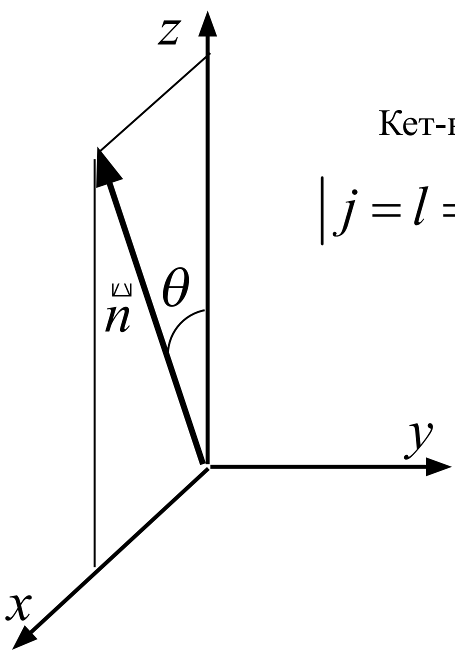
Задача

Частица находится в состоянии с определённым моментом орбитального импульса *j=l=1* и определённой проекцией момента импульса на направление

$$\vec{n} = \left(\sin\theta, 0, \cos\theta\right)$$

Измеряется проекция момента импульса на ось *Ox*. Найти возможные значения указанной проекции, получаемые в результате эксперимента и вероятности их измерения.



Решение в обозначениях Дирака

Кет-вектор состояния частицы

$$\left| j = l = 1, j_{\vec{n}} = l_{\vec{n}} = 1 \right\rangle \equiv \left| l_{\vec{n}} = 1 \right\rangle$$

Собственные кет-векторы оператора $\hat{j}_x = \hat{l}_x$

$$\left| l = 1, l_x \right\rangle \equiv \left| l_x \right\rangle$$

Уравнения на собственные значения

$$\hat{l}_{\vec{n}} \left| l_{\vec{n}} \right\rangle = l_{\vec{n}} \left| l_{\vec{n}} \right\rangle, \quad \hat{l}_x \left| l_x \right\rangle = l_x \left| l_x \right\rangle$$

Принцип суперпозиции

$$\left| l_{\vec{n}} = 1 \right\rangle = \sum_{l'_x} C_{l'_x} \left| l'_x \right\rangle$$

Вероятность измерить значение l_x равна $w\left(l_x\right) = \left|C_{l_x}\right|^2$

Формальное решение в обозначениях Дирака

Домножим на бра-вектор

$$\left\langle l_x \middle| l_{\vec{n}} = 1 \right\rangle = \sum_{l'_x} C_{l'_x} \left\langle l_x \middle| l'_x \right\rangle = \sum_{l'_x} C_{l'_x} \cdot \delta_{l_x l'_x} = C_{l_x}$$

Осталось придать смысл значкам

$$\hat{l}_x, \quad \hat{l}_{\vec{n}} = \left(\hat{\vec{l}}\vec{n}\right), \quad \left| l_{\vec{n}} = 1 \right\rangle, \quad \left| l_x \right\rangle$$

и решить уравнения на собственные значения

$$\left(\hat{\vec{l}}\vec{n}\right)\left| l_{\vec{n}} \right\rangle = l_{\vec{n}} \left| l_{\vec{n}} \right\rangle, \quad \hat{l}_x \left| l_x \right\rangle = l_x \left| l_x \right\rangle$$

Надо выбрать наиболее адекватное представление!

В координатном представлении уравнения на собственные значения являются дифференциальными уравнениями.
Но нас и не интересуют плотности распределения вероятностей в угловом пространстве.
Будем работать в матричном ll_z-представлении.

