К.Ю. Поляков

Линейное (и нелинейное) программирование в задачах ЕГЭ по информатике

Постановка задачи

Укажите наименьшее целое значение A, при котором выражение

$$(y + 2x < A) \vee (x > 20) \vee (y > 30)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

Укажите наименьшее целое значение A, при котором выражение

$$(y + 2x < A) \vee (3y + 2x > 120) \vee (3y - x > 30)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

Укажите наибольшее целое значение A, при котором выражение

$$(y - x \neq 5) \vee (A < 2x^3 + y) \vee (A < y^2 + 16)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

Задача 2.

Укажите наименьшее целое значение А, при котором выражение

$$(y + 2x < A) \vee (x > 20) \vee (y > 30)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

не зависит от A

$$(y + 2x < A) \vee \overbrace{(x > 20) \vee (y > 30)}$$

истинно ← ложно

$$(x > 0) \wedge (x \le 20) \wedge (y \le 30) \wedge (y > 0)$$

Задача 1. Аналитическое решение

$$(x > 0) \land (x \le 20) \land (y \le 30) \land (y > 0) \rightarrow (y + 2x < A)$$

$A > y + 2x$ для $(x > 0) \land (x \le 20) \land (y \le 30) \land (y > 0)$

$$A > \max(y + 2x)$$

для $\underbrace{(x > 0) \land (x \le 20)}_{\text{только } x} \land \underbrace{(y \le 30) \land (y > 0)}_{\text{только } y}$

максимум линейной функции при линейных ограничениях

! Задача линейного программирования!

