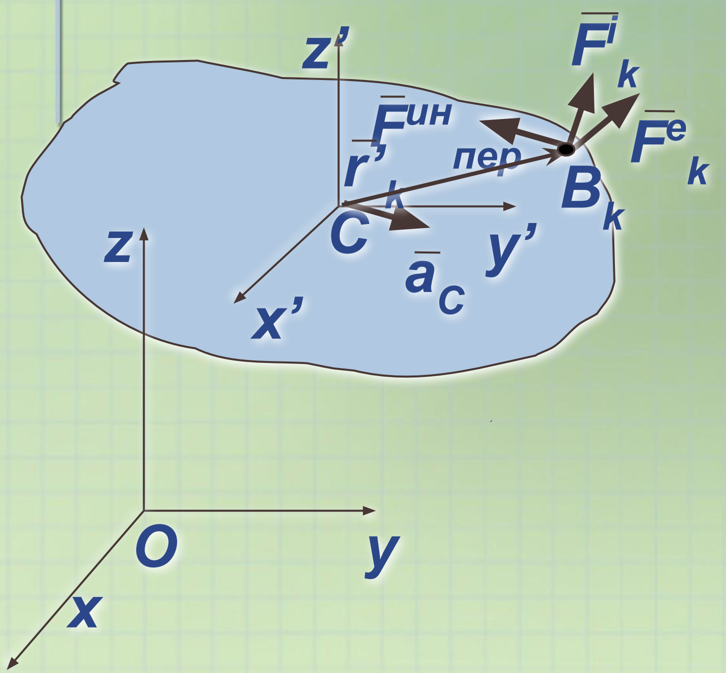
Уравнения (6) выражают теорему моментов относительно любой неподвижной оси

Практическая ценность теоремы моментов позволяет исключать из рассмотрения все наперед неизвестные внутренние силы

9.1. Плоско-параллельное движение или движение свободного твердого тела

Пусть Oxyz – неподвижные оси координат, по отношению к которым движется рассматриваемая механическая система

Cx’y’z’ – оси, перемещающиеся поступательно вместе с центром масс системы **C** с ускорением $\overline{a}_C$, равным ускорению центра масс



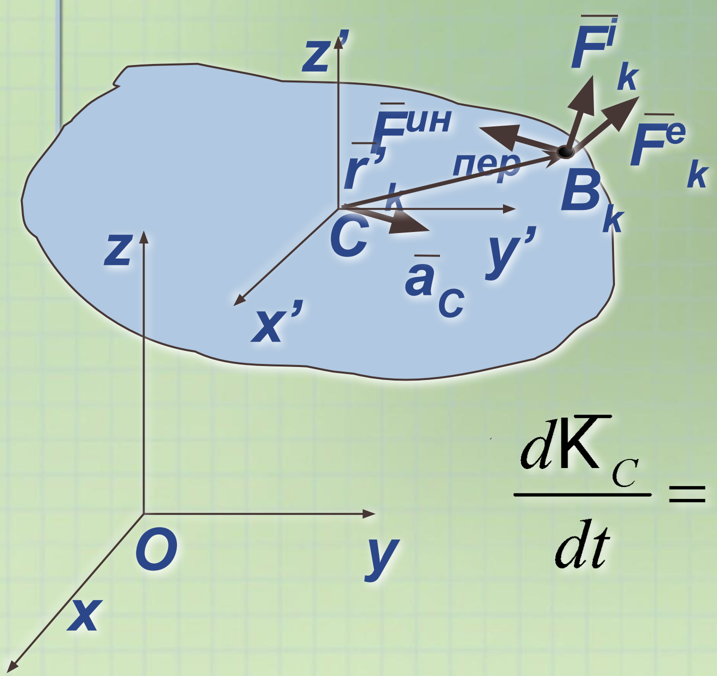
Для точки $\boldsymbol{B_k}$ можем записать теорему моментов относительно неподвижной точки ***O***

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{mom_O}\left(m_k \overline{V}_k\right)\right) = \overline{mom_O}\left(\overline{F}^e_k\right), \quad (7)$$

Относительно точки ***C*** необходимо добавить переносную силу инерции

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{mom_C}\left(m_k\overline{V}'_k\right)\right)=\overline{mom_C}\left(\overline{F}_k^e\right)+\overline{mom_C}\left(\overline{F}_{пер}^{ин}\right) \qquad (8)$$

т.к. $\overline{mom_O}\left(\overline{F}_k^i\right)=\overline{mom_C}\left(\overline{F}_k^i\right)=0$



