

# Транспортная задача

линейного программирования

**Запасы: (ед.)**

$$A1=90$$

$$A2=260$$

$$A3=240$$

**Потребности: (ед.)**

$$B1=130$$

$$B2=150$$

$$B3=140$$

$$B4=170$$

**Стоимость (руб.)**

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 11 \\ 3 & 5 & 9 & 12 \\ 6 & 1 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

# ШАГ 1

## Проверка на сбалансированность

- Общее число запасов на складах:

$$\sum A_{i,j} = 90 + 260 + 240 = 590 \text{ ед.}$$

$$\sum B_{i,j} = 130 + 150 + 140 + 170 = 590 \quad .$$

$$590 \text{ ед.} = 590 \text{ ед.}$$

Задача является сбалансированной  
(закрытого типа)

# ШАГ 2

Отыскание начального решения.

Метод северо-западного угла

	<b>V1=130</b>	<b>V2=150</b>	<b>V3=140</b>	<b>V4=170</b>	
<b>A1=90</b>	2	4	7	11	<b>90</b>
<b>A2=260</b>	3	5	9	12	<b>260</b>
<b>A3=240</b>	6	1	10	8	<b>240</b>
	<b>130</b>	<b>150</b>	<b>140</b>	<b>170</b>	

	<b>B1=130</b>	<b>B2=150</b>	<b>B3=140</b>	<b>B4=170</b>	
<b>A1=90</b>	2	4	7	11	90
<b>A2=260</b>	3	5	9	12	260
<b>A3=240</b>	6	1	10	8	240
	130	150	140	170	

$$X_{11} = \min(90; 130) = 90$$

	<b>B1=130</b>	<b>B2=150</b>	<b>B3=140</b>	<b>B4=170</b>	
<b>A1=90</b>	2      90	4      X	7      X	11      X	<b>90-90=0</b>
<b>A2=260</b>	3	5	9	12	<b>260</b>
<b>A3=240</b>	6	1	10	8	<b>240</b>
	<b>130-90=40</b>	<b>150</b>	<b>140</b>	<b>170</b>	

$$X_{21} = \min(40; 260) = 40$$

	<b>B1=130</b>	<b>B2=150</b>	<b>B3=140</b>	<b>B4=170</b>	
<b>A1=90</b>	2      90	4      X	7      X	11      X	0
<b>A2=260</b>	3      40	5	9	12	260-40=220
<b>A3=240</b>	6	1	10	8	240
	40-40=0	150	140	170	

$$X_{22} = \min(150; 220) = 150$$

	<b>B1=130</b>		<b>B2=150</b>		<b>B3=140</b>		<b>B4=170</b>		
<b>A1=90</b>	2	90	4	X	7	X	11	X	0
<b>A2=26</b>	3	40	5	150	9		12		220-150=7
<b>A3=24</b>	6	X	1	X	10		8		240
	0		0	150-150=		140		170	

$$X_{23} = \min(70; 140) = 70$$

	B1=130		B2=150		B3=140		B4=170		
A1=90	2	90	4	X	7	X	11	X	0
A2=260	3	40	5	150	9	70	12	X	70-70=0
A3=240	6	X	1	X	10		8		240
	0			0	0	140-70=7		170	

$$X33 = \min(70; 240) = 70$$

	B1=130		B2=150		B3=140		B4=170		
A1=90	2	90	4	X	7	X	11	X	0
A2=26 0	3	40	5	150	9	70	12	X	0
A3=24 0	6	X	1	X	10	70	8		240-70=17 0
	0		0		70-70=0		170		

$$X_{34} = \min(170; 170) = 170$$

	B1=130		B2=150		B3=140		B4=170		
<b>A1=90</b>	2	90	4	X	7	X	11	X	<b>0</b>
<b>A2=260</b>	3	40	5	150	9	70	12	X	<b>0</b>
<b>A3=240</b>	6	X	1	X	10	70	8	170	<b>170-170=0</b>
	<b>0</b>		<b>0</b>		<b>0</b>		<b>170-170=0</b>		