$$A > \max(y + 2x) = \max(y) + 2\cdot\max(x)$$

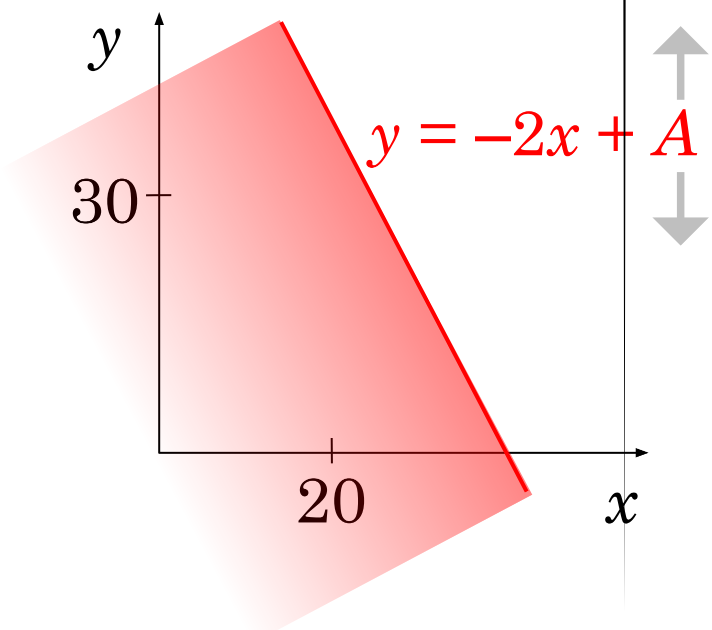
$$A > 30 + 2\cdot 20 = 70$$

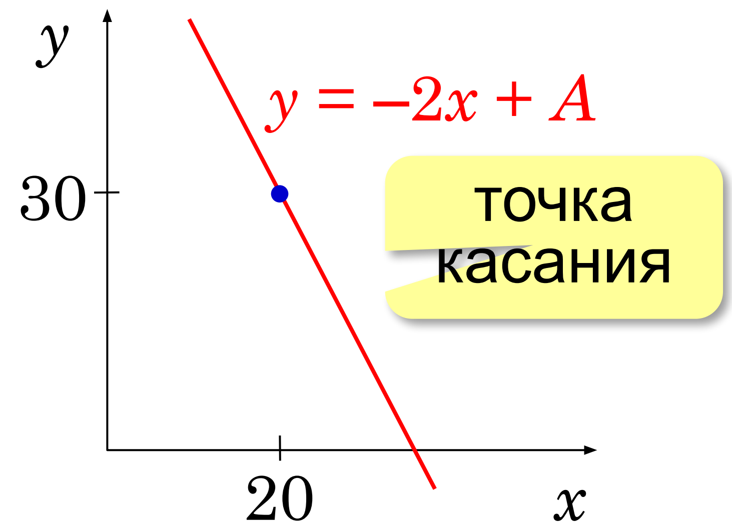
$$\boxed{A_{\min} = 71}$$

Задача 1. Графическое решение

$$\underbrace{(x > 0) \wedge (x \le 20) \wedge (y \le 30) \wedge (y > 0)}_{\text{прямоугольник}} \to (y + 2x < A)$$

$$(y < -2x + A)$$





$$30 < -2 \cdot 20 + A$$

$$70 < A \qquad A_{min} = 71$$

Задача 2.

Укажите наименьшее целое значение А, при котором выражение

$$\boxed{(5y < (x-30)^2 + A)} \lor (x > 20) \lor (y > 30)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

$$\underbrace{(5y < (x-30)^2 + A)}_{\text{истинно}} \lor \underbrace{(x > 20) \lor (y > 30)}_{\text{ложно}}$$