Просуммируем по всем точкам тела уравнения (7) и (8)

$$\frac{dK_O}{dt}=\sum_k \overline{mom_O}\left(\overline{F}_k^e\right)$$

$$\frac{dK_C}{dt}=\sum_k \overline{mom_C}\left(\overline{F}_k^{e}\right)+\sum_k \overline{mom_C}\left(\overline{F}_k \qquad\right),$$

причем $\quad K_C = \sum_k \overline{mom_C}\left(m_k \bar{V}'_k\right),$

здесь V'_k – скорости точек системы по отношению к подвижным осям **CX'Y'Z',**

т.к. оси движутся поступательно, то для любой из точек

B_k системы $\bar{a}_{k\,пер} = \bar{a}_C$, тогда $\bar{F}^{ин}_{k\,пер} = -m_k \bar{a}_C$ и

$$\overline{mom_C}\left(\bar{F}^{ин}_{k\,пер}\right) = \bar{r}'_k \times \left(-m_k \bar{a}_C\right) = -m_k \bar{r}_k' \times \bar{a}_C,$$

учтем, что $\quad \sum_k m_k \bar{r}_k' = M \cdot \bar{r}_C'$

$$\sum_k \overline{mom_C}\left(\bar{F}^{ин}_{k\,пер}\right) = -\left(\sum_k m_k \bar{r}'_k\right) \times \bar{a}_C = -M \bar{r}_C' \times \bar{a}_C = 0,$$

т.к. точка C является началом координат CX'Y'Z'

В результате

$$\frac{d\overline{K}_C}{dt} = \sum_k \overline{mom_C}\left(\overline{F}_k^e\right) \qquad (9)$$

Для системы, движущейся свободно или плоско-параллельно, т.е. подвижная система отсчета совершает поступательное движение вместе с центром масс системы, теорема моментов относительно центра масс сохраняет тот же вид, что и относительно неподвижного центра

В любой другой подвижной системе отсчета будет либо $\overline{r}_C{}' \neq 0$, либо не будут равны нулю силы инерции Кориолиса $\overline{F}_{кор}^{ин} \neq 0$, и теорема моментов относительно центра масс не будет совпадать с (5)

Следствия

1. Пусть на механическую систему действуют внешние силы, такие что $$\sum_k \overline{mom_O}\left(\bar{F}_k^e\right) = 0,$$

тогда главный момент количеств движения системы относительно этого же центра будет численно и по направлению постоянен

$$\boxed{\bar{K}_O = \overline{const}}$$

2. Пусть внешние силы, действующие на систему, таковы, что $$\sum_k mom_Z\left(\bar{F}_k^e\right) = 0,$$

тогда главный момент количеств движения системы относительно этой же оси будет величиной постоянной

$$\boxed{K_Z = const}$$

Внутренние силы изменить главный момент количеств движения механической системы не могут!!!

- Рассмотрим систему, вращающуюся вокруг неподвижной (или проходящей через центр масс) оси Z, тогда по (4) $K_Z = J_Z \cdot \omega$ и если

$$\sum_k mom_Z\left(\overline{F}_k^e\right) = 0,$$ то

$$\boxed{J_Z \cdot \omega = const}$$, =>

$$J_Z \cdot \omega = const$$, =>

а) если система не изменяема (абсолютно твердое тело), то

$$J_Z = const \quad \text{и} \quad \omega = const$$

б) если система изменяема, то под действием внутренних или внешних сил отдельные точки системы могут удаляться от оси, что вызовет увеличение момента инерции системы, или приближаться к оси и уменьшить момент инерции

Т.к. $J_Z \cdot \omega = const,$ то при $\uparrow J_z, \downarrow \omega$ и $\downarrow J_z, \uparrow \omega$

§ 10. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Кинетической энергией системы (Т) называется скалярная величина, равная сумме кинетических энергий всех точек системы

$$T = \sum_k \frac{m_k V_k^2}{2} \qquad (10)$$

Кинетическая энергия является характеристикой поступательного и вращательного движений системы

Существенно положительная и не зависит от направления движения частей системы

Если под действием ***внутренних сил*** будут изменяться модули скоростей точек системы, то при этом будет изменяться величина кинетической энергии системы

10.1. Поступательное движение системы

Все точки тела или системы движутся с одинаковыми скоростями, равными скорости центра масс

$$\Rightarrow T_{пост} = \sum_k \frac{m_k V_k^2}{2} = \left(\sum_k m_k\right)\frac{V_C^2}{2} = \frac{MV_C^2}{2}$$