# Получен опорный план (допустимое начальное решение)

	<b>B1=130</b>	<b>B2=150</b>	<b>B3=140</b>	<b>B4=170</b>
<b>A1=90</b>	2      90	4	7	11
<b>A2=260</b>	3      40	5      150	9      70	12
<b>A3=240</b>	6	1	10      70	8      170

Общие затраты на перевозку  
всей продукции:

$$\begin{aligned} F &= 2 \cdot 90 + 3 \cdot 40 + 5 \cdot 150 + \\ &9 \cdot 70 + 10 \cdot 70 + 8 \cdot 170 = \\ &= 3740 \text{ руб.} \end{aligned}$$

# Метод потенциалов

- $U$  – строки
- $V$  – столбцы
- Вычисляем для **занятых** клеток потенциалы строк и столбцов

	<b>V1</b>	<b>V2</b>	<b>V3</b>	<b>V4</b>
<b>U1</b>	2    90	4	7	11
<b>U2</b>	3    40	5    150	9    70	12
<b>U3</b>	6	1	10    70	8    170

пусть  $U_1=0$  тогда

$$V_1 - U_1 = 2;$$

$$V_1 - U_2 = 3;$$

$$V_2 - U_2 = 5;$$

$$V_3 - U_2 = 9;$$

$$V_3 - U_3 = 10;$$

$$V_4 - U_3 = 8.$$

$$V_1 = 2;$$

$$U_2 = -1;$$

$$V_2 = 4;$$

$$V_3 = 8;$$

$$U_3 = -2;$$

$$V_4 = 6.$$

- Вычисляем оценку  $a(ij)$  для свободных клеток
- Она показывает на сколько изменяются общие транспортные затраты при загрузке клетки продукцией.

	V1	V2	V3	V4
U1	2 90	4	7	11
U2	3 40	5 150	9 70	12
U3	6	1	10 70	8 170

$$(4) a_{12} = V_2 - U_1 - C_{12} = 4 - 0 - 4 = 0;$$

$$(7) a_{13} = V_3 - U_1 - C_{13} = 8 - 0 - 7 = 1;$$

$$(11) a_{14} = V_4 - U_1 - C_{14} = 6 - 0 - 11 = -5;$$

$$(12) a_{24} = V_4 - U_2 - C_{24} = 6 + 1 - 12 = -5;$$

$$(6) a_{31} = V_1 - U_3 - C_{31} = 2 + 2 - 6 = -2;$$

$$(1) a_{32} = V_2 - U_3 - C_{32} = 4 + 2 - 1 = 5$$

**т.к. среди  $a_{ij}$  есть  $>0$ , то план  
можно улучшить**

**Выбираем наибольшее  
положительное значение  
 $a(ij)$**

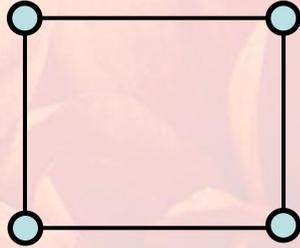
$$(1) a_{32} = V_2 - U_3 - C_{32} = 4 + 2 - 1 = 5$$

с этой клетки  $a_{32}$  начинаем  
цикл пересчета.

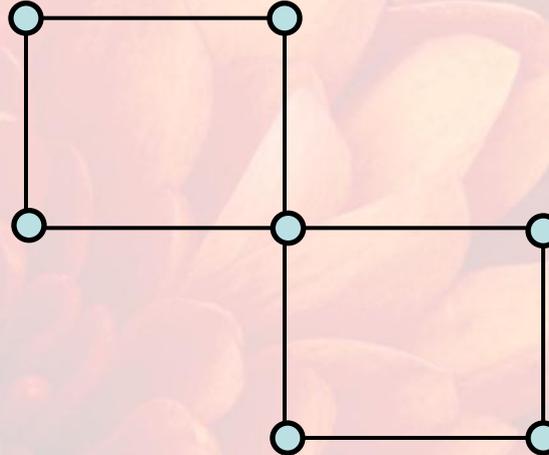
- **Цикл пересчета – замкнутая ломанная линия, которая соединяет начальную вершину и занятые клетки.**
- **Начальная вершина обозначается знаком “+”**