не зависит от A

$(x > 0) \land (y > 0)$

$(x \le 20) \land (y \le 30)$

Задача 2. Аналитическое решение

$(x > 0) \wedge (x \le 20) \wedge (y \le 30) \wedge (y > 0)$

$(5y < (x - 30)^2 + A)$ $A > 5y - (x - 30)^2$

$A > \max(5y - (x - 30)^2)$

для $(x > 0) \wedge (x \le 20) \wedge (y \le 30) \wedge (y > 0)$

максимум **НЕ**линейной функции при линейных ограничениях

$$A > \max(5y - (x - 30)^2) = 5\cdot\max(y) + \min(x - 30)^2$$

$$A > 5\cdot 30 - (20 - 30)^2 = 50$$

в запретной зоне

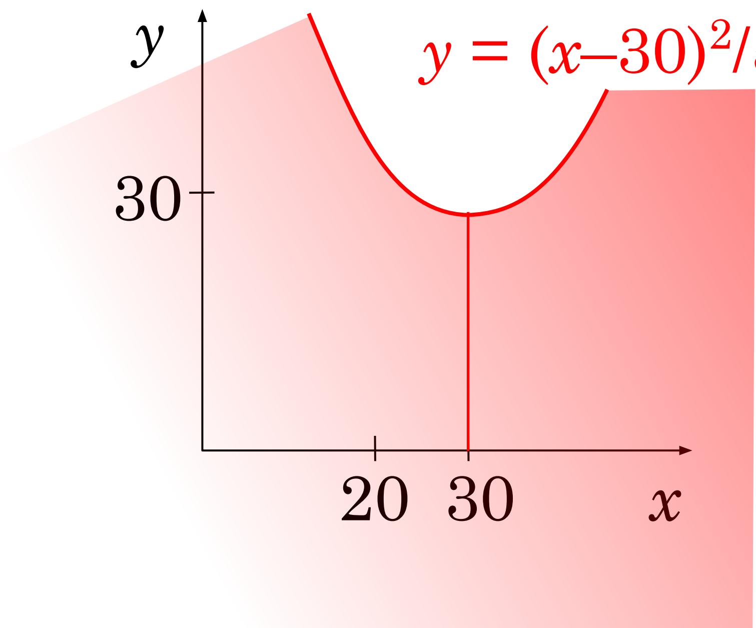
$x < 30$

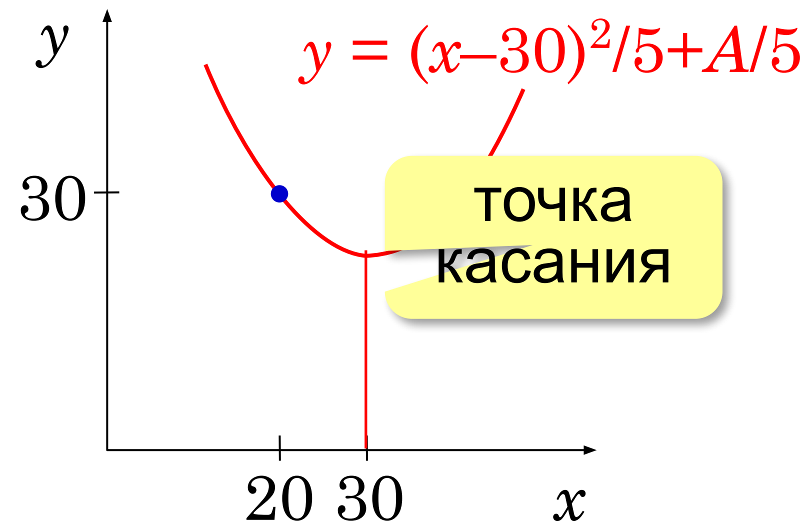
$x = x_{\max}$

$$A_{\min} = 51$$

Задача 2. Графическое решение

$(x > 0) \wedge (x \le 20) \wedge (y \le 30) \wedge (y > 0) \wedge (5y < (x - 30)^2 + A)$ → $y < (x - 30)^2/5 + A/5$





$150 < (20 - 30)^2 + A$

$50 < A$ $\quad A_{\min} = 51$

Задача 3.

Укажите наименьшее целое значение A, при котором выражение

$$(y + 2x < A) \lor (3y + 2x > 120) \lor (3y - x > 30)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

не зависит от A

$$\underbrace{(y + 2x < A)}_{\text{истинно}} \lor \underbrace{(3y + 2x > 120) \lor (3y - x > 30)}_{\text{ложно}}$$

истинно ложно

$$(x > 0) \land (3y + 2x \le 120) \land (3y - x \le 30) \land (y > 0)$$

Задача 3. Аналитическое решение

$(y + 2x < A)$ для

$$(x > 0) \wedge (3y + 2x \le 120) \wedge (3y - x \le 30) \wedge (y > 0)$$

$A > \max(y + 2x)$ для

$$(x > 0) \wedge (3y + 2x \le 120) \wedge (3y - x \le 30) \wedge (y > 0)$$

! Задача линейного программирования!

Задача 3. Графическое решение

НЕ прямоугольник

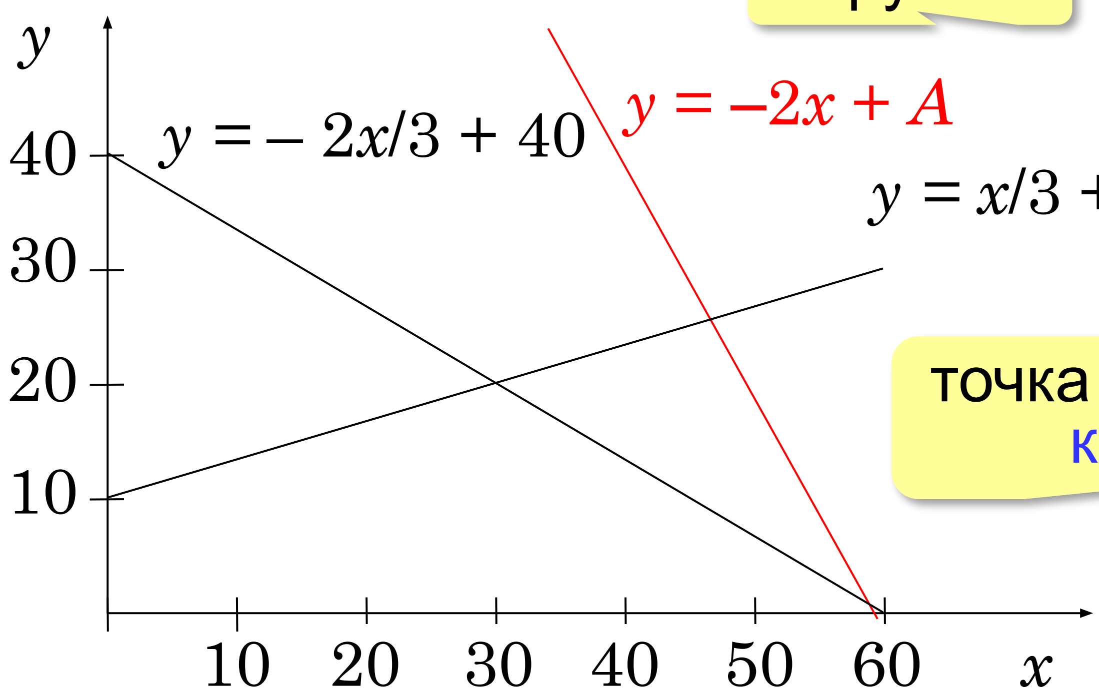
$(x > 0) \land (3y + 2x \le 120) \land (3y - x \le 30) \land (y > 0)$