Матрицы операторов $\hat{l}_i, \left(\hat{\vec{l}}\vec{n}\right)$ в случае $l=1$

Упрощение обозначений

$$\langle l, l_z | \hat{l}_z | l, l'_z \rangle \equiv \langle l_z | \hat{l}_z | l'_z \rangle, \quad \langle l, l_z | \hat{\vec{l}}^{\,2} | l, l'_z \rangle \equiv \langle l_z | \hat{\vec{l}}^{\,2} | l'_z \rangle$$

Матричные элементы $\hat{l}_z, \hat{\vec{l}}^{\,2}$ в собственном представлении

$$\langle l_z | \hat{l}_z | l'_z \rangle = l_z \cdot \delta_{l_z l'_z}, \quad \langle l_z | \hat{\vec{l}}^{\,2} | l'_z \rangle = l(l+1) \cdot \delta_{l_z l'_z}$$

Номер строки

Номер столбца

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} l_z = 1 & l_z = 0 & l_z = -1 \end{array} \\
\begin{array}{c} l_z = 1 \\ l_z = 0 \\ l_z = -1 \end{array} & \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}
\end{array}$$

Найти матрицы?

Ответ

$$\left\langle l_z \middle| \hat{l}_z \middle| l'_z \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \left\langle l_z \middle| \hat{l}^{\,2} \middle| l'_z \right\rangle = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матричные элементы $\hat{l}_{x,y}$ в ll_z — представлении

Сначала построим матрицы повышающего и понижающего операторов

Общая формула

$$\left\langle jj_z \middle| \hat{j}_+ \middle| jj_z - 1 \right\rangle = \left\langle jj_z - 1 \middle| \hat{j}_- \middle| jj_z \right\rangle = \sqrt{(j + j_z)(j - j_z + 1)}$$

Перебираем все возможные значения

$$j = l = 1, \quad j_z = l_z = 0, \pm 1$$

Найти матрицы?

Ответ

$$\langle l_z | \hat{l}_+ | l_z - 1 \rangle = \langle l_z - 1 | \hat{l}_- | l_z \rangle = \sqrt{(1 + l_z)(1 - l_z + 1)}$$

$$\hat{l}_+ = \hat{l}_x + i\hat{l}_y, \quad \hat{l}_- = \hat{l}_x - i\hat{l}_y$$

$$\langle l_z | \hat{l}_+ | l_z' \rangle = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \langle l_z | \hat{l}_- | l_z' \rangle = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицы $\hat{l}_{x,y}$?

Ответ

$$\left\langle l_z \middle| \hat{l}_x \middle| l'_z \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \left\langle l_z \middle| \hat{l}_y \middle| l'_z \right\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу $\hat{l}_n = \begin{pmatrix} \hat{l} n \end{pmatrix}$

Матрица $\hat{l}_{\vec{n}} = \left(\hat{\vec{l}}\,\vec{n}\right)$

$$\hat{l}_{\vec{n}} = \left(\hat{\vec{l}}\,\vec{n}\right) = \sin\theta \cdot \hat{l}_x + \cos\theta \cdot \hat{l}_z$$

$$\left\langle l_z \middle| \left(\hat{\vec{l}}\,\vec{n}\right) \middle| l'_z \right\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Найти решение задачи на собственные значения?

Решение задачи на собственные значения

$$\left(\hat{l}n\right)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = l_n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cdot\left(\cos\theta - l_n\right)\cdot a + \sin\theta\cdot b + 0\cdot c = 0 \\ \sin\theta\cdot a - \sqrt{2}\cdot l_n\cdot b + \sin\theta\cdot c = 0 \\ 0\cdot a + \sin\theta\cdot b - \sqrt{2}\cdot\left(\cos\theta + l_n\right)\cdot c = 0 \end{cases}$$

Детерминант?

Детерминант

$$l_n\left(\cos^2\theta - l_n^2\right) + l_n \sin^2\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad l_n = 0, \pm 1$$

Собственные векторы?

Собственные векторы

$$l_{n}^{\square} = 1$$

Система

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cdot\left(\cos\theta - 1\right)\cdot a + \sin\theta\cdot b = 0 \\ \sin\theta\cdot b - \sqrt{2}\cdot\left(\cos\theta + 1\right)\cdot c = 0 \end{cases}$$

Полезные тождества

$$1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}, \quad \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

Собственные векторы?

