Задача

10.11. Частица со спином $s = 1$ находится в состоянии $\chi = 2^{-1/2}(|1,\ 1\rangle + |1,\ -1\rangle)$. Существует ли направление, проекция спина на которое в данном состоянии имеет определенное значение? То же, если частица находится в состоянии $\chi = 3^{-1/2}(|1,\ 1\rangle + |1,\ 0\rangle + |1,\ -1\rangle)$.

Связь с «нашими» обозначениями

$$s \equiv l = 1, \quad \chi \equiv |\chi\rangle, \quad |1,1\rangle = |l = 1, l_z = 1\rangle$$

Решение

Надо ответить на вопрос – существует ли вектор

$$\vec{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$$

для которого существует нетривиальное решение уравнения

$$\hat{l}_{\vec{n}} |\chi\rangle = l_{\vec{n}} |\chi\rangle$$

Найти явный вид оператора $\hat{l}_{\vec{n}}$ (использовать формулу Эйлера)

$$\hat{l}_{\vec{n}} = n_x \cdot \hat{l}_x + n_y \cdot \hat{l}_y + n_z \cdot \hat{l}_z$$

Ответ

$$\hat{l}_{\vec{n}} = \frac{\sin\theta\cos\varphi}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i\sin\theta\sin\varphi}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \cos\theta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Или

$$\hat{l}_{\vec{n}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \dfrac{\sin\theta\, \mathrm{e}^{-i\varphi}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \dfrac{\sin\theta\, \mathrm{e}^{i\varphi}}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{\sin\theta\, \mathrm{e}^{-i\varphi}}{\sqrt{2}} \\ 0 & \dfrac{\sin\theta\, \mathrm{e}^{i\varphi}}{\sqrt{2}} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Записать в матричном виде уравнение?

$$\hat{l}_{\vec{n}} \left| \chi \right\rangle = l_{\vec{n}} \left| \chi \right\rangle$$

Матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \dfrac{\sin\theta\,\mathrm{e}^{-i\varphi}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \dfrac{\sin\theta\,\mathrm{e}^{i\varphi}}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{\sin\theta\,\mathrm{e}^{-i\varphi}}{\sqrt{2}} \\ 0 & \dfrac{\sin\theta\,\mathrm{e}^{i\varphi}}{\sqrt{2}} & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = l_n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad l_n = 0, \pm 1$$

$$\theta, \varphi = ?$$

Система уравнений

$$\begin{cases} \cos\theta - l_n = 0 \\ \dfrac{\sin\theta\, e^{i\varphi}}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sin\theta\, e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}} = 0 \\ \cos\theta + l_n = 0 \end{cases}$$

$$l_n = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

Задача (вторая часть)

10.11. Частица со спином $s = 1$ находится в состоянии $\chi = 2^{-1/2}(|1,\,1\rangle + |1,\,-1\rangle)$. Существует ли направление, проекция спина на которое в данном состоянии имеет определенное значение? То же, если частица находится в состоянии $\chi = 3^{-1/2}(|1,\,1\rangle + |1,\,0\rangle + |1,\,-1\rangle)$.

Записать систему уравнений?

Кет-вектор и система уравнений

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \dfrac{\sin\theta\,\mathrm{e}^{-i\varphi}}{\sqrt{2}} & 0\\ \dfrac{\sin\theta\,\mathrm{e}^{i\varphi}}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{\sin\theta\,\mathrm{e}^{-i\varphi}}{\sqrt{2}}\\ 0 & \dfrac{\sin\theta\,\mathrm{e}^{i\varphi}}{\sqrt{2}} & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = l_n\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad l_n = 0, \pm 1$$

Система уравнений в явном виде

$$\begin{cases} \left(\cos\theta - l_{\vec{n}}\right) + \dfrac{\sin\theta\, \mathrm{e}^{-i\varphi}}{\sqrt{2}} + 0\cdot 1 = 0 \\ \dfrac{\sin\theta\, \mathrm{e}^{i\varphi}}{\sqrt{2}} - l_{\vec{n}} + \dfrac{\sin\theta\, \mathrm{e}^{-i\varphi}}{\sqrt{2}} = 0 \\ 0\cdot 1 + \dfrac{\sin\theta\, \mathrm{e}^{i\varphi}}{\sqrt{2}} - \left(\cos\theta + l_{\vec{n}}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\cos\theta - l_{\vec{n}}\right) + \dfrac{\sin\theta\, \mathrm{e}^{-i\varphi}}{\sqrt{2}} = 0 \\ \sqrt{2}\sin\theta\cos\varphi - l_{\vec{n}} = 0 \\ \dfrac{\sin\theta\, \mathrm{e}^{i\varphi}}{\sqrt{2}} - \left(\cos\theta + l_{\vec{n}}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\theta, \varphi = ?$$