$(y \le -2x/3 + 40) \land (y \le x/3 + 10)$

круче!

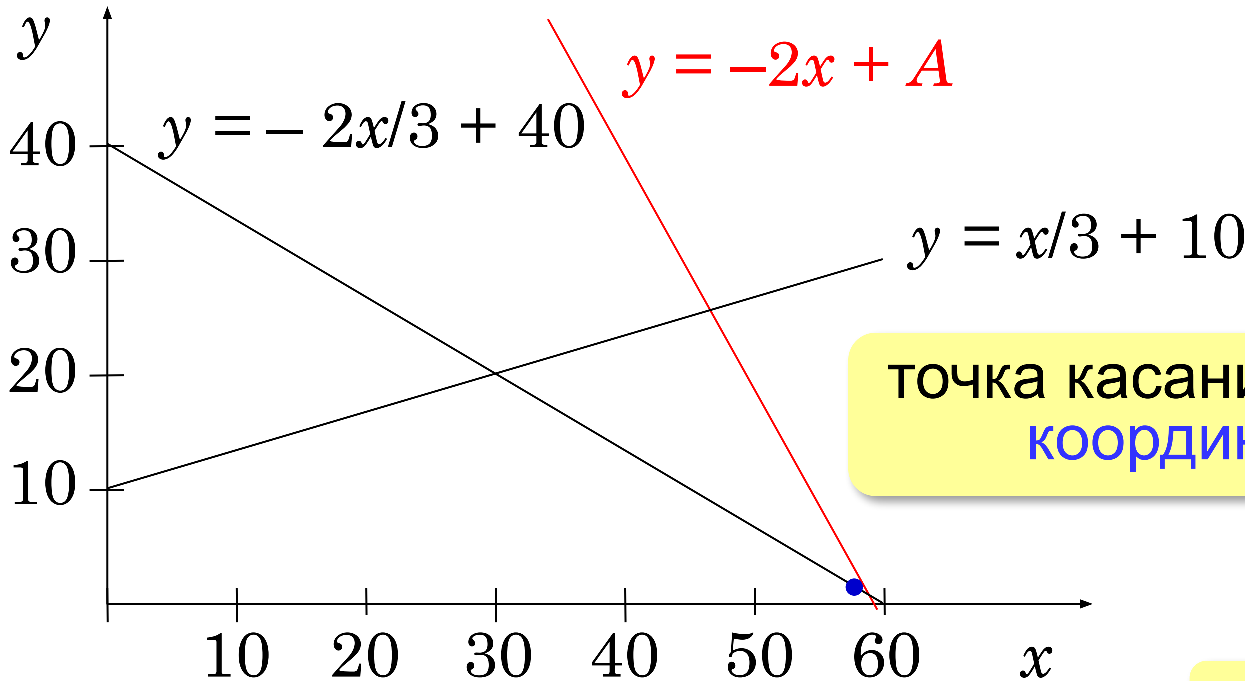
$(y + 2x < A)$

$(y < -2x + A)$



точка касания с целыми координатами!

Задача 3. Графическое решение



точка касания с целыми координатами!

x – целое!