Вспомогательные формулы

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cdot\left(\cos\theta-1\right)\cdot a+\sin\theta\cdot b=0 \\ \sin\theta\cdot b-\sqrt{2}\cdot\left(\cos\theta+1\right)\cdot c=0 \end{cases}$$

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\cdot b=\frac{1}{\sqrt{2}}\cot\frac{\theta}{2}\cdot b$$

$$c=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\cdot b=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\frac{\theta}{2}\cdot b$$

Собственные векторы. Продолжение

$$l_{\vec{n}} = 1$$

$$\left\langle l l_z \middle| l_{\vec{n}} = 1 \right\rangle \Rightarrow \left| l_{\vec{n}} = 1 \right\rangle = \begin{pmatrix} \cos^2 \dfrac{\theta}{2} \\ \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ \sin^2 \dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left| l_{\vec{n}} = 0, -1 \right\rangle = ?$$

Собственные векторы. Продолжение

$$l_{\vec n} = 1 \qquad\qquad l_{\vec n} = 0 \qquad\qquad l_{\vec n} = -1$$

$$\left|l_{\vec n} = 1\right\rangle = \begin{pmatrix} \cos^2\dfrac{\theta}{2} \\ \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ \sin^2\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix} \qquad \left|l_{\vec n} = 0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \sqrt{2}\cdot\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad \left|l_{\vec n} = -1\right\rangle = \begin{pmatrix} -\sin^2\dfrac{\theta}{2} \\ \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ -\cos^2\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Проверить ортогональность?

Вспоминаем, зачем всё это надо

$$\left|l_{\vec n} = 1\right\rangle = \sum_{l'_x} C_{l'_x}\left|l'_x\right\rangle, \quad C_{l_x} = \left\langle l_x \middle| l_{\vec n} = 1\right\rangle$$

Надо найти $\left\langle l_x\right| = \left(\left|l_x\right\rangle\right)^\dagger$

Собственные векторы оператора проекции на ось Ox

$$\left| l_x \right\rangle = \left| l_{\vec{n}} \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right) \right\rangle$$

$l_x = 1$ $l_x = 0$ $l_x = -1$

$$\left| l_x = 1 \right\rangle = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left| l_x = 0 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left| l_x = -1 \right\rangle = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$C_{l_x} = \left\langle l_x \middle| l_{\vec{n}} = 1 \right\rangle = ?$$

Ответ

$$C_1 = \left\langle l_x = 1 \middle| l_{\vec{n}} = 1 \right\rangle = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos^2\dfrac{\theta}{2} \\ \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ \sin^2\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\left[\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin\theta + \sin^2\frac{\theta}{2}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[1 + \sin\theta\right]$$

$$C_{-1} = \left\langle l_x = -1 \middle| l_{\vec{n}} = 1 \right\rangle = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos^2\dfrac{\theta}{2} \\ \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ \sin^2\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\left[\sin\theta - 1\right]$$

$$C_0 = \left\langle l_x = 0 \middle| l_{\vec{n}} = 1 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos^2\dfrac{\theta}{2} \\ \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ \sin^2\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left[\sin^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}\right] = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos\theta$$

ЗАДАЧИ

10.1. Написать матрицы операторов $\widehat{\mathbf{J}}^2$, $\widehat{J}_x$, $\widehat{J}_y$, $\widehat{J}_z$, $\widehat{J}_+$, $\widehat{J}_-$ для случая $j = \dfrac{3}{2}$.

10.2. Найти среднее значение проекции момента на направление $\mathbf{n}$ в состоянии $|jm\rangle$, где m есть проекция момента на ось z.

10.3. Найти средние значения величин J_x^2, J_y^2 в следующих состояниях:

а) $j = \dfrac{1}{2}$, $m = \dfrac{1}{2}$; б) $j = 1$, $m = 0$; в) $j = 1$, $m = -1$; г) $j = \dfrac{3}{2}$, $m = \dfrac{3}{2}$.

10.4. Найти дисперсии величин J_x и J_y в состояниях:

а) $j = 1$, $m = 0$; б) $j = 1$, $m = 1$; в) $j = \dfrac{1}{2}$, $m = \dfrac{1}{2}$.