• Допустимые циклы:

• 1)

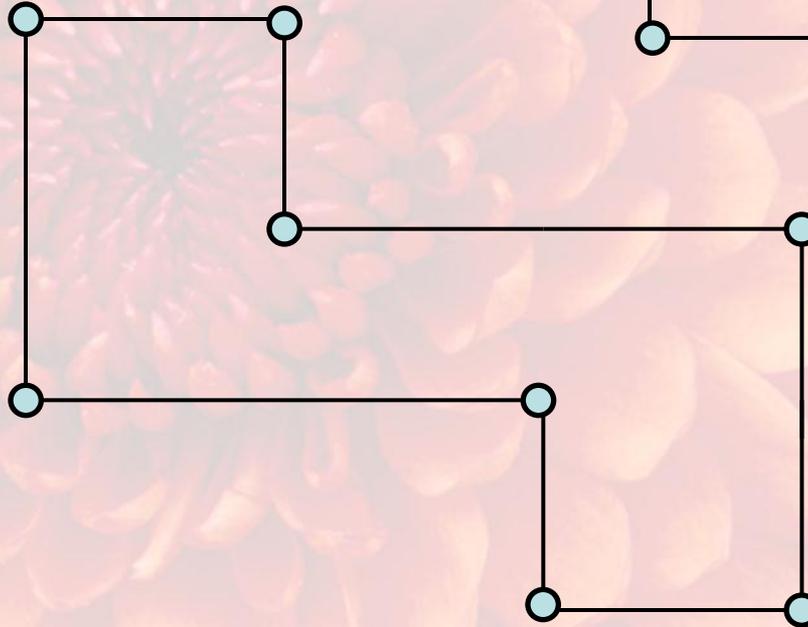


2)

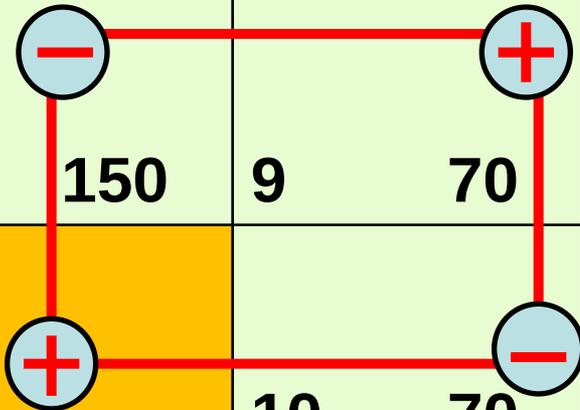


•

3)



	V1		V2		V3		V4	
U1	2	90	4		7			11
U2	3	40	5	150	9	70		12
U3	6		1		10	70	8	170



- Находим минимальную поставку отмеченную “-” (70).
- Это значение вычитаем из вершин цикла отмеченные “+” и прибавляем к “-”

	V1	V2	V3	V4
U1	2 90	4	7	11
U2	3 40	5 150-70	9 70+70	12
U3	6	1 70+70	10 70-70	8 170

# Получен план:

	V1		V2		V3		V4	
U1	2	90	4		7		11	
U2	3	40	5	80	9	140	12	
U3	6		1	70	10	0	8	170

Стоимость полученного  
плана:

$$\begin{aligned} F &= 2 \cdot 90 + 3 \cdot 40 + 5 \cdot 80 + \\ &9 \cdot 140 + 1 \cdot 70 + 8 \cdot 170 = \\ &= 3390 \text{ руб.} \end{aligned}$$

Проверим план на оптимальность.