Найти x_{max}: $y = 1$, $y \le -2x/3 + 40$

$y = 1 \le -2x/3 + 40 \rightarrow 2x \le 117 \rightarrow x_{max} = 58$

$(y < -2x + A) \rightarrow 1 < -2 \cdot 58 + A$

$117 < A \rightarrow A_{max} = 118$

Задача 4.

Укажите наименьшее целое значение A, при котором выражение

$$(x \ge 19) \lor (x < 5y) \lor (xy < 2A)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

не зависит от A

$$(xy < 2A) \lor (x \ge 19) \lor (x < 5y)$$

истинно ложно

$$(x > 0) \land (x < 19) \lor (x \ge 5y) \land (y > 0)$$

Задача 4. Аналитическое решение

$$(x > 0) \wedge (x < 19) \vee (x \geq 5y) \wedge (y > 0)$$

$$(xy < 2A)$$

$$x_{max} = 18$$

$y \leq x/5$ → $y \to$ max при x_{max}

$$y_{max} = [\, x_{max} / 5 \,]$$

$$y_{max} = [\, 18 / 5 \,] = 3$$

целая часть!

$$A > xy/2$$

$$A > \max(xy)/2$$

$$A > x_{max} \cdot y_{max} / 2 = 18 \cdot 3/2 = 27$$

$$A_{min} = 28$$

! Нелинейная функция!

Легко решить, если x и $y \to \max$

1) независимо или …

2) одновременно

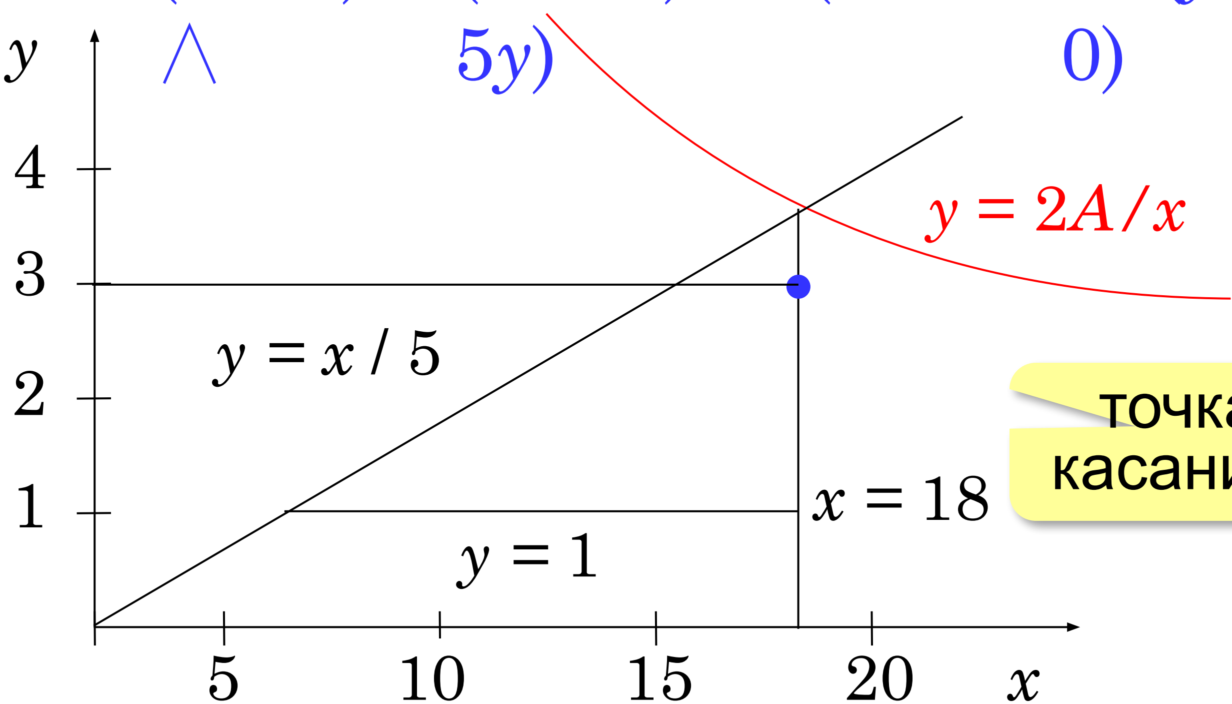
Задача 4. Графическое решение

треугольник

$\underbrace{(x > 0) \wedge (x < 19) \vee (x \geq 5y) \wedge (y > 0)}$

$(xy < 2A)$

$(y < 2A/x)$



точка касания!