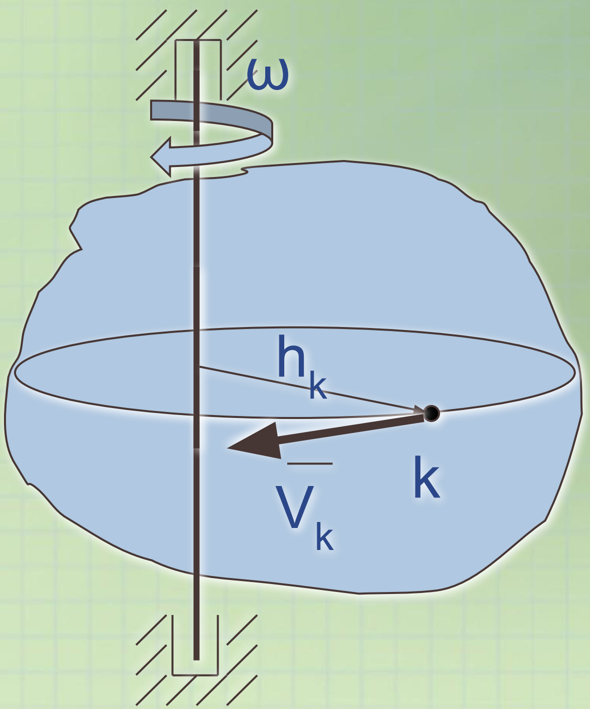
$$\boxed{T_{пост} = \frac{MV_C^2}{2}} \qquad (11)$$

При поступательном движении кинетическая энергия системы равна половине массы системы, умноженной на квадрат скорости её центра масс

10.2. Вращательное движение системы

Если тело вращается вокруг какой-либо оси OZ, то скорость любой его точки $V_k = \omega \cdot h_k$,

где h_k – расстояние от точки до оси вращения, а ω – угловая скорость тела. Подставляя в (10) это значение и выносся общие множители, получим



$$T_{вр} = \sum_k \frac{m_k V_k^2}{2} = \sum_k \frac{m_k h_k^2 \omega^2}{2} =$$

$$= \sum_k \frac{J_{kZ} \omega^2}{2} = \frac{J_Z \omega^2}{2}$$

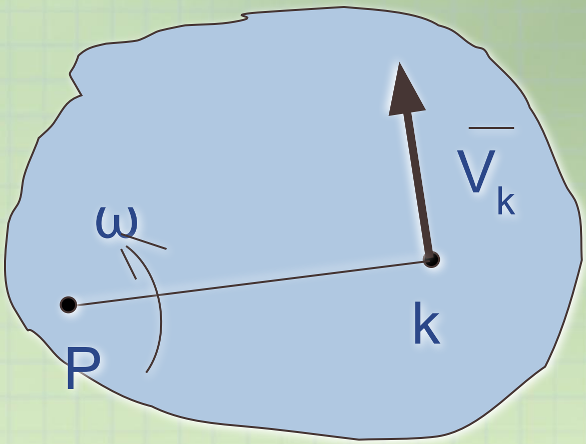
$$\boxed{T_{вр} = \frac{J_Z \omega^2}{2}} \qquad (12)$$

Кинетическая энергия тела, совершающего вращательное движение

10.3. Плоско-параллельное движение системы

Скорости всех точек системы в каждый момент времени распределены так, как если бы тело вращалось вокруг оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через мгновенный центр скоростей (МЦС), тогда

$$T_{nnд} = \frac{J_P\,\omega^2}{2},$$



J_P – момент инерции относительно оси, проходящей через МЦС. Это переменная величина, т.к. МЦС меняется,
ω – мгновенная угловая скорость системы

Введем постоянный момент инерции J_C относительно центра масс $J_P = J_C + M\,d^2,$ здесь d = PC

$$T_{ппд} = \left(J_C + M\,d^2\right)\frac{\omega^2}{2} = \frac{J_C\,\omega^2}{2} + M\,d^2\frac{\omega^2}{2},$$

но $\omega \cdot d = \omega \cdot PC = V_C$ - скорость центра масс

$$\boxed{T_{ппд} = \frac{J_C\,\omega^2}{2} + \frac{M\,V_C^2}{2}} \qquad (13)$$

Кинетическая энергия системы, совершающей плоское движение, складывается из кинетических энергий поступательного движения центра масс и вращательного относительно центра масс