**Для занятых клеток:**

$$V_1 - U_1 = 2;$$

$$V_1 - U_2 = 3;$$

$$V_2 - U_2 = 5;$$

$$V_3 - U_2 = 9;$$

$$V_2 - U_3 = 1;$$

$$V_4 - U_3 = 8.$$

пусть  $U_1 = 0$  тогда

$$V_1 = 2;$$

$$U_2 = -1;$$

$$V_2 = 4;$$

$$V_3 = 8;$$

$$U_3 = 3;$$

$$V_4 = 11.$$

# Оценка для свободных клеток:

$$(4) a_{12} = V_2 - U_1 - C_{12} = 4 - 0 - 4 = 0;$$

$$(7) a_{13} = V_3 - U_1 - C_{13} = 8 - 0 - 7 = 1;$$

$$(11) a_{14} = V_4 - U_1 - C_{14} = 11 - 0 - 11 = 0;$$

$$(12) a_{24} = V_4 - U_2 - C_{24} = 11 + 1 - 12 = 0;$$

$$(6) a_{31} = V_1 - U_3 - C_{31} = 2 - 3 - 6 = -7;$$

$$(10) a_{33} = V_3 - U_3 - C_{33} = 8 - 3 - 10 = -5$$

**т.к. среди  $a_{ij}$  есть  $>0$ , то план можно  
улучшить**

наибольшее значение:

$$(7) a_{13} = V_3 - U_1 - C_{13} = 8 - 0 - 7 = 1;$$

$a_{13}$  вершина цикла  
пересчета

	V1	V2	V3	V4
U1	2 90	4	7	11
U2	3 40	5 80	9 140	12
U3	6	1 70	10	8 170

	V1	V2	V3	V4
U1	2 90-90	4	7 +90	11
U2	3 40+90	5 80	9 140-90	12
U3	6	1 70	10	8 170

# Получен план:

	<b>V1</b>	<b>V2</b>	<b>V3</b>	<b>V4</b>
<b>U1</b>	2	4	7	11
<b>U2</b>	3	5	9	12
<b>U3</b>	6	1	10	8

Additional values from the image:

- 90 (red) is associated with V3 in the U1 row.
- 130 (red) is associated with V1 in the U2 row.
- 80 is associated with V2 in the U2 row.
- 50 (red) is associated with V3 in the U2 row.
- 70 is associated with V2 in the U3 row.
- 170 is associated with V4 in the U3 row.

Стоимость полученного  
плана:

$$\begin{aligned} F &= 7 \cdot 90 + 3 \cdot 130 + 5 \cdot 80 + \\ &9 \cdot 50 + 8 \cdot 170 + 1 \cdot 70 = \\ &= 3300 \text{ руб.} \end{aligned}$$

Проверим план на оптимальность.

**Для занятых клеток:**

$$V_3 - U_1 = 7;$$

$$V_1 - U_2 = 3;$$

$$V_2 - U_2 = 5;$$

$$V_3 - U_2 = 9;$$

$$V_2 - U_3 = 1;$$

$$V_4 - U_3 = 8.$$

пусть  $U_1 = 0$  тогда

$$V_3 = 7;$$

$$U_2 = -2;$$

$$V_1 = 1;$$

$$V_2 = 3;$$

$$U_3 = 2;$$

$$V_4 = 10$$

# Оценка для свободных клеток:

$$(4) a_{12} = V_2 - U_1 - C_{12} = 3 - 0 - 4 = -1;$$

$$(11) a_{14} = V_4 - U_1 - C_{14} = 10 - 0 - 11 = -1;$$

$$(2) a_{11} = V_1 - U_1 - C_{11} = 1 - 0 - 2 = -1;$$

$$(12) a_{24} = V_4 - U_2 - C_{24} = 10 + 2 - 12 = 0;$$

$$(6) a_{31} = V_1 - U_3 - C_{31} = 1 - 2 - 6 = -7;$$

$$(10) a_{33} = V_3 - U_3 - C_{33} = 7 - 2 - 10 = -8$$

**т.к.  $a_{ij} < 0$ , то план улучшить НЕЛЬЗЯ**

Оптимальное решение:

$$\begin{aligned} \text{Бит} &= 7 \cdot 90 + 3 \cdot 130 + 5 \cdot 80 + \\ &9 \cdot 50 + 8 \cdot 170 + 1 \cdot 70 = \\ &= 3300 \text{ руб.} \end{aligned}$$