при $x = 18$: $y \leq x/5 \rightarrow y_{max} = 3$

$2A > \max(xy) = 3 \cdot 18 = 54 \rightarrow A > 27 \rightarrow$ $\boxed{A_{min} = 28}$

Задача 5.

(**С.С. Поляков**) Укажите наибольшее целое значение A, при котором выражение

$$(y - x \neq 5) \lor (A < 2x^3 + y) \lor (A < y^2 + 16)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

не зависит от A

$$\underbrace{(A < 2x^3 + y) \lor (A < y^2 + 16)}_{\text{истинно}} \lor \underbrace{(y - x \neq 5)}_{\text{ложно}}$$

$$(x > 0) \land (y - x = 5) \land (y > 0)$$

Задача 5. Аналитическое решение

$(x > 0) \wedge (y - x = 5) \wedge (y > 0)$

$(A < 2x^3 + y) \rightarrow A < \min(2x^3 + y)$

или $(A < y^2 + 16) \rightarrow A < \min(y^2 + 16)$

прямая
$y = x + 5$

$$A < \max\left[\begin{array}{l}\min(2x^3 + y)\\ \min(y^2 + 16)\end{array}\right.$$ при $\underbrace{(x > 0) \wedge (y - x = 5) \wedge (y > 0)}_{}$

возрастающие при
$x > 0,\ y > 0$

луч

$y = x + 5 \rightarrow (x_{min}, y_{min})$ на границе

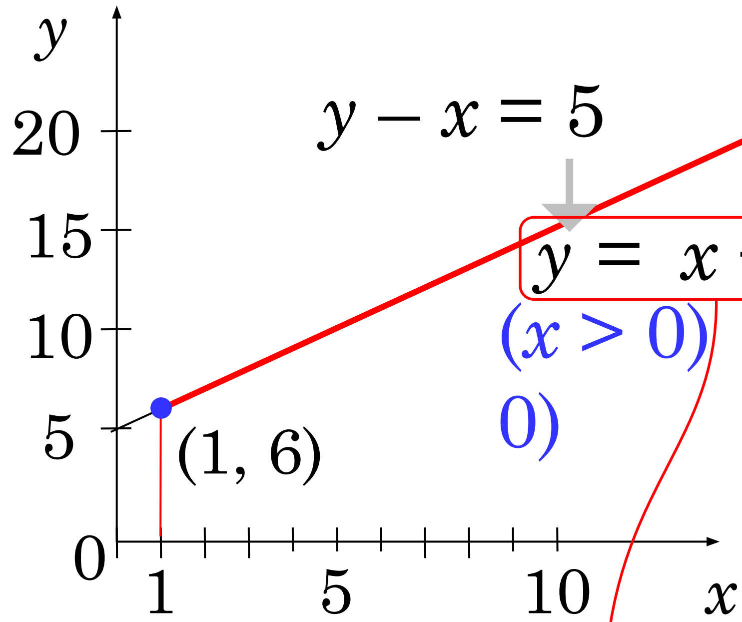
$x = 1\ y = 6$

$y = 1\ x = \cancel{-4}$

$$A < \max\left[\begin{array}{l}\min(2\cdot1^3 + 6)\\ \min(6^2 + 16)\end{array}\right. = \max(8, 52)$$

$A_{max} = 51$

Задача 5. Графическое решение



$y - x = 5$

$\boxed{y = x + 5}$

$(x > 0) \wedge (y > 0)$

Для всех x на луче нужно обеспечить

$(A < 2x^3 + y)$

или

$(A < y^2 + 16)$

$A < \min(2x^3 + y)$

$A < \min(2x^3 + x + 5)$

$A < 2 \cdot 1^3 + 1 + 5$

$A < 8$

или

$A < \min(y^2 + 16)$

$A < 6^2 + 16$

$A < 52$

$A_{max} = 51$

Задача 6.

