

Комплексные числа

Основные понятия

Комплексным числом z называется выражение вида

$$z = \alpha + i\beta$$

где α и β – действительные числа,
а i – мнимая единица.

$$i^2 = -1$$

Два комплексных числа

$$z_1 = \alpha_1 + i\beta_1 \quad z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$$

называются **равным** ($z_1 = z_2$)

тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1 = \alpha_2 \quad \beta_1 = \beta_2$$

Комплексное число $z_1 = \alpha_1 + i\beta_1$

равно 0 тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 0$$

Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не определяются.

Два комплексных числа

$$z = \alpha + i\beta, \quad \bar{z} = \alpha - i\beta$$

называются **сопряженными**.

Справедливо равенство

$$z \cdot \bar{z} = \alpha^2 + \beta^2$$

Извлечение корней из КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Корнем n -ой степени из комплексного числа z называется комплексное число w , удовлетворяющее равенству

Т.е. $\sqrt[n]{z} = w$, если $w^n = z$

Пример

1. Вычислить $\sqrt{-4}$
2. Решить уравнение $x^2 + 25 = 0$
3. Решить уравнение

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

Решение. 1.

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot i^2} = 2i$$

$$2. \quad x^2 + 25 = 0 \quad x^2 = -25$$

$$x = \pm \sqrt{-25} = \pm 5i$$

$$3. \quad x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 5 = -16$$

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i$$

$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{-16}}{2} = 1 + 2i$$

Тема:

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение $F(x, y, y') = 0$

связывающее независимую переменную x , искомую функцию y и ее производную y' , называется

**дифференциальным уравнением
первого порядка**

(ДУ первого порядка).

Если дифференциальное уравнение можно записать в виде $y' = f(x, y)$ то говорят, что оно разрешимо относительно производной.

Это уравнение можно записать в виде

так как $y' = \frac{dy}{dx}$ $dy = f(x, y)dx$

или, в более общем виде

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Решение дифференциального уравнения

Решением (или интегралом) дифференциального уравнения первого порядка называется любая функция $y(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

График функции в этом случае называется **интегральной кривой**.

Процесс нахождения решений данного дифференциального уравнения называется **интегрированием** этого уравнения.

Задача Коши

Задача отыскания решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется задачей Коши.

Задача Коши:

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

Общее решение ДУ

Общим решением

дифференциального уравнения

называется такая функция $y = \varphi(x, C)$

где C – произвольная постоянная, что при любом конкретном C она является решением дифференциального уравнения;

для любого допустимого начального условия $y(x_0) = y_0$ найдется такое $C = C_0$

$\varphi(x_0, C_0) = y_0$, что

Если общее решение записать в виде

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

то это соотношение называется **общим интегралом** дифференциального уравнения.

Частным решением

дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y_0(x)$ которая получается из общего решения при конкретном значении C .

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0 \quad (1)$$

Где $P_1(x)$ $P_2(x)$ $Q_1(y)$ $Q_2(y)$

– заданные функции, называется
дифференциальным уравнением с
разделяющимися переменными.

Если $Q_1(y) \neq 0$ $P_2(x) \neq 0$
 то, разделив уравнение (1) на $P_2(x)Q_1(y)$
 получим уравнение

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy = 0 \quad (2)$$

которое
 дифференциальным
разделенными
 (коэффициент при
 переменной x , при
 переменной y).

называется
 уравнением с
переменными
 dx
 есть функция
 – функция

Общий интеграл полученного уравнения находится почленным интегрированием:

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy = C$$

Уравнение

$$y' = P(x)Q(y)$$

Где $P(x)$, $Q(y)$ – заданные функции, сводится к уравнению (2).

Нужно положить $y' = \frac{dy}{dx}$ и разделить переменные

Схема решения ДУ с разделяющимися переменными

Этапы	Пример для уравнения $(x + xy^2)dx + (y + yx^2)dy = 0$
<p>1. Приводим заданное уравнение к виду (1). Для этого вынесем из скобок общие множители</p>	$x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0$
<p>2. Разделим переменные, выполнив деление обеих частей уравнения на произведение $(1 + y^2)(1 + x^2)$</p>	$\frac{x(1 + y^2)dx}{(1 + y^2)(1 + x^2)} + \frac{y(1 + x^2)dy}{(1 + y^2)(1 + x^2)} = 0$

3. Сократив дроби, получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{x dx}{1+x^2} + \frac{y dy}{1+y^2} = 0$$

4. Интегрируем полученное уравнение

$$\ln|x| + \ln|y| = \ln|xy|$$

$$C_1 = \frac{1}{2} \ln C$$

где,

$$\int \frac{x dx}{1+x^2} + \int \frac{y dy}{1+y^2} = C_1$$

$$\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \ln(1+y^2) = \frac{1}{2} \ln C$$

$$(1+x^2)(1+y^2) = C$$

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение вида

$$y' + p(x)y = g(x) \quad (3)$$

Где $g(x) \neq 0$, $p(x)$, $g(x)$

– непрерывные функции, называется
линейным **неоднородным**
уравнением первого порядка.

