Системы уравнений

Способы решения

Системы уравнений с двумя переменными.

Определение: ***Решением системы уравнений с двумя переменными*** **называется пара значений переменных, обращающая каждое уравнение системы в верное равенство.**

Решить систему уравнений – значит найти все её решения или доказать, что решений нет.

Способы решения:

- Способ подстановки
- Способ сложения
- Графический способ
- Способ замены

Способ подстановки

1. Выразить из какого-нибудь уравнения системы одну переменную через другую.
2. Подставить в другое уравнение системы вместо этой переменной полученное выражение.
3. Решить получившееся уравнение с одной переменной.
4. Найти соответствующее значение второй переменной.

Пример:

Решим систему уравнений: $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2y - 5x = 3 \end{cases}$ (1)

1. Выразим из первого уравнения ***y*** через ***x***: ***y=7-3x***.

2. Подставив во второе уравнение вместо ***y*** выражение ***7-3x***, получим систему: $\begin{cases} 3x+y=7 \\ 2(7-3x)-5x=3 \end{cases}$ (2)

3. В системе (2) второе уравнение содержит только одну переменную. Решим это уравнение: ***14-6x-5x=3,***

-11x= -11,

x=1.

4. Подставим в равенство ***y=7-3x*** вместо ***x*** число ***1***, найдём соответствующее значение ***y***: ***y=7-3•1,***

y=4.

Пара (1;4) – решение системы (1).

Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} x+2y=7 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{x}{5}=1-\dfrac{y}{15} \\ 2x-5y=0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 7x+2y=0 \\ 4y=-9x+10 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+5y=6 \\ x^2+3y=4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^3+y^3=35 \\ x+y=5 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5y+8(x-3y)=7x-12 \\ 9x+3(x-9y)=11y+46 \end{cases}$

Способ сложения

1. Умножьте почленно уравнения системы, подбирая множители так, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными числами.
2. Сложите почленно левые и правые части уравнений системы.
3. Решите получившееся уравнение с одной переменной.
4. Найдите соответствующее значение второй переменной.

Пример:

Решим систему: $\begin{cases} 5x+11y=8 \\ 10x-7y=74 \end{cases}$

1. Умножим все члены первого уравнения на ***-2***:

$$\begin{cases} -10x-22y=-16 \\ 10x-7y=74 \end{cases}$$

2. Почленно сложим и получим уравнение с одной переменной: ***-29y=58***.

3. Из этого уравнения находим, что

y=58/(-29)= -2.

4. Подставив во второе уравнение вместо ***y*** число ***-2***,

Найдём значение ***x***: ***10x-7*(-2)=74***,

10x=60,

x=6.

Ответ: ***x=6***, ***y= -2***

Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} 5x+2y=9 \\ 7x-3y=1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 9y+8x=-2 \\ 5x=-4y-11 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 0{,}5+0{,}2y=7 \\ \dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{10}y=0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{x}{5}-\dfrac{y}{3}+\dfrac{1}{3}=0 \\ 4x-5y-10=0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x=4y-7 \\ \dfrac{1-3x}{4}=\dfrac{4-2y}{3} \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4(2x-y+3)-3(x-2y)=57 \\ 3(3x-4y+3)+4(4x-2y)=84 \end{cases}$

Графический способ

1. Построить график функции, заданной первым уравнением системы.
2. Построить график функции, заданной вторым уравнением системы.
3. Определить координаты точек пересечения графиков функций.

Пример:

Решим систему уравнений: $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x-y=-9 \end{cases}$

1.Построим график линейной функции

2x+3y=5.

Её графиком является прямая **AB**.

2.Построим график линейной

функции ***3x-y=-9***.

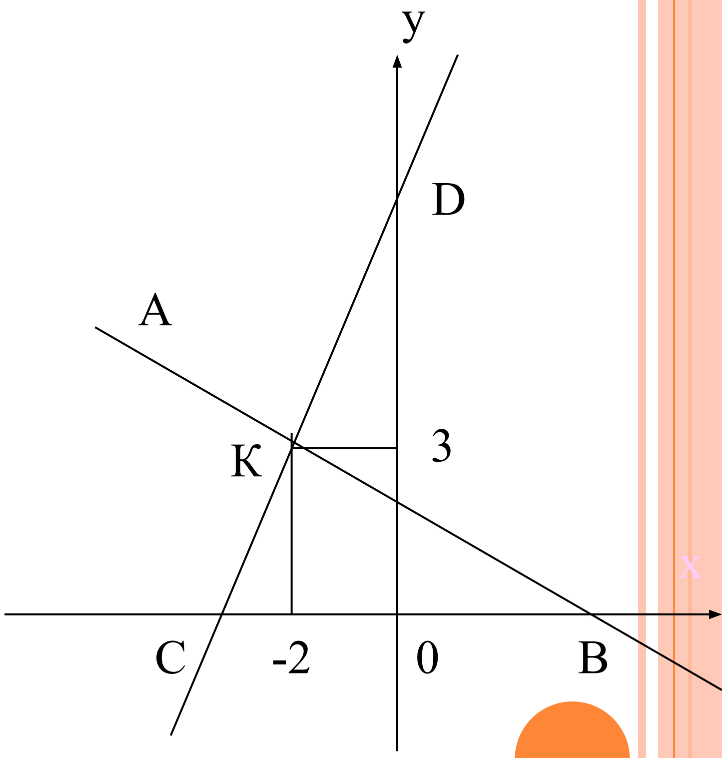
Её графиком является прямая **CD**.