(**С.С. Поляков**) Укажите наибольшее целое значение A, при котором выражение

$$(y - x^2 \neq -80) \lor (A < 13x - 14) \lor (A < y^2 + 15)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

не зависит от A

$$\underbrace{(A < 13x - 14) \lor (A < y^2 + 15)}_{\text{истинно}} \lor \underbrace{(y - x^2 \neq -80)}_{\text{ложно}}$$

истинно ложно

$(x > 0) \land$ $(y - x^2 = -80) \land (y > 0)$

Задача 6. Аналитическое решение

$(x > 0)$ $(y - x^2 = -80) \wedge (y > 0)$

$\wedge$

$(A < 13x - 14) \rightarrow A < \min(13x - 14)$

или $(A < y^2 + 15) \rightarrow A < \min(y^2 + 15)$

парабола
$y = x^2 - 80$

$$A < \max\begin{cases}\min(13x - 14)\\ \min(y^2 + 15)\end{cases}$$ при $(x > 0)$ $(y - x^2 = -80)$ $\wedge$ $\wedge$ $(y > 0)$

возрастающие при
$x > 0,\ y > 0$

$y = x^2 - 80 \rightarrow (x_{min}, y_{min})$ на границе

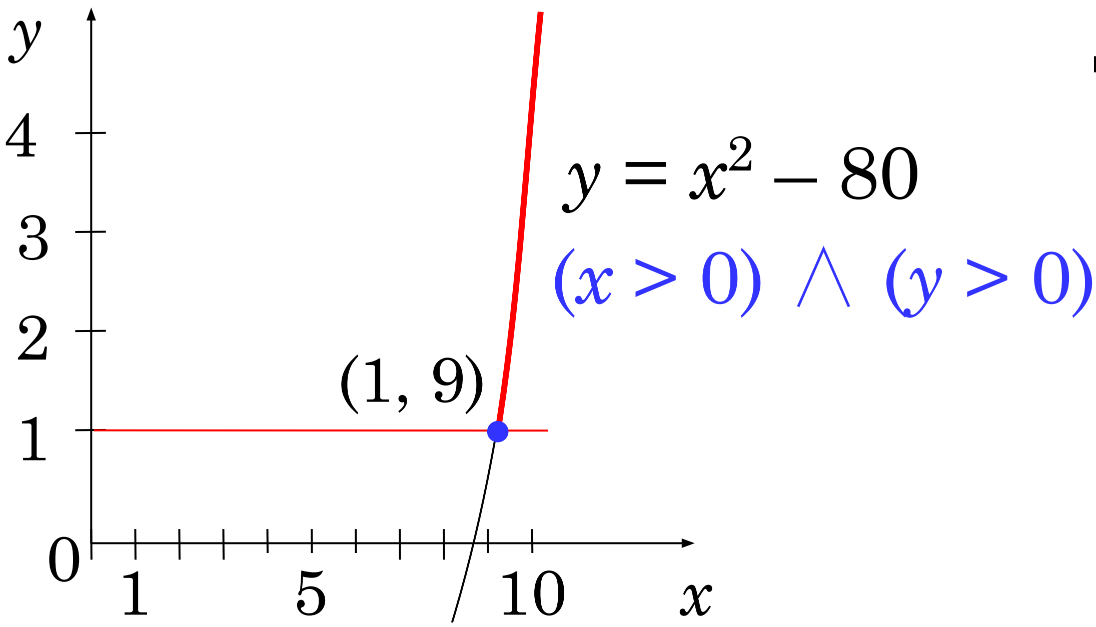
$x = 1$ $y = \cancel{-79}$

$y = 1$ $x = 9$

$$A < \max\begin{cases}\min(13\cdot 9 - 14)\\ \min(1^2 + 15)\end{cases} = \max(103, 16)$$

$A_{max} = 102$

Задача 6. Графическое решение



Для всех x на «луче» нужно обеспечить

$$(A < 13x - 14)$$

или

$$(A < y^2 + 15)$$

$$A < \min(13x - 14) \qquad A < \min(y^2 + 15)$$

$$A < 13 \cdot 9 - 14 \qquad A < 1^2 + 15$$

$$\boxed{A < 103} \text{ или } \boxed{A < 16}$$

$$\boxed{A_{max} = 102}$$

Задача 7.