§2. Дифференциальные уравнения второго порядка

Уравнение вида

$$F(x, y, y', y'') = 0 \text{ или } y'' = f(x, y, y')$$

называется **дифференциальным уравнением второго порядка.**

Начальные условия для данного уравнения имеют вид

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'$$

x_0, y_0, y_0' – некоторые числа.

Решением уравнения $y'' = f(x, y, y')$ называется всякая функция, которая при подстановке вместе с y' и y'' в это уравнение обращает его в тождество.

Пример. Показать, что функция $y = \cos 8x$ является решением уравнения $y'' + 64y = 0$

Решение. $y' = -8 \sin 8x$, $y'' = -64 \cos 8x$

$$y'' + 64y = -64 \cos 8x + 64 \cos 8x = 0$$

Общим решением уравнения

$$y'' = f(x, y, y')$$

называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$,
зависящая от двух произвольных
постоянных C_1 C_2

и такая, что:

1) она является решением уравнения при
любых конкретных значениях C_1 и C_2 ;

2) для любых допустимых начальных
условий y_{10} y_{20} можно подобрать такие C_1 и C_2 ,
что функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ будет
удовлетворять этим условиям.

Понижение порядка дифференциальных уравнений

В некоторых частных случаях удается понизить порядок дифференциального уравнения второго порядка. В итоге дифференциальное уравнение приводится к дифференциальному уравнению первого порядка одного из ранее изученных типов.

Типы уравнений, допускающих понижение порядка

Уравнение $y'' = f(x)$

Способ понижения порядка

$$y' = \int f(x) dx = F(x) + C_1$$

$$y = \int (F(x) + C_1) dx + C_2$$

Пример

Найти общее решение уравнения

$$y'' = x^2 + \sin 3x$$

Решение. Интегрируя, получим

$$y' = \int (x^2 + \sin 3x) dx + C_1$$

$$y' = \int x^2 dx + \int \sin 3x dx + C_1$$

$$y' = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \cos 3x + C_1 - \text{уравнение с}$$

разделяющимися переменными.

Так как $y' = \frac{dy}{dx}$

разделяем переменные и интегрируем:

$$dy = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \cos 3x + C_1 \right) dx$$

$$y = \int \left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \cos 3x + C_1 \right) dx + C_2$$

$$y = \frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{9} \sin 3x + C_1 x + C_2$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Уравнение вида $y'' + py' + qy = 0$, (4)
(p и q – постоянные) называется
линейным **однородным**
дифференциальным уравнением с
постоянными коэффициентами.

Уравнение $k^2 + pk + q = 0$

называется **характеристическим** для дифференциального уравнения

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Для составления характеристического уравнения в уравнении (4) заменяют

$$y'' \rightarrow k^2, \quad y' \rightarrow k, \quad y \rightarrow 1.$$

Вид общего решения этого уравнения определяется корнями

характеристического уравнения k_1 k_2 и

.

Пример

Составить характеристические уравнения для следующих дифференциальных

уравнений: $y' + 6y = 0,$

1. $y'' - 3y' + y = 0,$

2. $7y'' + 2y = 0,$

3. $y'' + 9y' = 0.$

4.

Корни характеристиче- ского уравнения	Форма общего решения уравнения (4):	
1. $k_1 \neq k_2$ – действительные числа ($D > 0$)	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$	
2. $k_1 = k_2$ – действительные числа ($D = 0$)	$y = e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x)$	

$$3. k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$$

— КОМПЛЕКСНЫЕ
числа ($D < 0$)

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

Пример

1. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

Решение. Составим характеристическое уравнение, заменяя в данном уравнении

$$y'' \rightarrow k^2 \quad y' \rightarrow k \quad y \rightarrow 1$$

Получим

$$k^2 - 5k + 6 = 0$$

Найдем дискриминант квадратного уравнения:

$$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$$

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 3,$$
$$k_1 \neq k_2$$

Имеем случай 1, следовательно,

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

– общее решение уравнения.