3.Графики пересекаются в точке

К(-2;3). Значит, система имеет

Единственное решение:

x= -2, y=3



Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2y - 5x = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y - 2x = 1 \\ 6x - 2y = 7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 7x - y = 1 \\ y - 2x = 4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4y + 3x = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 9x + 4y = 10 \\ 7x + 2y = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -2(x - y) + 16 = 3(y + 7) \\ 6x - (x - 5) = -8 - (y + 1) \end{cases}$

Способ замены

Пример: Решим систему $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \\ x + y = 28 \end{cases}$

Сделаем замену: $\sqrt[3]{x} = a, \sqrt[3]{y} = b$

Получим систему: $\begin{cases} a + b = 4 \\ a^3 + b^3 = 28 \end{cases}$

Разложим левую часть второго уравнения на множители:

$a^3 + b^3 = (a+b)\cdot(a^2 - ab + b^2)$- и подставим в него из первого уравнения

$a + b = 4$. Тогда получим систему, равносильную второй: $\begin{cases} a + b = 4 \\ a^2 - ab + b^2 = 7 \end{cases}$

Подставляя во второе уравнение значение b, найденное из первого $b = 4 - a$

приходим к уравнению $a^2 - a(4-a) + (4-a)^2 = 7$, т.е. $a^2 - 4a + 3 = 0$

Полученное квадратное уравнение имеет два корня: $a_1 = 1$ и $a_2 = 3$.

Соответствующие значения b таковы: $b_1 = 3$ и $b_2 = 1$.

Переходим к переменным x и y. Получаем: $\sqrt[3]{x} = a_1$, т.е. $x_1 = a_1^3 = 1$,

$y_1 = b_1^3 = 27$, $x_2 = a_2^3 = 27$, $y_2 = b_2^3 = 1$.

Ответ:(1;27), (27;1).

Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{x}\sqrt{y} = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 6 \\ x - y = 12 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \sqrt{6+x} - 3\sqrt{3y+4} = -10 \\ 4\sqrt{3y+4} - 5\sqrt{6+x} = 6 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = \dfrac{4}{3} \\ xy = 9 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = -3 \\ xy = 8 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{y} + \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y} = 12 \\ xy = 64 \end{cases}$

Системы показательных уравнений

Пример: Решим систему уравнений $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ 3^{2x-y} = 3 \end{cases}$

Из второго уравнения системы находим $2x-y=1$, откуда $y=2x-1$.

Подставляя вместо у в первое уравнение выражение $2x-1$ получим $2^x + 2^{2x-1} = 12$, откуда $2^x + \frac{1}{2} \cdot 2^{2x} = 12$.

Обозначим $2^x = a$, получим квадратное уравнение $a^2 + 2a - 24 = 0$. Находим корни этого уравнения:

$$a_1 = -6; a_2 = 4$$

Уравнение замены $2^x = -6$ решений не имеет. Корнем уравнения $2^x = 4$ является число $\boldsymbol{x=2}$.

Соответствующее значение $y=3$.

Ответ:(2;3).

Решите системы уравнений:

1. $$\begin{cases} x+y=9 \\ 2^x-2^y=16 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} (1/5)^{4x-y}=25 \\ 7^{9x-2}=\sqrt{7} \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 6^{x+y}=216 \\ 3^x+3^y=12 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 2^{6y-1-x}=1 \\ 25=(\sqrt{5})^{x-y} \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 4^x-4^y=63 \\ 4^y\cdot 4^x=64 \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 2^x+3^y=17 \\ 2^{x+2}-3^{y+1}=5 \end{cases}$$

Системы логарифмических уравнений

Пример: Решим систему уравнений $\begin{cases} \lg(y-x)=\lg 2 \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y \end{cases}$

Первое уравнение системы равносильно уравнению **y-x=2**, а второе – уравнению $\frac{x}{16}=\frac{3}{y}$, причём $x>0$ и $y>0$. Подставляя

$y=x+2$ в уравнение $\frac{x}{16}=\frac{3}{y}$, получим $x(x+2)=48$, откуда

$x^2+2x-48=0$,т.е. $x=-8$ или $x=6$.Но так как $x>0$, то $x=6$ и тогда $y=8$. Итак, данная система уравнений имеет одно решение: $x=6$, $y=8$.

Ответ: (6;8).

Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} x + y = 34 \\ \log_2 x + \log_2 y = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \log_4 (x + y) = 2 \\ \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} (x + y) = 2 \\ \log_3 (x - y) = 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \log_9 x - \log_3 y = 0 \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \log_2 y + 2\log_4 x = 4 \\ \log_2 (x^2 + y^2) = 5 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 1 + \lg 13 \\ \lg(x + y) = \lg(x - y) + \lg 8 \end{cases}$