Укажите наименьшее целое значение A, при котором выражение

$$(y - 20\sin(x/5) > 10) \vee (4y + x^2 > 120)$$
$$\vee\ (y - x^2 - A^2 < 10 - 2Ax\ )$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

не зависит от A

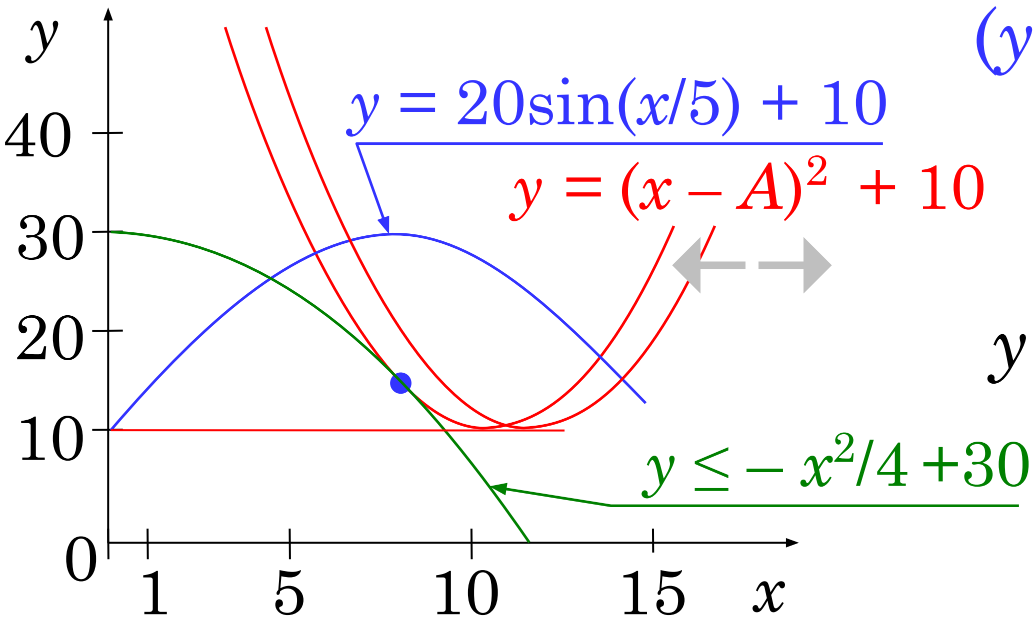
$$\underbrace{(y - x^2 - A^2 < 10 - 2Ax\ )}_{\text{истинно}} \vee \underbrace{(y - 20\sin(x/5) > 10) \vee (4y + x^2 > 120)}_{\text{ложно}}$$

истинно

ложно

$$(y - 20\sin(x/5) \le 10) \wedge (4y + x^2 \le 120)$$
$$\wedge\ (x > 0) \quad \wedge\ (y > 0)$$

Задача 7. Графо-аналическое решение



$(y \le 20\sin(x/5) + 10)$

$\vee\ (y \le – x^2/4 + 30)$

$\wedge\ (x > 0)\ \wedge\ (y > 0)$

$y – x^2 – A^2 < 10 – 2Ax$

$y < (x – A)^2 + 10$

Найти наименьшее значение A, при котором решается уравнение $(x – A)^2 + 10 = – x^2/4 + 30$

$5x^2/4 – 2Ax + A^2 – 20 = 0$

$D = 4A^2 – 5(A^2 – 20) = 0$

при касании!

$A = 10$

$A_{\min} = 11$

Конец фильма

ПОЛЯКОВ Константин Юрьевич
д.т.н., учитель информатики
ГБОУ СОШ № 163, г. Санкт-Петербург
kpolyakov@mail.ru