Пусть механическая система совершает некоторое движение, тогда для каждой точки системы должна выполняться теорема об изменении кинетической энергии

$$d\left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right) = dA\left(\bar{F}_k^{\,e}\right) + dA\left(\bar{F}_k^{\,i}\right)$$

Просуммируем по всем точкам системы

$$d\left(\sum_k \frac{m_k V_k^2}{2}\right) = \sum_k dA\left(\bar{F}_k^{\,e}\right) + \sum_k dA\left(\bar{F}_k^{\,i}\right)$$

или

$$\boxed{dT = \sum_k dA\left(\bar{F}_k^{\,e}\right) + \sum_k dA\left(\bar{F}_k^{\,i}\right)} \quad (14)$$

Теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме

Проинтегрируем уравнение (14)

$$dT = \sum_k dA\left(\vec{F}_k^{\,e}\right) + \sum_k dA\left(\vec{F}_k^{\,i}\right)$$

$$\int_{T_0}^{T_1} dT = \sum_k \int_0^s \vec{F}_k^{\,e} \cdot d\vec{r} + \sum_k \int_0^s \vec{F}_k^{\,i} \cdot d\vec{r}$$

или $$\boxed{T_1 - T_0 = \sum A\left(\vec{F}_k^{\,e}\right) + \sum A\left(\vec{F}_k^{\,i}\right)} \quad (15)$$

Теорема об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме

Изменение кинетической энергии системы при некотором её перемещении равно сумме работ на этом же перемещении всех действующих на систему внешних и внутренних сил

§ 11. Некоторые случаи вычисления работ

11.1. Работа сил тяжести, действующих на систему

$$A\left(\vec{P}\right) = \sum_k p_k z_{k0} - \sum_k p_k z_{k1} = P\left(z_{C0} - z_{C1}\right) = \pm P h_C$$

P – вес системы;

h_C – вертикальное перемещение центра масс системы

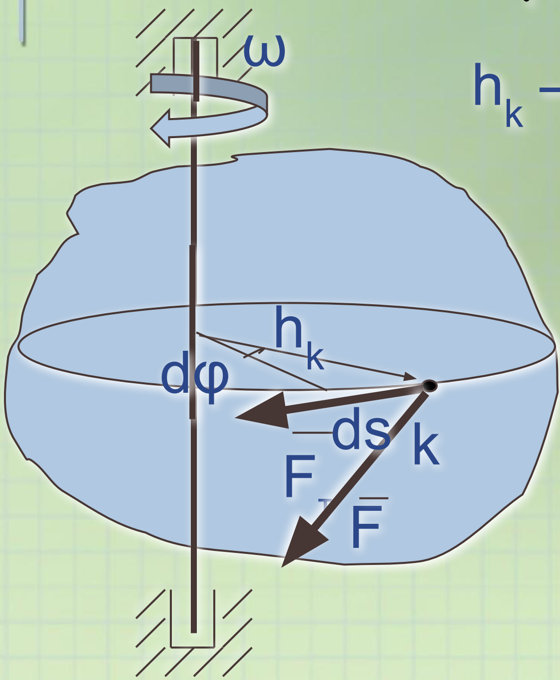
Работа сил тяжести, действующих на систему, есть работа их главного вектора P на перемещении центра масс системы (центра тяжести тела)

$$\boxed{A\left(\vec{P}\right) = \pm P h_C} \qquad (16)$$

11.2. Работа сил, приложенных к вращающемуся телу

Пусть тело вращается вокруг какой-либо оси OZ с угловой скоростью ω. Элементарная работа приложенной к телу силы F

$$dA = F_\tau ds = F_\tau h_k d\varphi = mom_Z\left(\vec{F}\right) d\varphi$$



h_k – расстояние от точки до оси вращения

Будем называть величину

$$M_Z = mom_Z\left(\vec{F}\right)$$

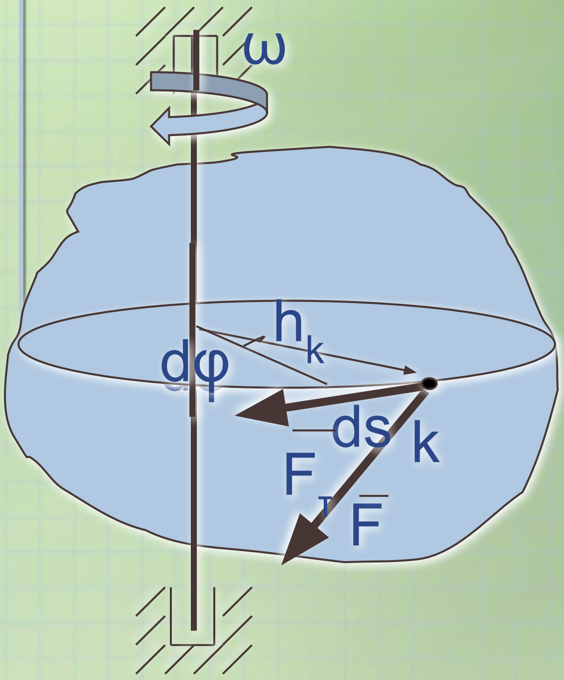
вращающим моментом относительно оси OZ

Тогда

$$dA = M_Z \cdot d\varphi \qquad (17)$$

При повороте на конечный угол

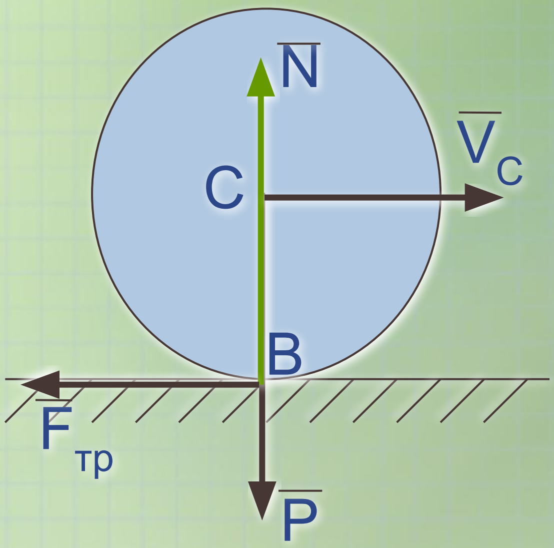
$$A = \int_0^{\varphi_1} M_Z \cdot d\varphi \qquad (18)$$



В случае постоянного вращающего момента

$$\boxed{A = M_Z \cdot \varphi_1} \qquad (19)$$

11.3. Работа сил трения, действующих на катящееся тело



а) качение без скольжения по твердой поверхности

$$dA = F_{mp\tau} \cdot ds_B$$

Т.к. точка В совпадает с МЦС, то $V_B = 0$

и $ds_B = V_B \cdot dt = 0$, $\Rightarrow$ $\boxed{dA = 0}$ (20)

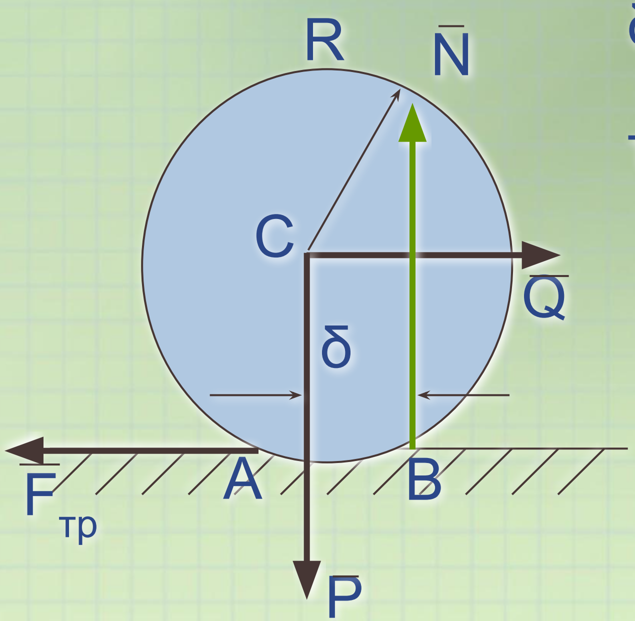
б) качение по деформирующейся поверхности

Сопротивление качению создает пара сил $\bar{N}$ и $\bar{P}$, момент которой $M = N \cdot (AB) = N \cdot \delta.$

По (19) работа вращающего момента $dA = M \cdot d\varphi$

При качении колеса угол его поворота $d\varphi = \dfrac{ds_C}{R}$

ds_C – элементарное перемещение центра колеса, а



δ – коэффициент трения качения,

тогда $dA_{кач} = -\delta N \cdot d\varphi = -\dfrac{N \cdot \delta}{R} ds_C.$

$$\boxed{A_{кач} = -\frac{N \cdot \delta}{R} \cdot s_C} \qquad (21)$$